

Aplicaciones de la Integral

Cálculo Integral





Libro: Apuntes de Cálculo USM Gruenberg, V. (2016)



Áreas entre curvas

Sea f una función no negativa y acotada definida en el intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Queremos definir el área de regiones del tipo:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$$

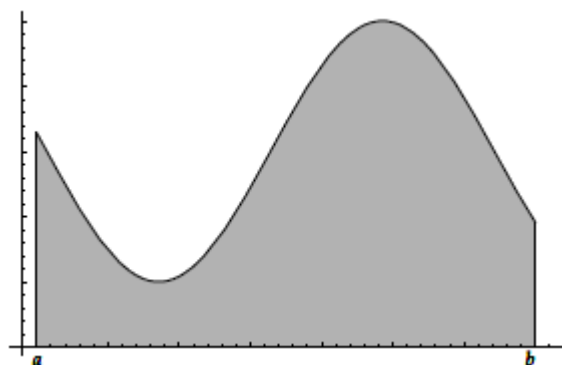
Las condiciones básicas que debería cumplir nuestra definición son:

- i. $U \subseteq V \Rightarrow \text{área}(U) \leq \text{área}(V)$
- ii. Si $\text{área}(U \cap V) = 0$ entonces $\text{área}(U \cup V) = \text{área}(U) + \text{área}(V)$
- iii. Si R es un rectángulo de lados a y b entonces $\text{área}(R) = ab$

Si designamos el área de $\mathcal{R}$ por $A_a^b(f)$ entonces las propiedades anteriores se traducen como.

1. Si $\forall x \in [a, b], 0 \leq f(x) \leq g(x)$ entonces $A_a^b(f) \leq A_a^b(g)$
2. $\forall c \in [a, b]$ se cumple $A_a^b(f) = A_a^c(g) + A_c^b(g)$
3. $A_a^b(c) = c(b - a)$

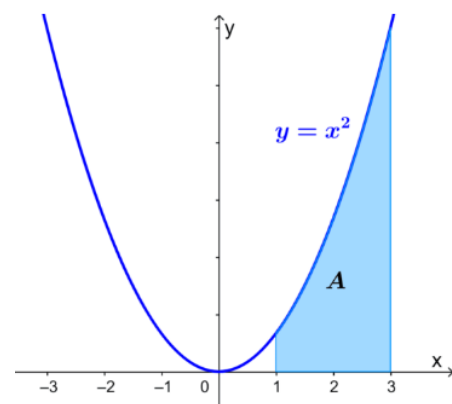
Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Representaremos por $G(f, a, b)$ la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = a$, $y = b$



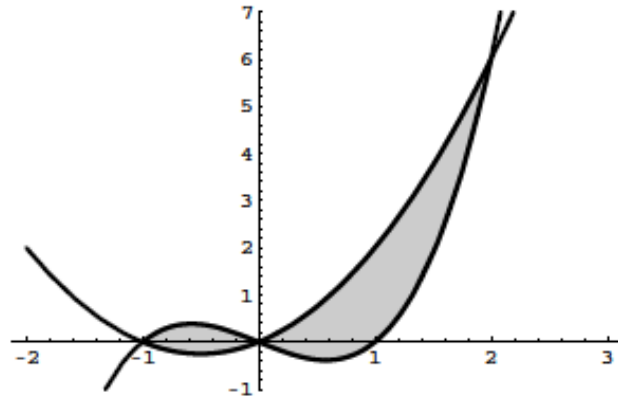
$$A_a^b(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Ejemplo

¿Cuál es el área bajo la curva representada por $y = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 3$?



Áreas entre curvas



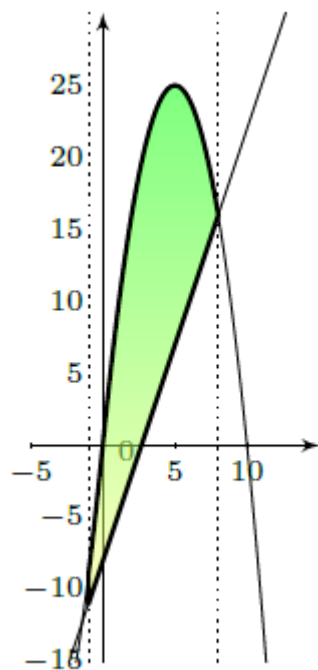
Área entre dos curvas.

Obs.: el área encerrada por dos funciones arbitrarias $y = f(x)$, $y = g(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

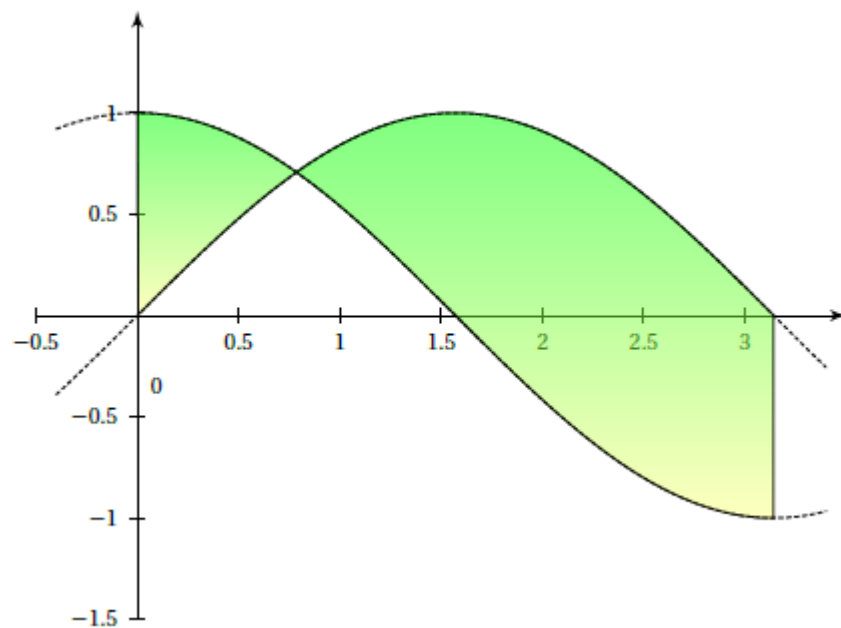
Ejercicio

Hallar el área de la región encerrada por las curvas $y = 10x - x^2$ y $y = 3x - 8$.



$$\int_{-1}^8 |(10x - x^2) - (3x - 8)| dx = \int_{-1}^8 (10x - x^2 - (3x - 8)) dx = \frac{243}{2}$$

Ejercicio Hallar el área A encerrada por las curvas $y = \sin x$, $y = \cos x$ entre las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.



$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx \\ &\quad + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

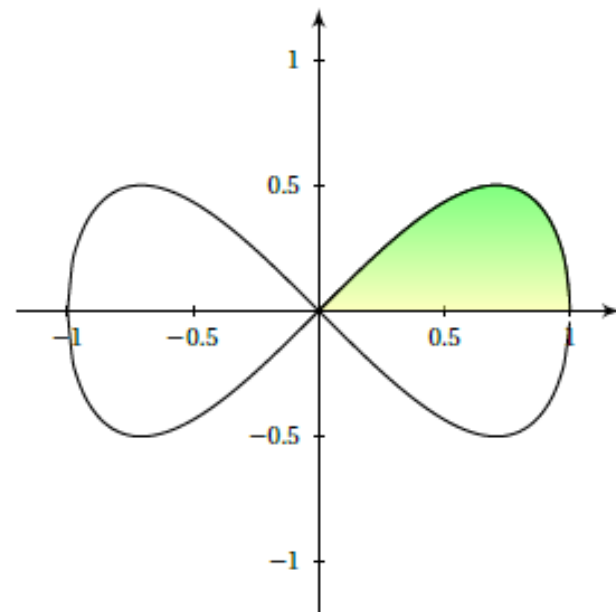
Ejercicio Encontrar el área encerrada por la curva cerrada $y^2 = x^2 - x^4$.

Solución: Note que $y^2 \geq 0$ entonces $x^2 - x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(1 - x^2) \geq 0$ esto es $x \in [-1, 1]$. De la ecuación

$$y^2 = x^2 - x^4$$

obtenemos las funciones

$$y = \pm \sqrt{x^2 - x^4} = \pm |x| \sqrt{1 - x^2}$$



$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(|x| \sqrt{1-x^2} - \left(-|x| \sqrt{1-x^2} \right) \right) dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 |x| \sqrt{1-x^2} dx \\ &= 4 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Calcular el área de la región comprendida entre las curvas:

(a) $y = \frac{2|x|}{1+x^2}$, $x = -2$, $x = 1$ y el eje X

Rpta: $\ln(10)$

(b) $y = x^2$, $y = x^3$, $x = -1$, $x = 2$

Rpta: $\frac{25}{12}$

(c) $y = 4 - x^2$, $y = \ln(2x - 3)$, $y = 1$

Rpta: $\left(\frac{e}{2} + 2\sqrt{3} - \frac{13}{3}\right)$

(d) $xy = 1$, $xy = 3$, $x - xy = 1$, $x - xy = 3$

Rpta: $\ln(729/256)$

(e) $y = x^2$, $x^2 = 4y$, $x + y = 6$

Rpta: $\frac{1}{3}(28\sqrt{7} - 62)$

(f) $y = |x^3 - 4x^2 + x + 6|$, $3y + x^2 = 0$, $x = 4$

Rpta: $\frac{341}{18}$

(g) $y = \arcsen(x)$, $y = arccos(x)$, $y = 0$

Rpta: $\sqrt{2} - 1$

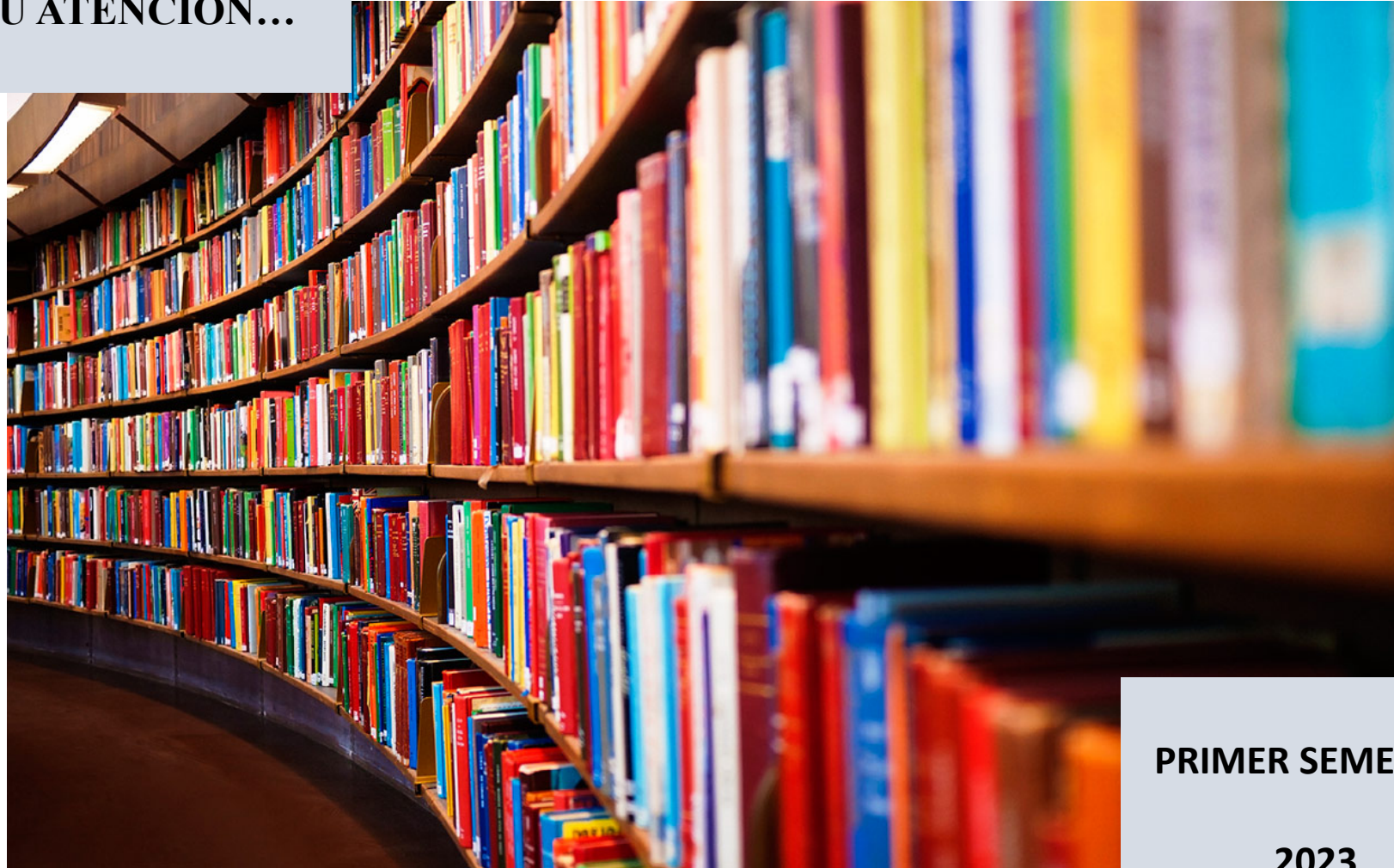
(h) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Rpta: $3\pi/8$

(i) $y^2 = 4x^3$, $y = 2x^2$.

Rpta: $2/15$

...GRACIAS POR SU ATENCIÓN...



PRIMER SEMESTRE

2023