FACULTAD
CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de
Playa Ancha

Aplicaciones de la integral: Coordenadas Polares

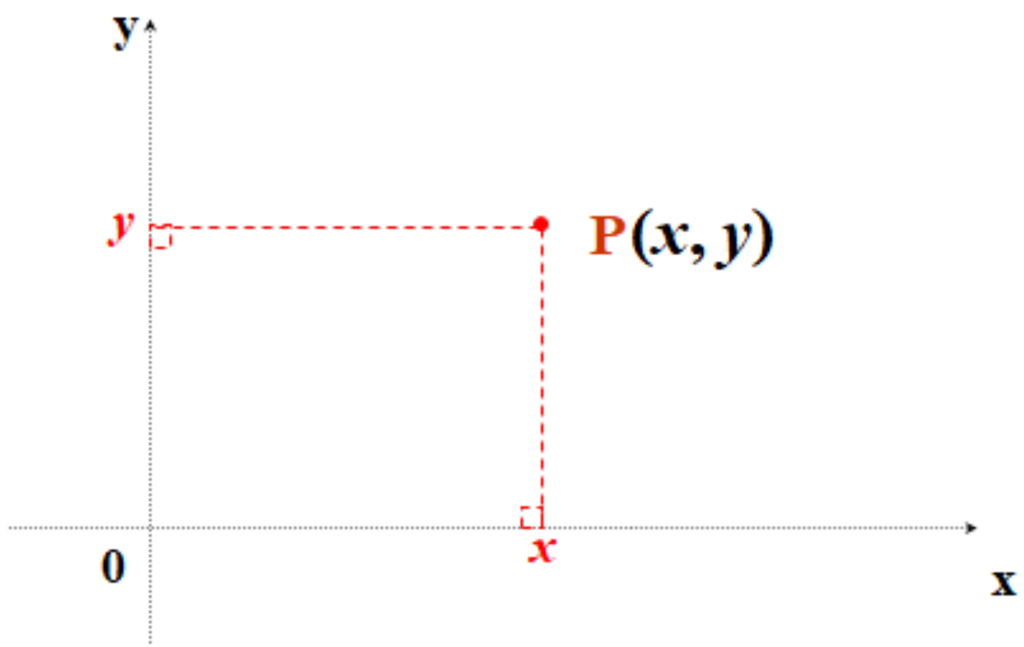
Cálculo Integral

I. M. P (2023)

Libro: Apuntes de Cálculo USM   Gruenberg, V. (2016)

Coordenadas Polares

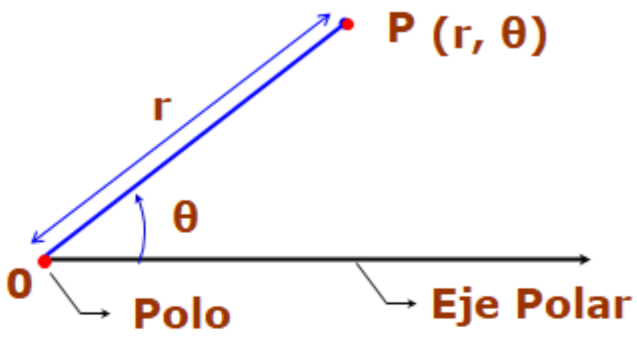
…Algo sobre Coordenadas Cartesianas o Rectangulares



Coordenadas Polares

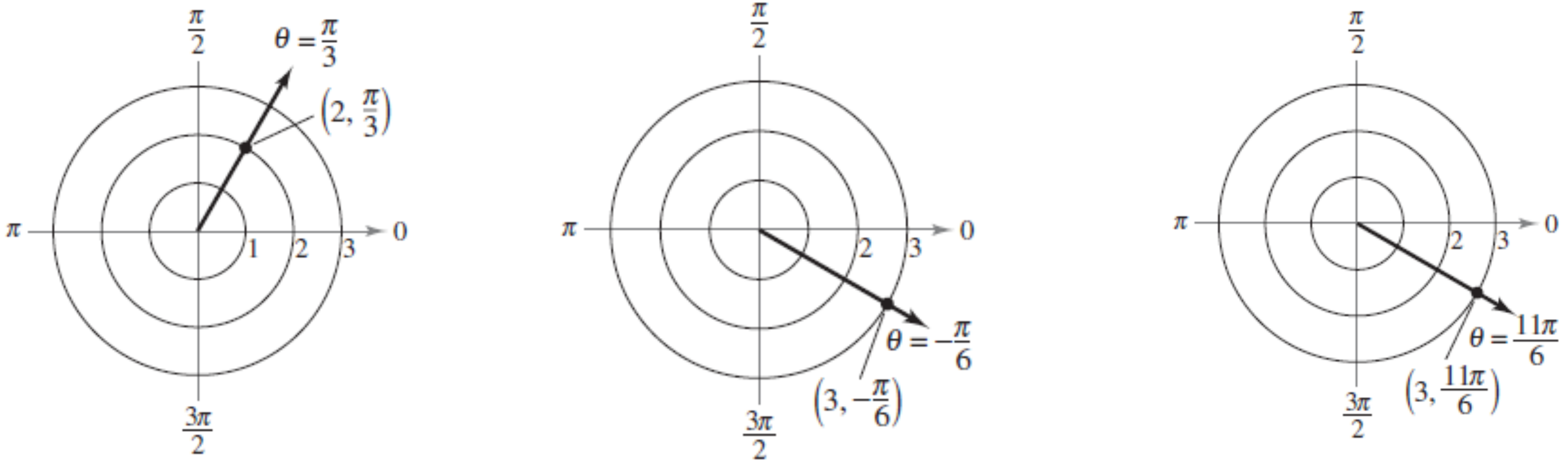
Posición de un punto en coordenadas polares

En el sistema de coordenadas polares, un punto P del plano se representa por un par (r, θ) donde r es la distancia del origen (llamado *polo*) al punto dado y θ es el ángulo de inclinación del radio vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto al semieje positivo X llamado *eje polar*.



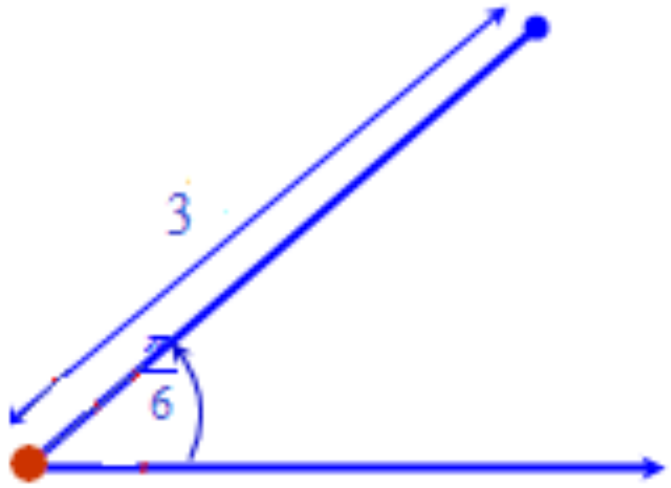
OBSERVACIÓN: En lo que sigue trabajaremos con el ángulo medido en radianes.

La figura muestra tres puntos en el sistema de coordenadas polares. Obsérvese que en este sistema es conveniente localizar los puntos con respecto a una retícula de circunferencias concéntricas intersecadas por **rectas radiales** que pasan por el polo



a) *b*) *c*)

EJEMPLO En coordenadas polares, el punto $P=(3,\pi/6)$ es ubicado dibujando primero un rayo que parte en el polo que forme un ángulo $\theta=\pi/6$ con el semieje positivo (eje polar). Luego, sobre dicho radio y desde el origen se mide $r=3$ unidades. Notar que el mismo punto del plano pudo haber sido localizado usando las coordenadas polares $(3,-11\pi/6)$, más aún $P=(3,\pi/6+2n\pi)$ para $n\in\mathbb{Z}$.

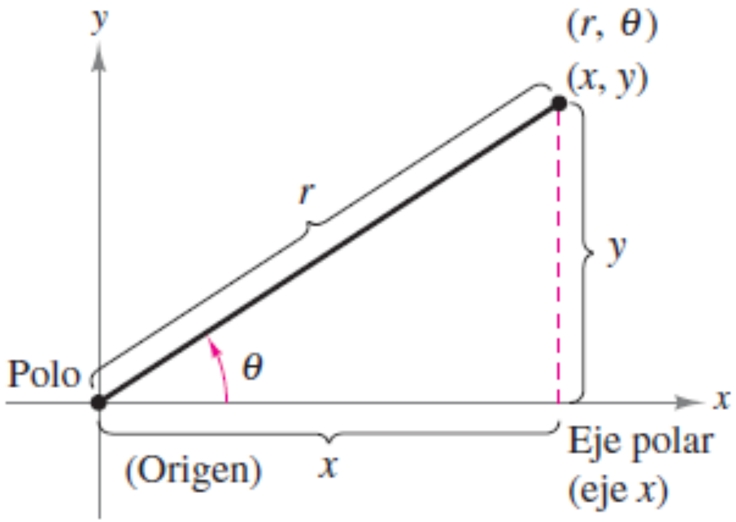


Extensión de la representación Todo punto $P=(r,\theta)$ tiene infinitas representaciones

$$(r,\theta)=\begin{cases} (r,\theta+2k\pi) & \text{con} \quad k\in\mathbb{Z} \\ (-r,\theta+\pi+2k\pi) & \text{con} \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Note que el origen o polo es representado por todos los puntos de la forma $(0,\theta)$ con $\theta\in\mathbb{R}$.

Fórmulas de transformación



Para establecer una relación entre coordenadas polares y rectangulares, se hace coincidir el eje polar con el eje x positivo y el polo con el origen, como se ilustra en la figura 10.38. Puesto que (x, y) se encuentra en un círculo de radio r, se sigue que $r^2 = x^2 + y^2$. Para $r > 0$, la definición de las funciones trigonométricas implica que

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos \theta = \frac{x}{r}, \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r}.$$

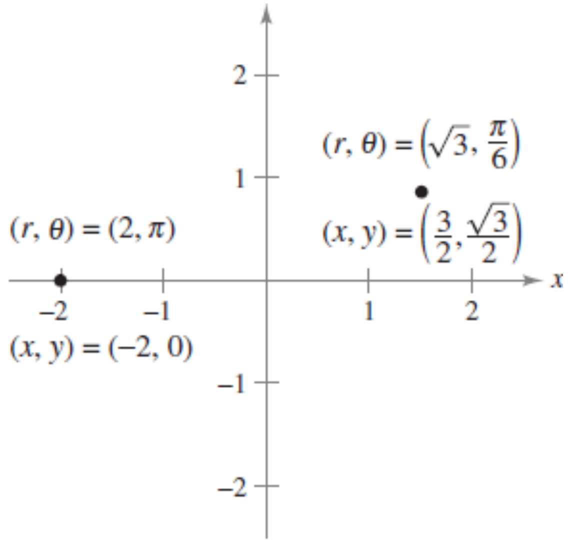
Si $r < 0$, estas relaciones también son válidas, como se puede verificar.

Transformación (o cambio) de coordenadas

Las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) de ese punto como sigue.

1. $x = r\cos\theta$ **2.** $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$ $r^2 = x^2 + y^2$



EJEMPLO **Transformación (o cambio) de coordenadas polares a rectangulares**

a) Dado el punto $(r, \theta) = (2, \pi)$,

$$x = r\cos\theta = 2\cos\pi = -2$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\pi = 0.$$

$$(x, y) = (-2, 0).$$

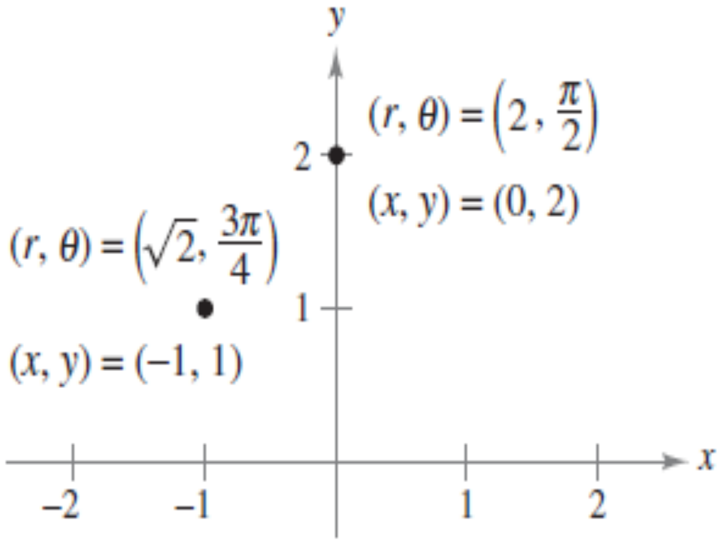
b) Dado el punto $(r, \theta) = \left(\sqrt{3}, \pi/6\right)$,

$$x = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

$$y = \sqrt{3}\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(x, y) = \left(3/2, \sqrt{3}/2\right).$$

EJEMPLO **Transformación (o cambio) de coordenadas rectangulares a polares**



a) Dado el punto del segundo cuadrante $(x, y) = (-1, 1)$,

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Como θ se eligió en el mismo cuadrante que (x, y), se debe usar un valor positivo para r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{2}$$

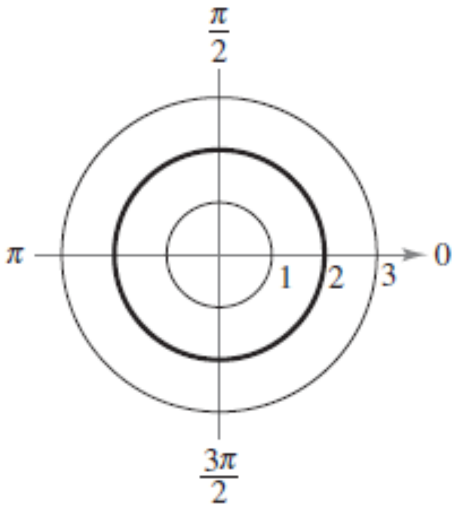
$$(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, 3\pi/4\right).$$

b) Dado que el punto $(x, y) = (0, 2)$ se encuentra en el eje y positivo, se elige $\theta = \pi/2$ y $r = 2$, y un conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (2, \pi/2)$.

EJEMPLO **Trazado de ecuaciones polares**

Describir la gráfica de cada ecuación polar. Confirmar cada descripción transformando la ecuación a ecuación rectangular.

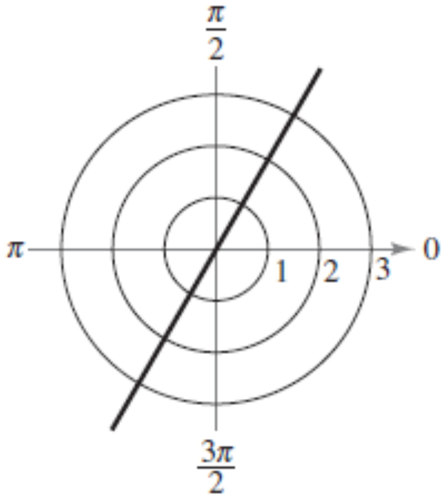
a) $r = 2$



Solución

a) La gráfica de la ecuación polar $r = 2$ consta de todos los puntos que se encuentran a dos unidades del polo. En otras palabras, esta gráfica es un círculo que tiene su centro en el origen y radio 2. Esto se puede confirmar utilizando la relación $r^2 = x^2 + y^2$ para obtener la ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 2^2$.

$$b)\ \theta = \frac{\pi}{3}$$



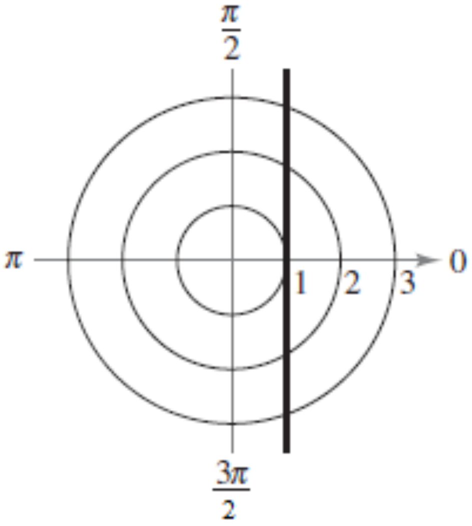
Solución

b) La gráfica de la ecuación polar $\theta = \pi/3$ consta de todos los puntos sobre la semirrecta que forma un ángulo de $\pi/3$ con el semieje x positivo.

Para confirmar esto, se puede utilizar la relación $\tan\theta = y/x$ para obtener la ecuación rectangular

$$y = \sqrt{3}\,x.$$

$$c)\ r = \sec\theta$$



Solución

c) La gráfica de la ecuación polar $r = \sec\theta$ no resulta evidente por inspección simple, por lo que hay que empezar por pasarla a la forma rectangular mediante la relación $r\cos\theta = x$.

$$r = \sec\theta$$

$$r\cos\theta = 1$$

$$x = 1$$

Gráfica en coordenadas polares

Sea f una función de una variable a valores reales ($f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Definimos el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de todos los puntos de coordenadas polares (r, θ) que satisfacen la ecuación

$$r = f(\theta)$$

este conjunto puede ser escrito en coordenadas cartesianas en la forma

$$\begin{aligned} G &= \left\{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : r = f(\theta), \theta \in \operatorname{Dom}(f)\right\} \\ &= \left\{(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \ \theta \in \operatorname{Dom}(f)\right\} \end{aligned}$$

al conjunto G se le llama gráfica polar de f y la ecuación que la origina es llamada ecuación polar de f.

Ejemplo Considere la función constante $f(\theta) = c$ entonces la ecuación

$$r = c$$

define una circunferencia con centro en el origen y de radio $|c|$.

Ejercicio Graficar $r = e^{\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$.

Para graficar en el plano una ecuación en coordenadas polares es conveniente hacer un análisis previo antes de ubicar puntos para simplificar la construcción de la gráfica. En este análisis se consideran las nociones de interceptos, simetrías, extensión.

Observación Como sabemos todo punto de coordenadas (r, θ) coincide con el punto de coordenadas $(-r, \theta + \pi)$, de esto se sigue que si la ecuación de una curva en coordenadas polares es de la forma

$$r = f(\theta)$$

entonces la misma ecuación tiene las representaciones

$$(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$$

para $n \in \mathbb{Z}$. Es por esta razón que las ecuaciones $r = 1$ y $r = -1$ son la misma circunferencia y también la gráfica de

$$r = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

es la misma que la de

$$r = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Extensión

Diremos que la gráfica de la ecuación $r = f(\theta)$ es acotada si existe $M > 0$ tal que

$$|r| \leq M \text{ para } \theta \in \mathrm{Dom}(f)$$

esto nos dice que la gráfica esta encerrada por una circunferencia de radio M.

Ejemplo

1. $r = 4\operatorname{sen}(4\theta)\cos\theta$ es acotada, más aun $|r| \leq 4$ para $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $r = e^{\theta}$ para $\theta \in \mathbb{R}$ es no acotada.

Simetrías respecto al eje polar

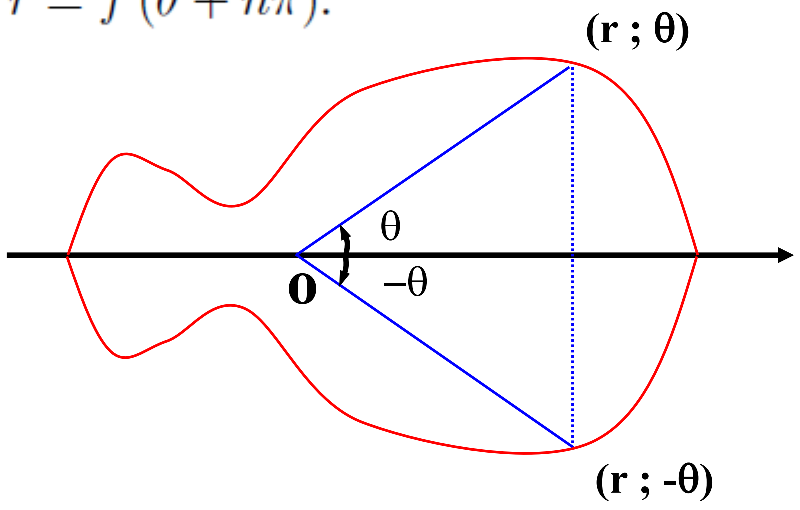
La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje polar si al reemplazar θ por $-\theta$ la ecuación polar no varía. También es posible verificar la simetría respecto al eje polar, si al cambiar simultáneamente

r por $-r$

y la ecuación no varia.

θ por $\pi - \theta$

Observación Cuando decimos que la ecuación $r = f(\theta)$ no cambia estamos diciendo que se obtiene una de sus multiples representaciones $(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$.

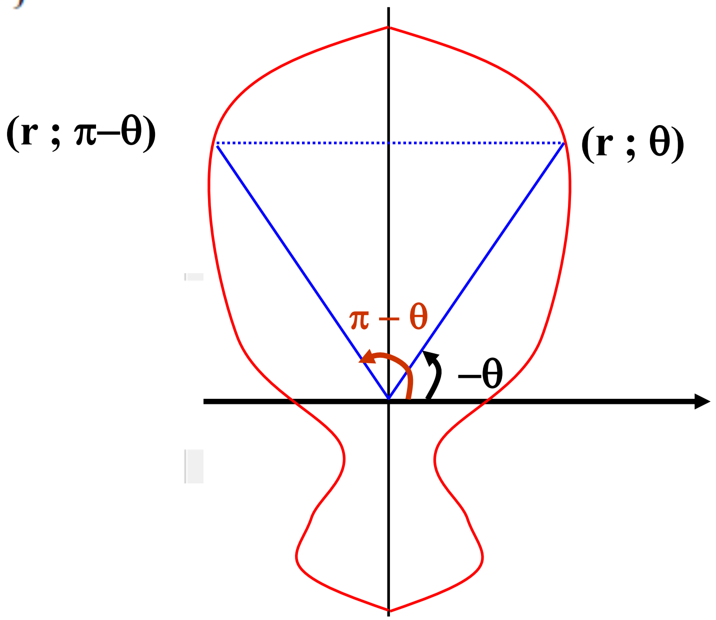


Ejemplo

$$r = (1 + \cos\theta)$$

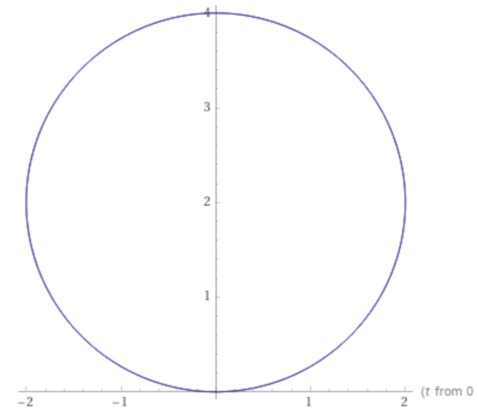
Simetrías respecto al eje perpendicular al polar

Si al reemplazar θ por $\pi - \theta$ la ecuación polar no varia (o al reemplazar en forma simultánea r por $-r$ y θ por $-\theta$) entonces la ecuación es simétrica respecto al eje normal.



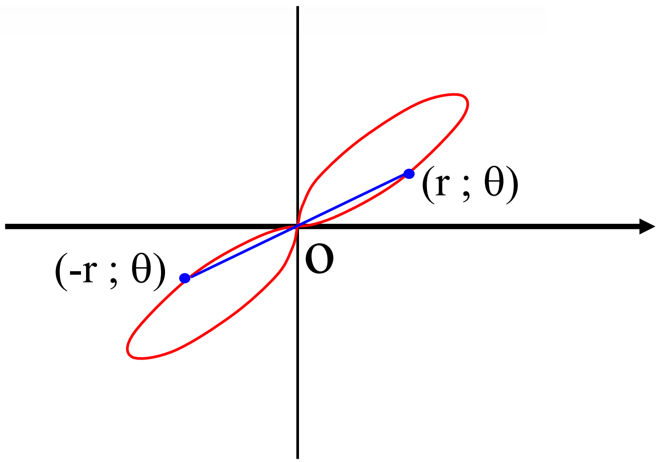
Ejemplo

La gráfica de $r = 4\sin\theta$ es simétrica respecto al eje perpendicular al polar.

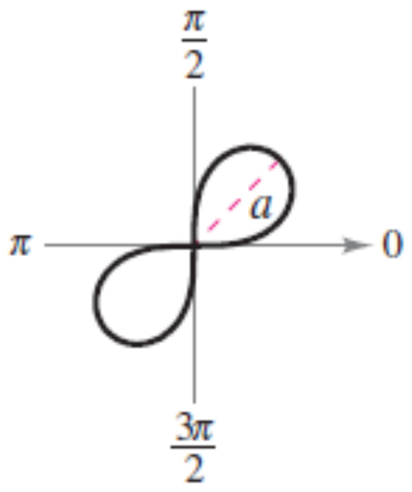


Simetría respecto al polo

Si la ecuación polar no cambia al reemplazar r por $-r$ (o θ por $\theta + \pi$) entonces la gráfica es simétrica respecto al polo



Ejemplo



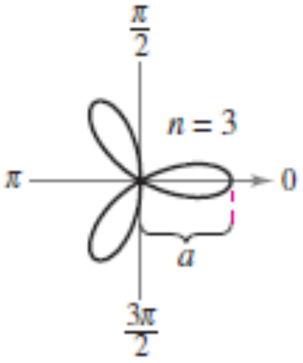
$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$
Lemniscata

Curvas rosa

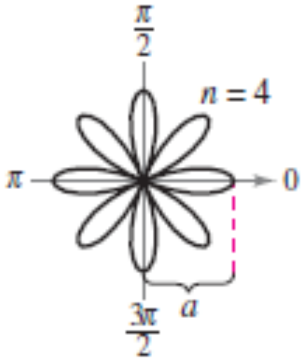
n pétalos si n es impar

$2n$ pétalos si n es par

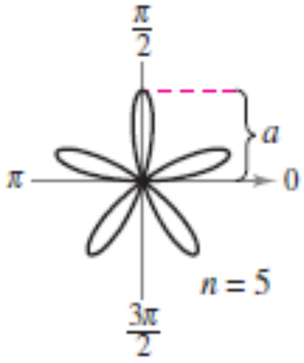
$(n \geq 2)$



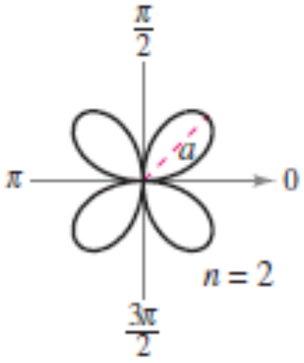
$r = a \cos n\theta$
Curva rosa



$r = a \cos n\theta$
Curva rosa

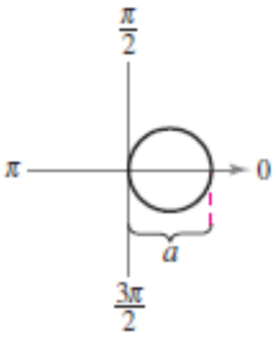


$r = a \operatorname{sen} n\theta$
Curva rosa

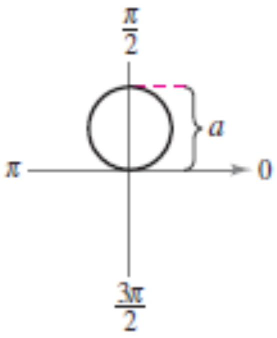


$r = a \operatorname{sen} n\theta$
Curva rosa

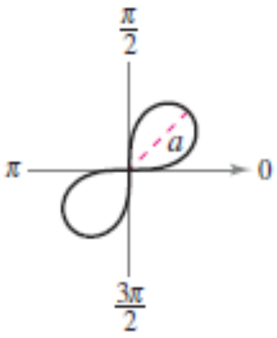
Círculos y lemniscatas



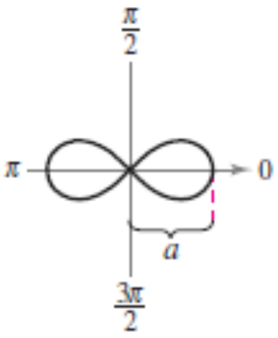
$r = a \cos \theta$
Círculo



$r = a \operatorname{sen} \theta$
Círculo



$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$
Lemniscata



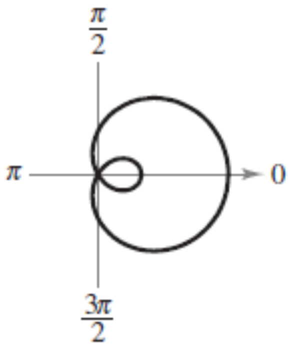
$r^2 = a^2 \cos 2\theta$
Lemniscata

Caracoles

$r = a \pm b \cos\theta$

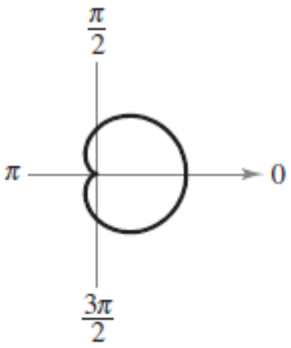
$r = a \pm b \operatorname{sen}\theta$

$(a > 0, b > 0)$



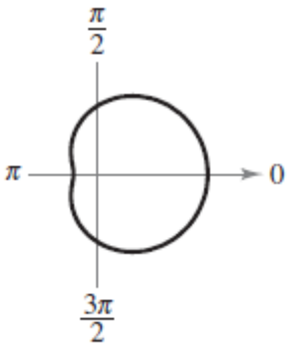
$\frac{a}{b} < 1$

Caracol con lazo interior



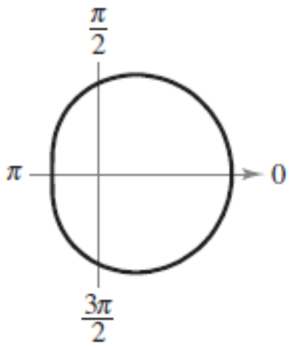
$\frac{a}{b} = 1$

Cardioide (forma de corazón)



$1 < \frac{a}{b} < 2$

Caracol con hoyuelo



$\frac{a}{b} \geq 2$

Caracol convexo

Ejemplo : Graficar $r = 1 + \cos\theta$

1. Note que $|r| = |1 + \cos\theta| \leq 2$ luego el gráfico esta dentro de la circunferencia de radio 2.

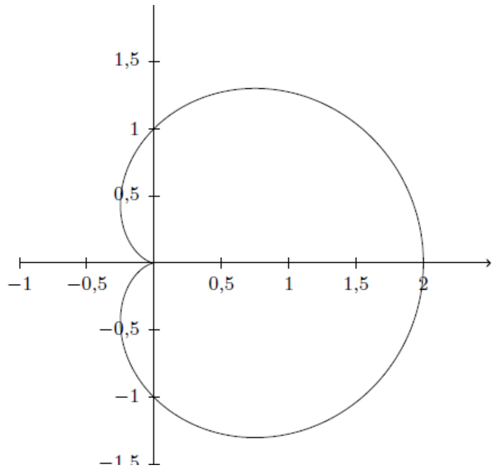
2. Interceptos.

θ	r
0	2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	1

3. Simetrías: Se verifica que la gráfica es simétrica solamente respecto al eje polar. Por tanto basta dibujarla en el semiplano superior.

4. Ahora damos algunos valores de ángulos conocidos

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
r	2	$1 + (\sqrt{3}/2)$	$3/2$	1	$1 - (1/2)$	$1 - (\sqrt{3}/2)$	0



Intersección de curvas

Como ya sabemos una ecuación polar $r = f(\theta)$ tiene las representaciones

$$(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$$

por lo cual encontrar las intersecciones de dos ecuaciones polares

$$\begin{aligned} r &= f(\theta) \\ r &= g(\theta) \end{aligned}$$

puede implicar resolver más de un sistema de ecuaciones

Ejemplo Hallar los puntos de intersección de lás gráficas de

$$r = 2\cos(2\theta) \text{ y } r = 1$$

Ejercicios

1. Determinar todos los ángulos θ que satisfacen $0 \leq \theta < 2\pi$ y

   1) $\operatorname{sen}\theta = 0$ 2) $\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{1}{2}$ 3) $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$

   4) $\operatorname{sen}\theta = \pm\cos\theta$ 5) $\tan\theta = \pm\sqrt{3}$ 6) $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

   7) $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 8) $\tan\theta = \pm 1$ 9) $\cos\theta = 0$

2. Hallar las coordenadas polares (r, θ) con $\theta \in]0, 2\pi]$ de los puntos en coordenadas cartesianas siguientes

   a) $(2, 2)$ b) $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$

   c) $\left(\sqrt{3}, -1\right)$ d) $(0, -3)$

3. Graficar los siguientes puntos que están en coordenadas polares y encontrar sus coordenadas cartesianas respectivas

   a) $(4, \frac{\pi}{3})$ b) $\left(-4, -\frac{\pi}{4}\right)$

   c) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ d) $\left(6, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ con $n \in \mathbb{Z}$

4. Escribir las siguientes ecuaciones cartesianas en términos de coordenadas polares

   a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ b) $xy = 1$ c) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$

   d) $x^2 = 1 - 4y$ e) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ f) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4xy\left(x^2 - y^2\right)$

5. Expresar cada una de las siguientes ecuaciones dadas en coordenadas polares en términos de coordenadas cartesianas x, y.

   a) $r = \operatorname{sen}(\theta)$ b) $r = 3 + 2\cos(\theta)$ c) $r = \dfrac{3}{1 - \cos\theta}$

   d) $r = 2$ e) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ f) $r^2 = 2\operatorname{sen}(2\theta)$

6. En los siguientes problemas graficar cada ecuación polar. Localizar interceptos, probar simetrías y hallar las tangentes en el polo.

1) $r = 2$	2) $r = 6\cos(5\theta)$	3) $r\cos(\theta) = 2$
4) $r\,\mathrm{sen}(\theta) = -2$	5) $r = 4\,\mathrm{sen}(2\theta)$	6) $r = 4\cos\theta$
7) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$	8) $r = -4\,\mathrm{sen}\,\theta$	9) $r = 1 - \cos\theta$
10) $r = 4 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta$	11) $r = 2(1 + \cos\theta)$	12) $r = 2 + 4\,\mathrm{sen}\,\theta$
13) $r = \theta$	14) $r^2 = 9\,\mathrm{sen}(2\theta)$	15) $r^2 = -25\cos(2\theta)$

7. Graficar y hallar las coordenadas polares de todos los puntos de intersección de los siguientes pares de gráficas polares

a) $r = 1 + \mathrm{sen}\,\theta$ y $r = 1 + \cos\theta$

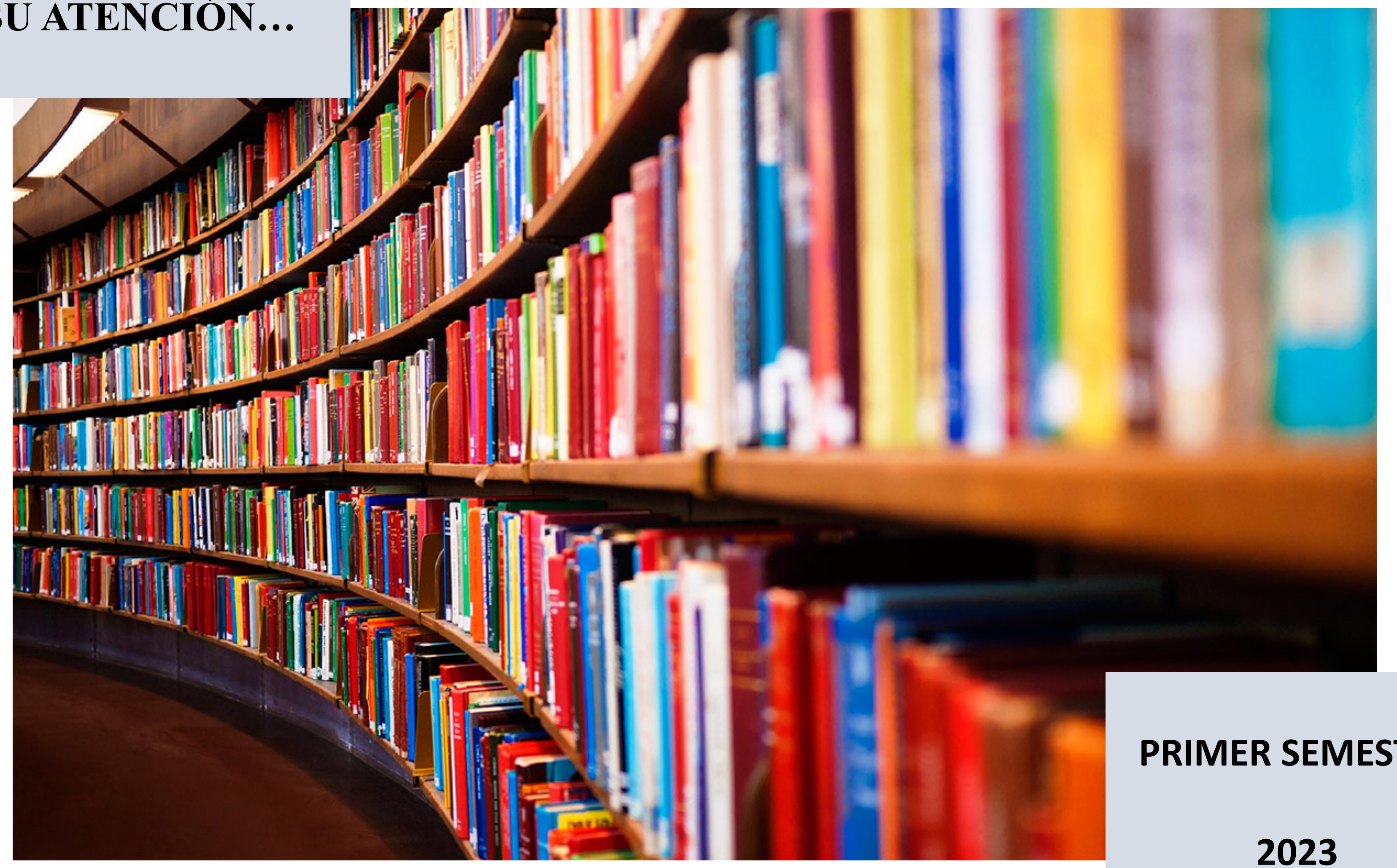
b) $r = 2 + \cos\theta$ y $r = 5\cos\theta$

c) $r = 2\cos(3\theta)$ y $r = 1$

d) $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 3\cos\theta$

e) $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 1 - \mathrm{sen}\,\theta$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



PRIMER SEMESTRE

2023