FACULTAD CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha

Aplicaciones de la integral: Coordenadas Polares/Cálculo de Área

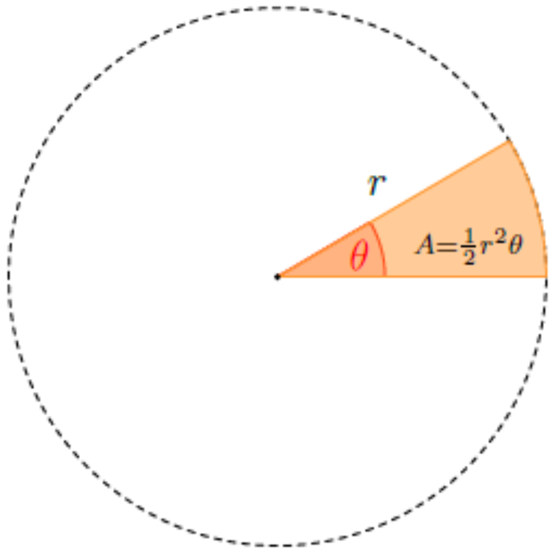
Cálculo Integral

I. M. P (2023)

Libro: Apuntes de Cálculo USM   Gruenberg, V. (2016)

Área en Coordenadas Polares

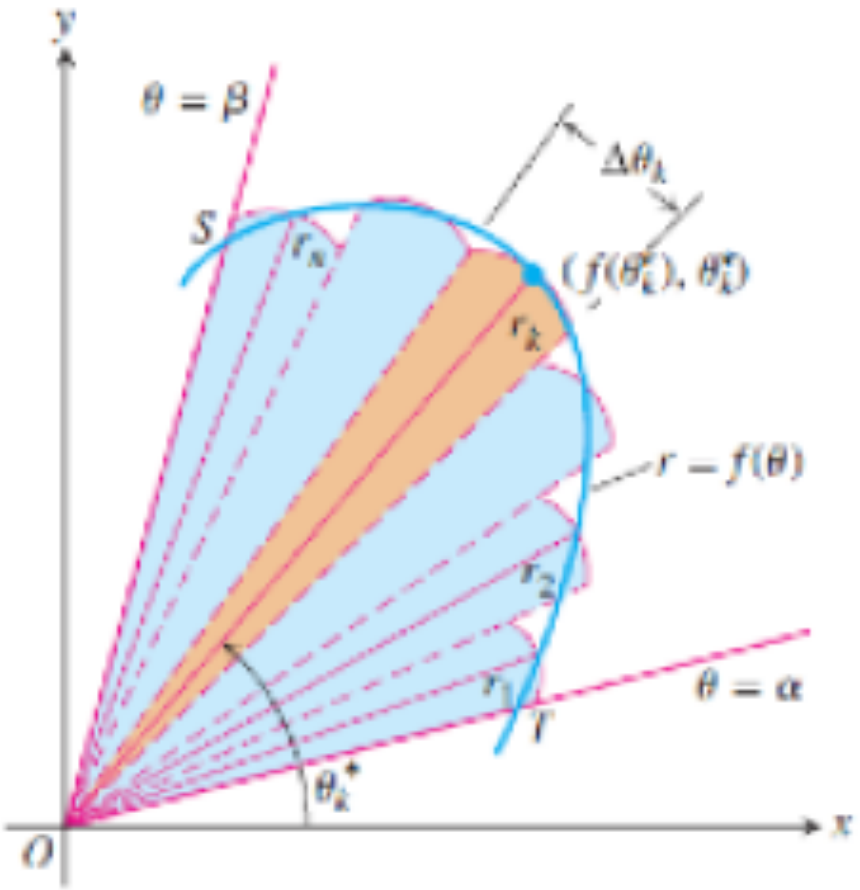
Vamos a considerar el problema de hallar el área de una región plana encerrada por la gráfica de una ecuación polar y por dos rayos que parten desde el origen.



Un círculo de radio r, un sector circular de ángulo central θ (medido en radianes) tiene un área de

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$

Dada una ecuación en coordenadas polares $r=f(\theta)$ donde f es una función continua y positiva, que está definida sobre $\alpha \leq \theta \leq \beta$, y la región R de área A encerrada por la gráfica de la ecuación $r=f(\theta)$ y por los rayos $\theta=\alpha$ y $\theta=\beta$ con $\alpha<\beta$ que parten desde el origen.



Consideramos una partición $\mathscr{P} = \{\alpha = \theta_0 < \theta_1 \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta\}$ la que determina n subintervalos $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. En cada uno de esos intervalos seleccionamos un ángulo θ_k^* arbitrario entonces el área encerrada por la gráfica entre los rayos $\theta = \theta_{k-1}$ y $\theta = \theta_k$ es aproximadamente igual a

$$\frac{1}{2}\left(f\left(\theta_k^*\right)\right)^2 \Delta\theta_k$$

de esta forma el área total encerrada es aproximadamente

$$A \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(f\left(\theta_k^*\right)\right)^2 \Delta\theta_k$$

Si f es continua entonces

$$\lim_{\|\mathscr{P}\| \to 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(f\left(\theta_k^*\right)\right)^2 \Delta\theta_k = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

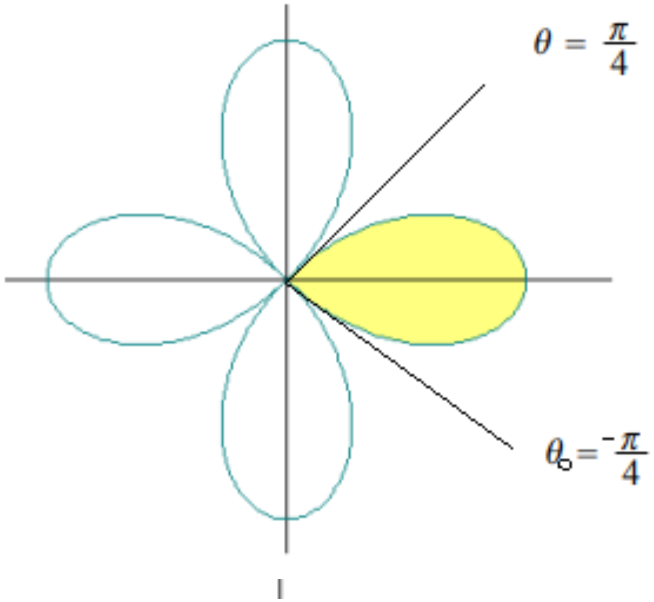
DEFINICIÓN Sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea R la región encerrada por la gráfica de la ecuación en coordenadas polares $r = f(\theta)$ y por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. El área de R está dada por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (f(\theta))^2 \, d\theta$$

Ejemplos

1. Calcule el área de la región encerrada por uno de los cuatro pétalos de la rosa

$r = \cos(2\theta)$.



Solución:

Los límites de integración se obtienen de las soluciones de la ecuación:

$\cos(2\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$, en el primer cuadrante.

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta$$

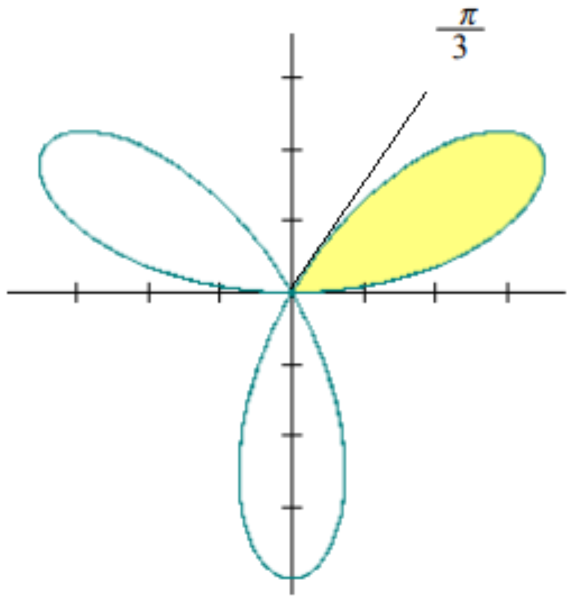
Por simetría:

$$A = \frac{1}{2} \bullet 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos(4\theta)) d\theta = \frac{\pi}{8}$$

2. Considere la ecuación polar $r = 4\sin(3\theta)$. Calcule el área de un pétalo.

Solución:

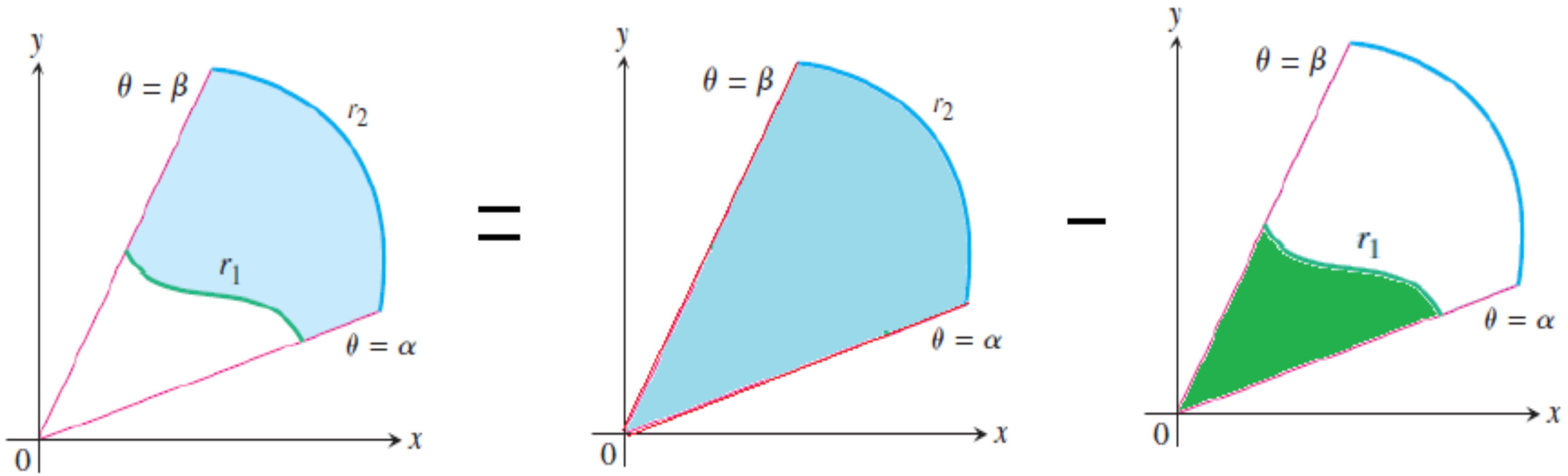


$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\sin(3\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 16\sin^2(3\theta) d\theta$$

$$A = 8\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(3\theta) d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos(6\theta)}{2} d\theta$$

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(6\theta)) d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

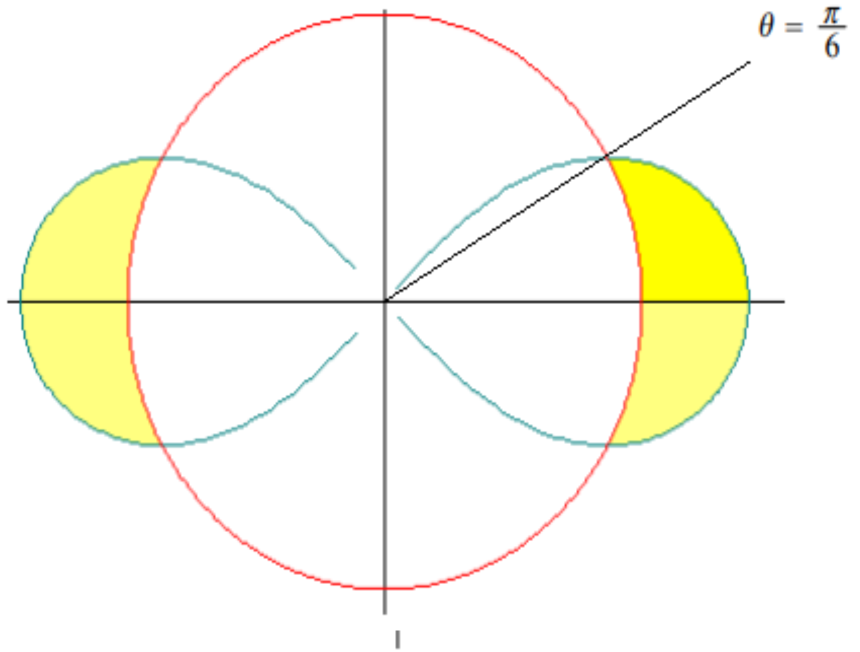
Para calcular el área de la región encerrada por las gráficas de dos ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ y por los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ donde $\alpha < \beta$ y $g(\theta) \leq f(\theta)$ primero calculamos el área mayor y le restamos la menor es decir



$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(f^2(\theta) - g^2(\theta)\right)d\theta$$

Ejemplos

1. Calcule el área de la región interior a $r^2 = 2\cos(2\theta)$ y exterior a $r = 1$.



Solución:

Por simetría, se calculará 4 veces el área de la región en el primer cuadrante.

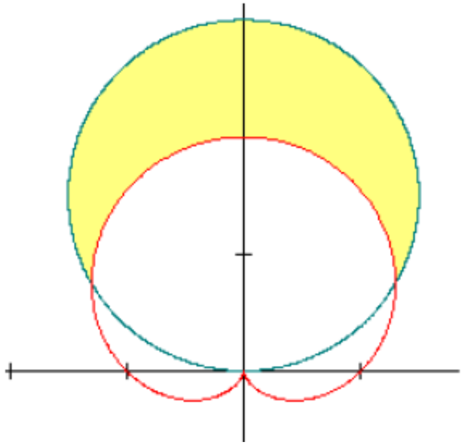
Puntos de intersección:

$$2\cos(2\theta) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos(2\theta) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6},$$

$$A = 4 \bullet \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos(2\theta)d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos(2\theta) - 1)d\theta = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Calcule el área de la región encerrada dentro de la circunferencia $r = 3\sin(\theta)$

y fuera de la cardioide $r = 1 + \sin(\theta)$.



Solución:

Puntos de intersección:

$3\sin(\theta) = 1 + \sin(\theta) \qquad \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(3\sin(\theta))^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(1+\sin(\theta))^2 d\theta$$

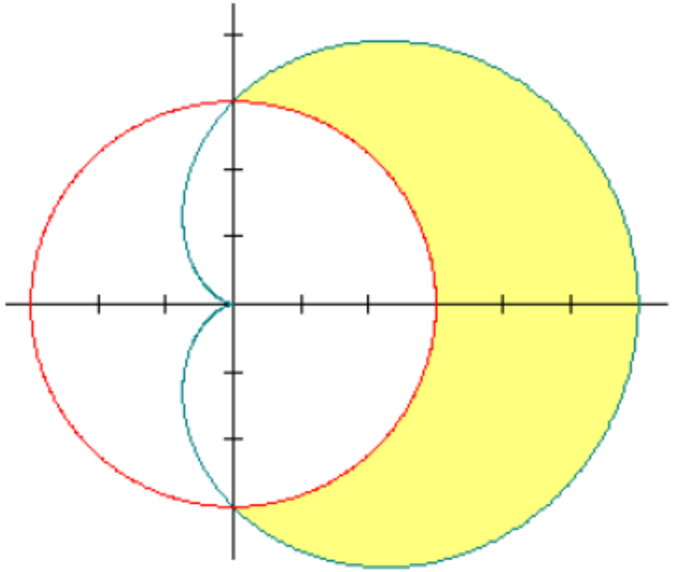
$$A = \frac{1}{2}\bullet 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2(\theta) d\theta - \frac{1}{2}\bullet 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin(\theta))^2 d\theta$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2(\theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin(\theta))^2 d\theta$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta) d\theta = \pi$$

Calcule el área de la región que es interior a la cardioide $r = 3(1+\cos(\theta))$

y exterior a la circunferencia $r = 3$.



Solución:

Puntos de intersección:

$3(1+\cos(\theta)) = 3 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \theta = \frac{3\pi}{2}$ (menores que 2π)

Por simetría,

$$A = 2\bullet\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(3(1+\cos(\theta)))^2 d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\bullet 3^2 d\theta\right)$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9(1+\cos(\theta))^2 d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\,d\theta$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9(1+\cos(\theta))^2 - 9\right) d\theta$$

$$A = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos(\theta) + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos(\theta) + 1 + \cos(2\theta))\,d\theta = 18 + \frac{9\pi}{4}$$

Ejercicios

Hallar el area de la región limitada por la (s) curva (s):

a) $r = 2 + \cos\theta$ en el primer cuadrante

b) $r = \operatorname{sen}\theta$

c) Dentro de la circunferencia $r = a$ y fuera de $r = a\,(1 - \cos\theta)$

d) $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

e) Dentro de $r = \operatorname{sen}\theta$ y fuera de $r = 1 - \cos\theta$

f) $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$ y la curva $r = 1 + \cos(2\theta)$

g) $r^2 = 2a^2 \operatorname{sen}(3\theta)$

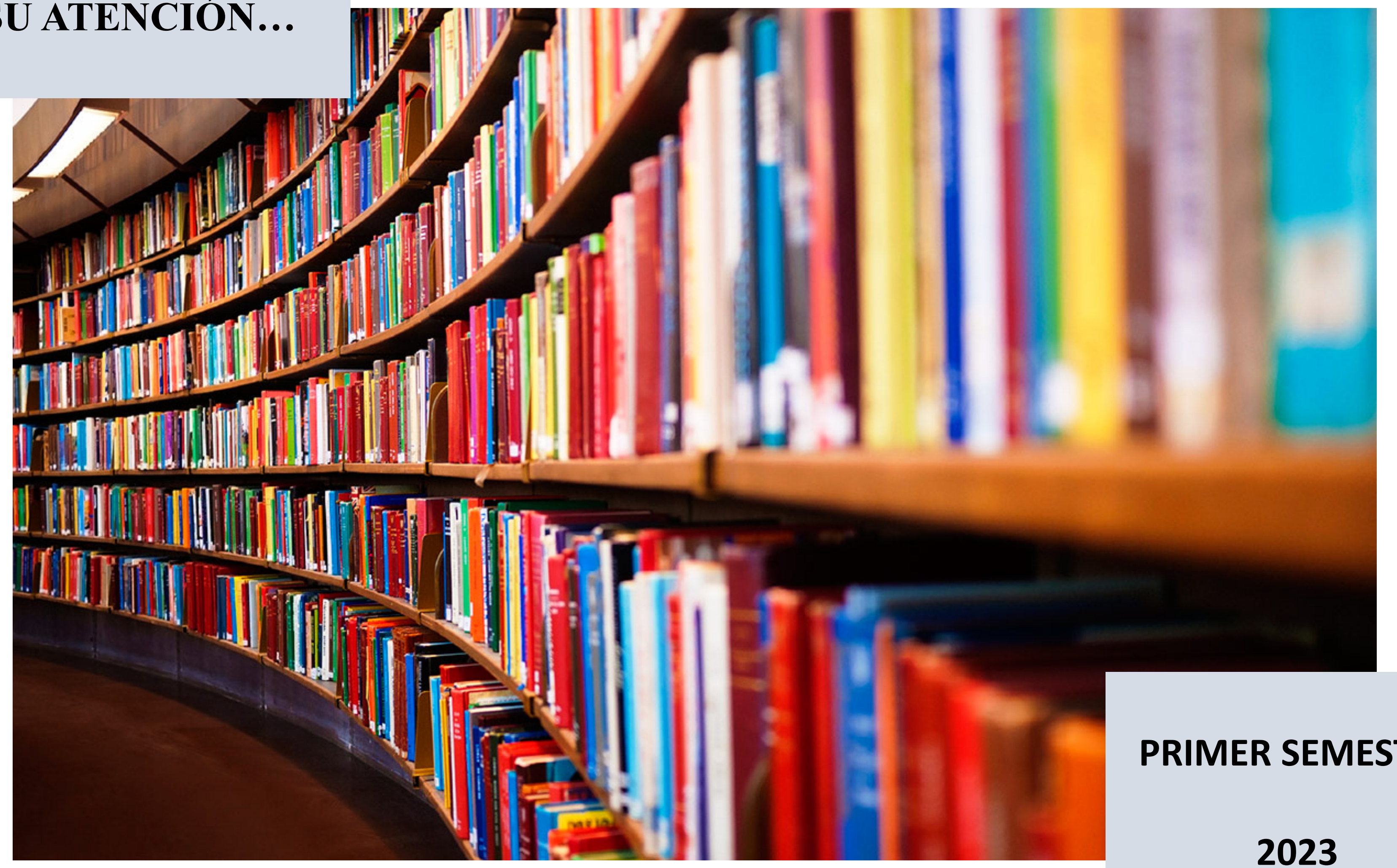
Dadas las curvas (1) $r = 2\cos(2\theta)$ y (2) $r = 1$

a) Hallar el área dentro de (1) y fuera de (2)

b) Hallar el área fuera de (1) y dentro de (2)

c) Hallar el área de la región interior a ambas curvas.

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



PRIMER SEMESTRE

2023