FACULTAD CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha

Aplicaciones de la integral: Coordenadas Paramétricas

Cálculo Integral

I. M. P (2023)

Libros: Apuntes de Cálculo USM   Gruenberg, V. (2016)
Thomas_una_variable_13e_cap11.pdf

COORDENADAS PARAMÉTRICAS

Dadas dos funciones continuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leq t \leq b$$

son llamadas ecuaciones paramétricas. A medida que t (el parámetro) varía de a hasta b, $(x, y) = (f(t), g(t))$ es un punto en el plano que se mueve y que recorre la curva

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t), y = g(t) \text{ con } t \in [a, b]\right\}$$

llamada curva paramétrica de ecuaciones

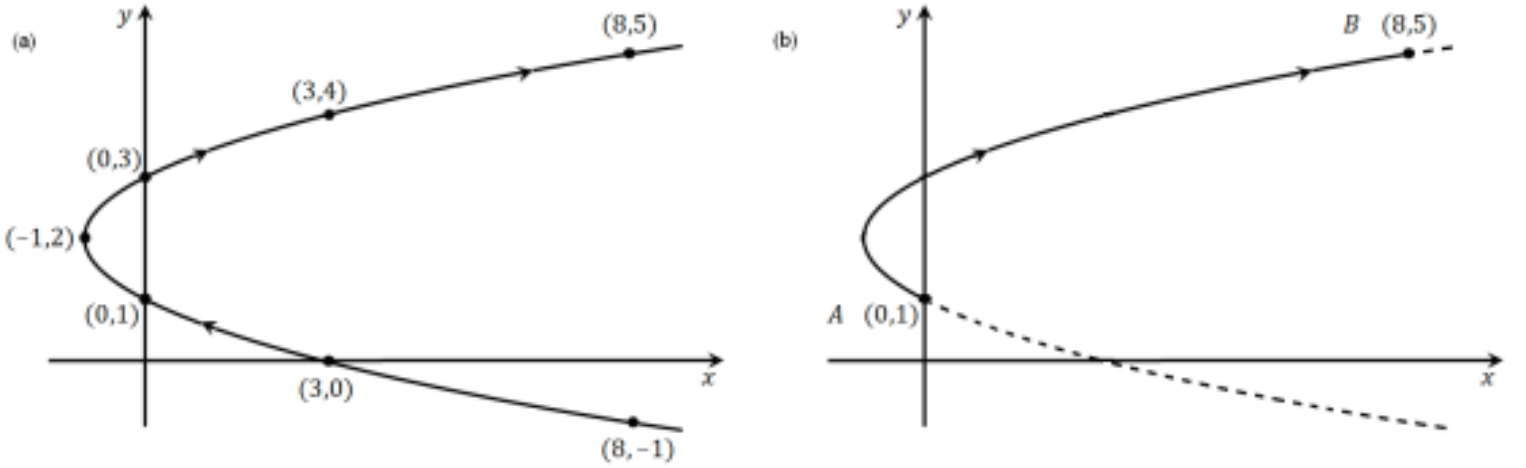
$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leq t \leq b$$

El punto $(f(a), g(a))$ es llamado **punto inicial** y el punto $(f(b), g(b))$ **punto terminal** o **punto final**. Si ellos coinciden se dice que la curva plana C es **cerrada**.

EJEMPLO Las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x &= t^2 - 2t \\ y &= t + 1 \end{cases}$$

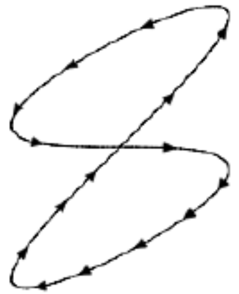
con t real, definen una curva plana. Describir y graficar la curva para los siguientes casos: a) si $t \in (-\infty, +\infty)$; b) si $t \in [0, 4]$.



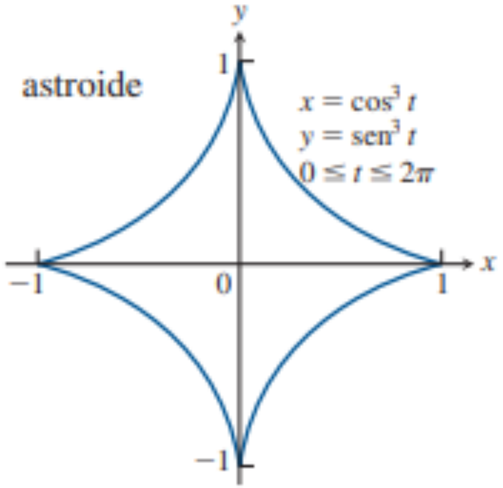
Definición Si entre los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$, se verifica que $(f(t_1), g(t_1))$ es diferente del punto $(f(t_2), g(t_2))$ para todo t_1 y t_2 diferentes del intervalo $]a, b[$ se dice que la curva plana C es **simple**. En otras palabras esto expresa que la curva *no se cruza a sí misma*.

OBSERVACIÓN: Las curvas simples pueden ser cerradas.

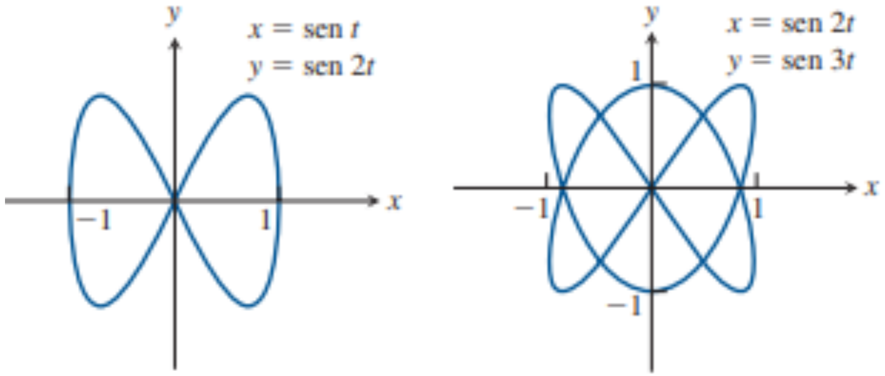
Curva cerrada simple



Curva cerrada (no simple)



curvas de Bowditch o figuras de Lissajous.



Definición

Parametrizar una curva cartesiana C es encontrar funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t), y = g(t) \text{ para } t \in [a, b] \right\}$$

Recordemos que las parametrizaciones no son únicas; por ejemplo

$$C : \begin{cases} x = -t^3 \\ y = t^6 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

y

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ambas son parametrizaciones de la gráfica de la parábola $y = x^2$.

OBSERVACIÓN: Las curvas dadas en coordenadas polares pueden parametrizarse de maner estándar: si

$$r = f(\theta) \quad \text{con} \quad \theta \in [\alpha, \beta]$$

entonces

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \text{para } \theta \in [\alpha, \beta]$$

es decir

$$C : \begin{cases} x &= f(t)\cos t \\ y &= f(t)\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

es una parametrización de la gráfica polar.

Si C es una curva paramétrica cerrada y simple descrita por las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \le t \le b$$

diremos que ella es descrita en el sentido positivo si se describe en forma antihoraria y descrita en el sentido negativo si se describe en el sentido horario.

Ejemplo :

La recta que pasa por el punto (1,2) y tiene la dirección del vector (3,4) esta formada por los puntos de la forma $R(t) = (1,2) + t\,(3,4) = (3t+1, 4t+2)$

La recta que pasa por $P=(3,2)$ y $Q=(5,1)$ tiene la dirección del vector $V = Q-P = (2,-1)$ y algunas parametrizaciones de la recta son:

$R(t) = (3,2) + t\,(2,-1)$ (pasa por el punto (3,2) en $t=0$ y por el punto (5,1) en $t=1$)

$S(t) = (5,1) + t\,(2,-1)$ (se puede empezar en cualquier otro punto de la recta)

$T(t) = (5,1) + t\,(6,-3)$ (todos los vectores con la misma dirección dan la misma recta)

$U(s) = (3,2) + s\,(4,-2)$ (el nombre del parámetro es irrelevante)

Las diferentes parametrizaciones describen a la recta recorrida a distintas velocidades y empezando en distintos puntos. Otras parametrizaciones son:

$V(t) = (7,0) + t\,(-1,1/2)$

$Z(r) = (1,3) + r(8,-4)$

Dibuje la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = t + 1, \qquad -\infty < t < \infty.$$

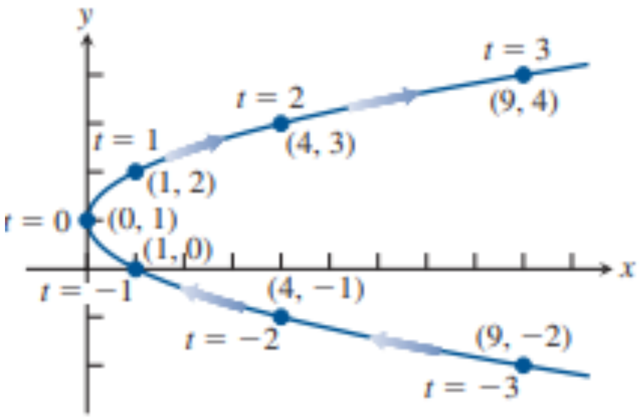
Solución Elaboramos una pequeña tabla de valores

TABLA Valores de $x = t^2$ y $y = t + 1$ para algunos valores seleccionados de t.

t	x	y
−3	9	−2
−2	4	−1
−1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3
3	9	4

A cada valor de t corresponde un punto (x, y) sobre la curva; por ejemplo, a $t = 1$ le corresponde el punto $(1, 2)$ registrado en la tabla

Si pensamos que la curva es la trayectoria de una partícula en movimiento, entonces, la partícula se desplaza a lo largo de la curva en la dirección de las flechas que se muestran en la figura



Identifique geométricamente la curva del ejemplo eliminando el parámetro t y obteniendo una ecuación algebraica en x y y.

Solución Resolvemos la ecuación $y = t + 1$ despejando el parámetro t y sustituyendo el resultado en la ecuación paramétrica de x. Esto da como resultado $t = y - 1$ y

$$x = t^2 = (y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1.$$

La ecuación $x = y^2 - 2y + 1$ representa una parábola, como la mostrada en la figura Algunas veces es muy difícil, o incluso imposible, eliminar el parámetro de un par de ecuaciones paramétricas como lo hicimos aquí. ■

Ejemplo Obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t \qquad y = 2\,\mathrm{sen}\,t \quad 0 \le t \le 2\pi$$

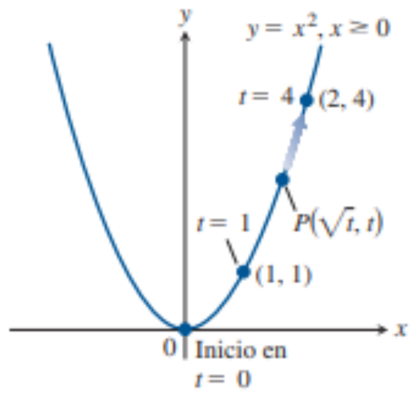
y dibuje la gráfica.

Desarrollo: Notemos que $x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2\,t = 4\,(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\,t) = 4$ se sigue que los puntos descritos por esta curva paramétrica están sobre la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2.

La posición $P(x, y)$ de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por las ecuaciones y el intervalo del parámetro siguientes:

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t \geq 0.$$

Identifique la trayectoria trazada por la partícula y describa el movimiento.



Solución Intentamos identificar la trayectoria eliminando t de las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ y $y = t$. Tal vez obtengamos una relación algebraica reconocible entre x y y. Encontramos que

$$y = t = \left(\sqrt{t}\right)^2 = x^2.$$

Las coordenadas de la posición de la partícula satisfacen la ecuación $y = x^2$; por lo tanto, la partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$.

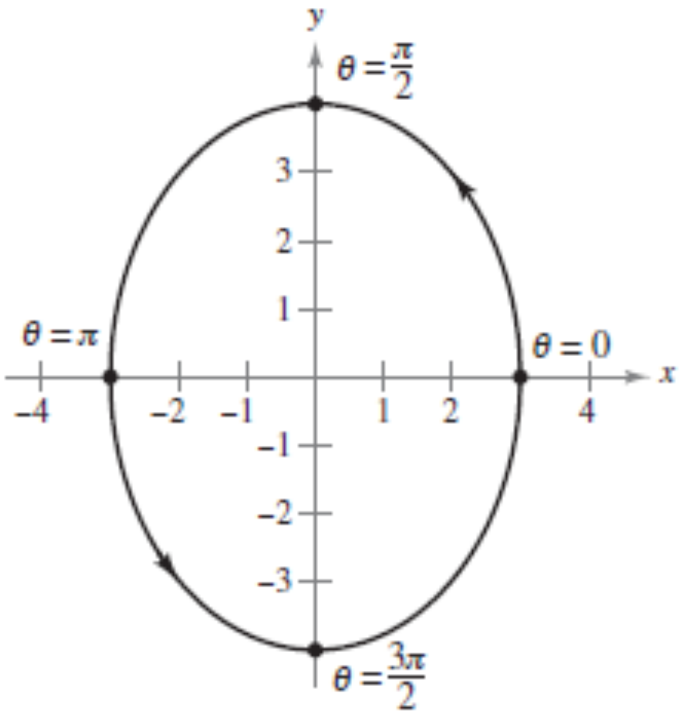
Sin embargo, sería un error concluir que la partícula recorre toda la parábola $y = x^2$ en su trayectoria; sólo recorre la mitad de la parábola. La coordenada x de la partícula nunca es negativa. La partícula inicia en (0, 0) cuando $t = 0$ y sube en el primer cuadrante conforme t aumenta El intervalo del parámetro es $[0, \infty)$ y no hay punto final. ■

Emplear trigonometría para eliminar un parámetro

Dibujar la curva representada por

$$x = 3\cos\theta \quad \text{y} \quad y = 4\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

al eliminar el parámetro y hallar la ecuación rectangular correspondiente.



Solución Para empezar se despejan $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ de las ecuaciones dadas.

$$\cos\theta = \frac{x}{3} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{4}$$ Despejar $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$.

A continuación, se hace uso de la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para formar una ecuación en la que sólo aparezcan x y y.

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$$ Identidad trigonométrica.

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$ Sustituir.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$ Ecuación rectangular.

En esta ecuación rectangular, puede verse que la gráfica es una elipse centrada en $(0, 0)$, con vértices en $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y eje menor de longitud $2b = 6$, como se muestra en la figura . Obsérvese que la elipse está trazada *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* ya que θ va de 0 a 2π.

El empleo de la técnica presentada en el ejemplo , permite concluir que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a\cos\theta \quad \text{y} \quad y = k + b\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

es una elipse (trazada en sentido contrario al de las manecillas del reloj) dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

La gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad y = k + b\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

también es una elipse (trazada en sentido de las manecillas del reloj) dada por

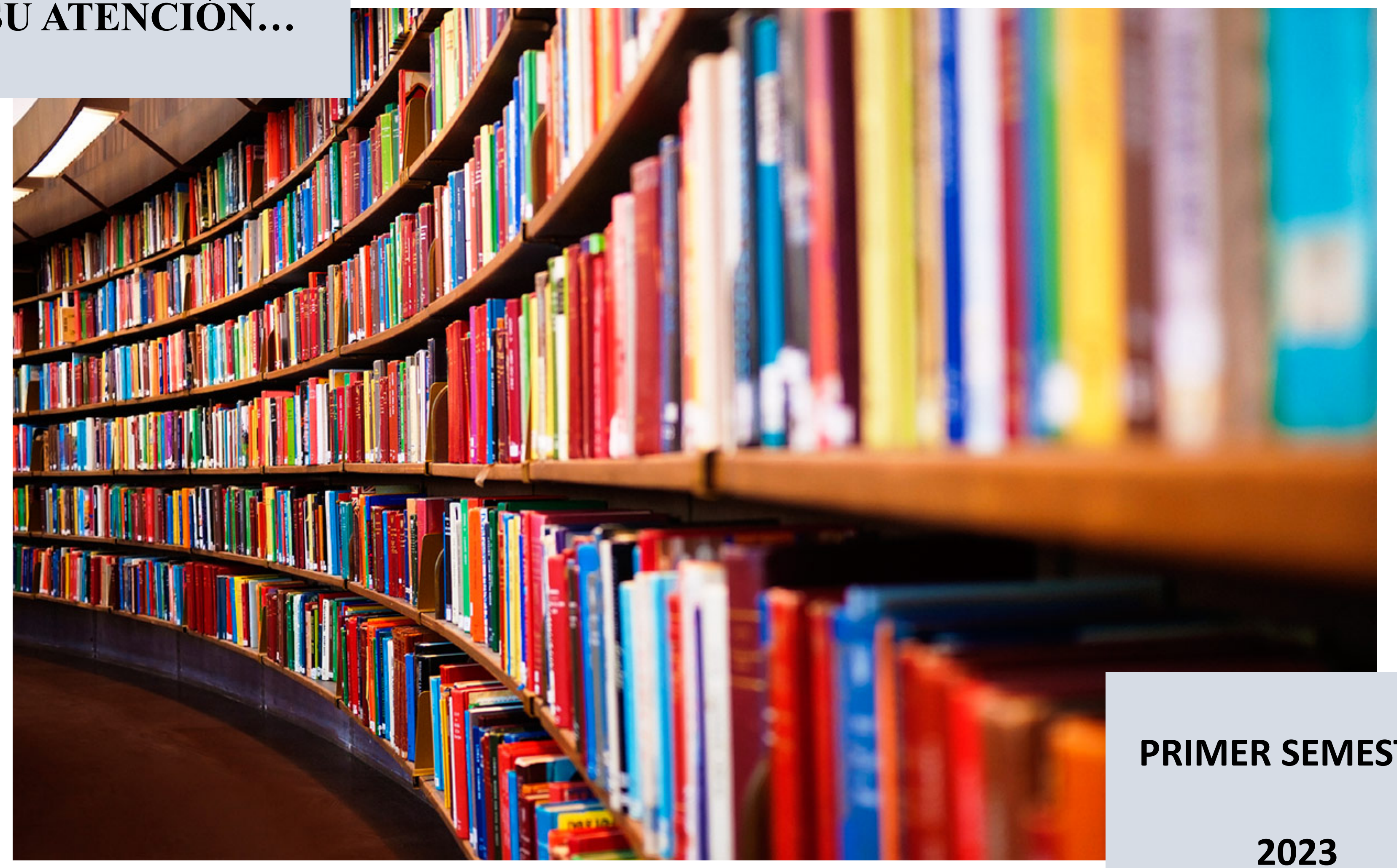
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Ejercicio Parametrizar la curva

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Ejemplo La gráfica de la cardioide $r = 1+\cos\theta$ se puede describir mediante las ecuaciones paramétricas

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



PRIMER SEMESTRE

2023