FACULTAD CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha

Aplicaciones de la integral: Área en coordenadas paramétricas

Cálculo Integral

I. M. P (2023)

Libros: Apuntes de Cálculo USM   Gruenberg, V. (2016)
Thomas_una_variable_13e_cap11.pdf
http://asignaturas.topografia.upm.es/matematicas/primero/Ejercicios/integrales/soluciones/sol-integrales.pdf

TEOREMA

Sean $f(t), g(t)$ funciones definidas en $[a,b]$ y derivables por tramos tales que

$$C:\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

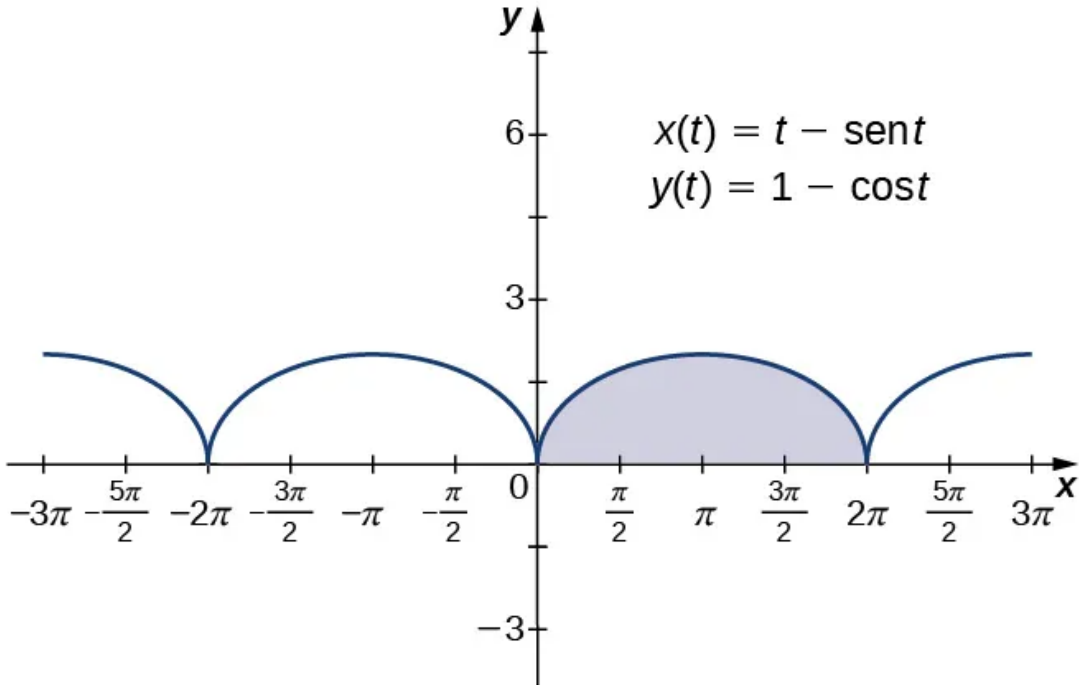
describe una curva cerrada simple orientada en sentido positivo. Entonces

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} dt = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\right) dt$$

es el área encerrada por la curva.

Integrales con ecuaciones paramétricas

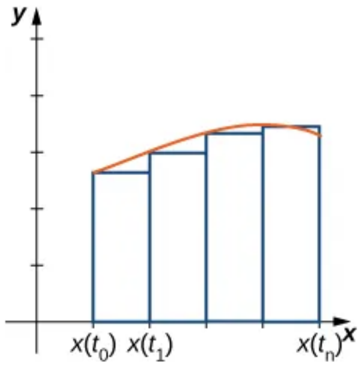
¿Cómo hallar el área bajo una curva definida paramétricamente? Recordemos la cicloide definida por las ecuaciones $x(t) = t - \operatorname{sen} t, \quad y(t) = 1 - \cos t$. Supongamos que queremos hallar el área de la región sombreada en el siguiente gráfico.



Para derivar una fórmula para el área bajo la curva definida por las funciones

$$x = x\left(t\right), \quad y = y\left(t\right), \quad a \leq t \leq b,$$

asumimos que $x(t)$ es creciente en el intervalo $t \in [a, b]$ y $x\left(t\right)$ es diferenciable y comienza con una partición igual del intervalo $a \leq t \leq b$. Supongamos que $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ y considere el siguiente gráfico.



Utilizamos rectángulos para aproximar el área bajo la curva. La altura del i−ésimo rectángulo es $y\left(t_{i-1}\right)$, por lo que una aproximación del área es

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i=1}^{n} y(t_{i-1})(x(t_i) - x(t_{i-1}))\\&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} y\left(t_{i-1}\right)\frac{(x(t_i)-x(t_{i-1}))}{(t_i - t_{i-1})}\left(t_i - t_{i-1}\right)\\&\to \textstyle\int_a^b y\left(t\right)x'\left(t\right)dt \text{ como máx.}\left\{\left(t_i - t_{i-1}\right)\right\} \to 0\end{aligned}$$

la función $y\left(t_{i-1}\right)\frac{(x(t_i)-x(t_{i-1})}{(t_i-t_{i-1})}$.

Entonces una suma de Riemann para el área es

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} y\left(x\left(\bar{t}_i\right)\right)\ \left(x\left(t_i\right) - x\left(t_{i-1}\right)\right).$$

Multiplicando y dividiendo cada área por $t_i - t_{i-1}$ da

Multiplicando y dividiendo cada área por $t_i - t_{i-1}$ da

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} y\left(x\left(\bar{t}_i\right)\right)\ \left(\frac{x\left(t_i\right) - x\left(t_{i-1}\right)}{t_i - t_{i-1}}\right)\left(t_i - t_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} y\left(x\left(\bar{t}_i\right)\right)\ \left(\frac{x\left(t_i\right) - x\left(t_{i-1}\right)}{\Delta t}\right)\Delta t.$$

Si tomamos el límite a medida que n se acerca al infinito da

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \int_a^b y\left(t\right) x'\left(t\right)\ dt.$$

Si los valores de x es una función decreciente para $a \leq t \leq b$, una derivación similar mostrará que el área viene dada por $-\int_a^b y\left(t\right)x'\left(t\right)dt \ = \int_a^b y\left(t\right)x'\left(t\right)dt$

TEOREMA

Área bajo una curva paramétrica

Considere la curva plana que no se interseca definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b$$

y asuma que $x(t)$ es diferenciable. El área bajo esta curva está dada por

$$A = \int_a^b y(t)\, x'(t)\; dt.$$

EJEMPLO

Cálculo del área bajo una curva paramétrica

Halle el área bajo la curva de la cicloide definida por las ecuaciones

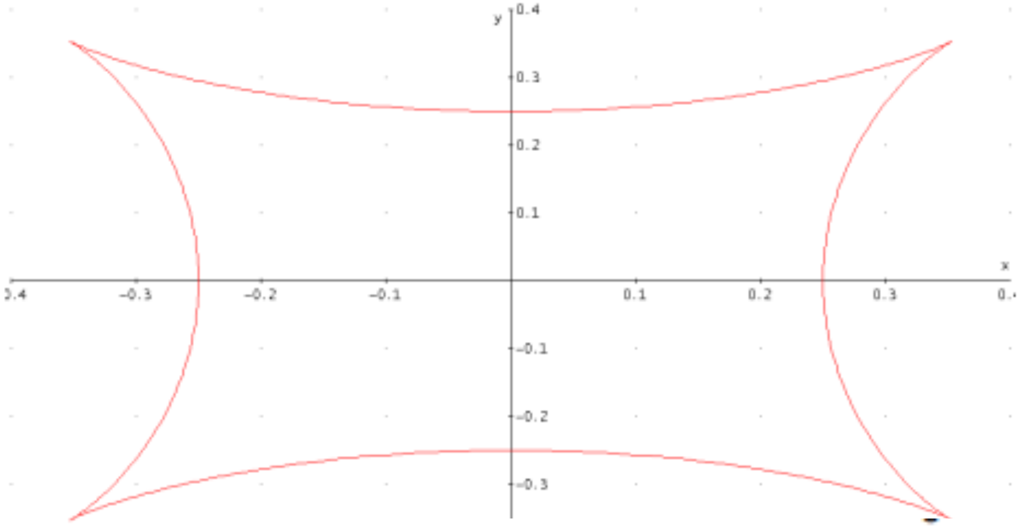
$$x(t) = t - \operatorname{sen} t, \quad y(t) = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b y(t)\, x'(t)\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t)\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt \\
&= \tfrac{3t}{2} - 2\operatorname{sen} t + \tfrac{\operatorname{sen} 2t}{4}\Big|_0^{2\pi} \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

2.- Calcular el *área* encerrada por la curva:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos(t)[2 - \cos(2t)]}{4} \\ y(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(t)[2 + \cos(2t)]}{4} \end{cases}$$

Solución:



Área:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t)\, dt$$

Obsérvese que por simetría es el doble y que los límites son entre π y 0.

$$2 \cdot \int_{\pi}^{0} y(t) \cdot x'(t)\, dt = \boxed{\frac{3\pi}{32}}\, \mathbf{u^2}$$

3. **Para la curva dada en forma paramétrica** $\begin{cases} x(t) = \ln(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases}$ **se pide, para el intervalo** $0 \le x \le 1$**:**

Área **encerrada entre la curva y el eje de abscisas en dicho intervalo.**

Solución:

Se representa la curva

Hay que ver a qué valores de t corresponde el intervalo dado sobre el eje OX.

Despejando $t = e^x$ por lo que el intervalo será

$t \in [e^0, e^1] \Leftrightarrow t \in [1, e]$

Campo de variación de t, cualquier valor de t del intervalo dado

No tiene sentido estudiar las simetrías pues en el intervalo dado, t es siempre t>0

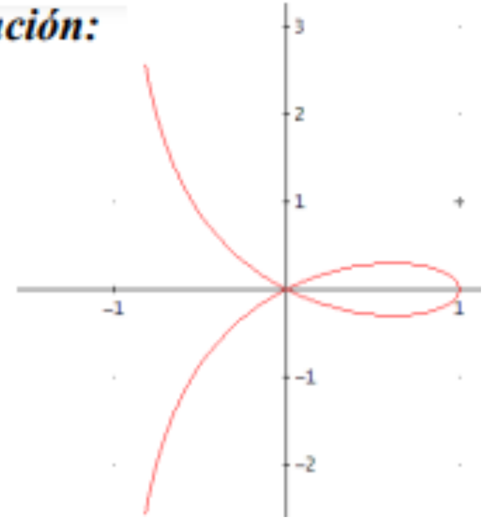
Puntos críticos

$$\boxed{A = \left[\frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{2e} \approx 1.17} u^2$$

Hallar el *área* del lazo de la estrofoide $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t)=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$

Solución:

a)



Obviamente el eje de simetría es el eje de abscisas. Buscamos los puntos de intersección con el eje de simetría:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=0 \\ y(t)=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}=0 \end{cases} \Rightarrow t=\pm 1 \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=1 \\ y(t)=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}=0 \end{cases} \Rightarrow t=0$$

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t)=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=-\dfrac{4t}{\left(1+t^2\right)^2} \\ y'(t)=-\dfrac{t^4+4t^2-1}{\left(1+t^2\right)^2} \end{cases}$$

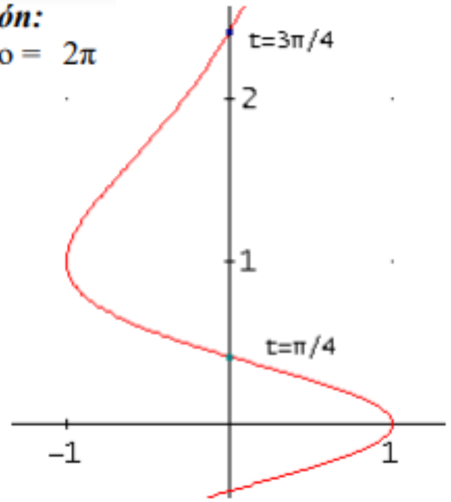
$$A=\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt=2\int_1^0 \frac{1-t^2}{1+t^2}\left(-\frac{t^4+4t^2-1}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt=\boxed{\frac{4-\pi}{2}}u^2$$

Dada la curva $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \text{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$.

a) Calcular el *área* encerrada por la curva y el eje OY en el segundo cuadrante ($x < 0$, $y > 0$).

Solución:

Período = 2π



Área 2º cuadrante:

$$\left\{ x(t) = \cos(2t) = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1 \\ y\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \text{tg}\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1 \end{cases} \right.$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \text{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2\,\text{sen}(2t) \\ y'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \text{tg}^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{1 + \cos t} \end{cases}$$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \left| x(t) \cdot y'(t) \right| dt = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left| \cos(2t) \cdot \frac{1}{1 + \cos t} \right| dt = \boxed{\pi - 2}\,u^2.$$

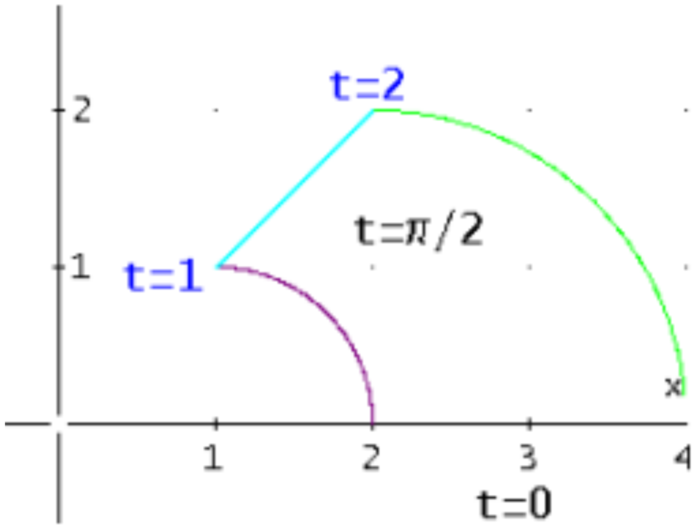
Hallar el *área* limitada por las curvas

$$\left.\begin{array}{l}x=1+\cos t\\ y=\operatorname{sen} t\end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l}x=2+2\cos t\\ y=2\operatorname{sen} t\end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l}x=t\\ y=t\end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l}x=t\\ y=0\end{array}\right\}$$

Buscamos los puntos de intersección entre las circunferencias y la bisectriz del primer cuadrante:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x=1+\cos t_1\\ y=\operatorname{sen} t_1\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}x=t_2\\ y=t_2\end{array}\right\}\end{array}\right\}\Rightarrow t_1=\frac{\pi}{2}\qquad\qquad \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x=2+2\cos t_1\\ y=2\operatorname{sen} t_1\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{l}x=t_2\\ y=t_2\end{array}\right\}\end{array}\right\}\Rightarrow t_1=\frac{\pi}{2}$$

Obviamente con el eje de abscisas resulta en los dos casos t=0.



En el caso de la recta $\left.\begin{array}{l}x=t\\ y=t\end{array}\right\}$ los límites son 1 y 2

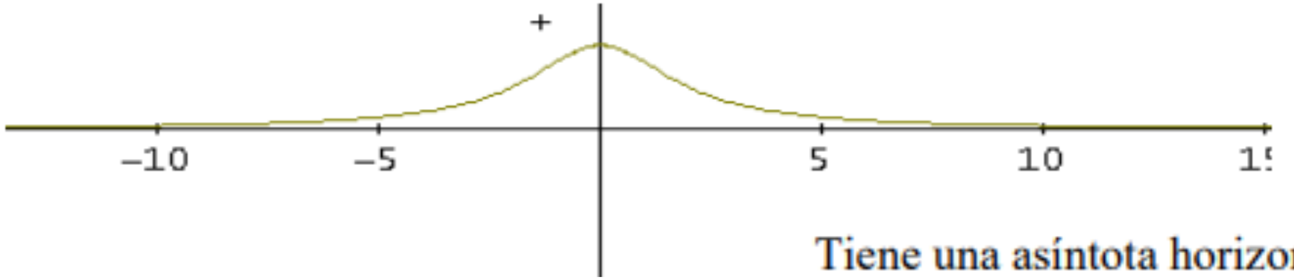
La fórmula a utilizar será: $A=\int_{t_0}^{t_1}\left|y(t)x'(t)\right|dt$

$$\left.\begin{array}{l}x(t)=t\\ y(t)=t\end{array}\right\}\Rightarrow x'(t)=1\Rightarrow I_1=\int_1^2 t\cdot 1\cdot dt=\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=1+\cos t\\ y=\operatorname{sen} t\end{array}\right\}\Rightarrow x'(t)=-\operatorname{sen} t\Rightarrow I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}$$

Estudiar si el *área* de la región comprendida entre la curva de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x(t) = 2\,tg(t) \\ y(t) = 2\cos^2(t) \end{array}\right\}$ **y su *asíntota* es finita o no.**

Solución



Tiene una asíntota horizontal que es el eje de abscisas (y=0) para $t=\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} 2tgt = \pm\infty; \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t = 0$$

Además, la curva es simétrica respecto del eje de ordenadas pues

$$\left.\begin{array}{l} x(-t) = 2\,tg(-t) = -2tg(t) = -x(t) \\ y(-t) = 2\cos^2(-t) = 2\cos^2(t) = y(t) \end{array}\right\}$$

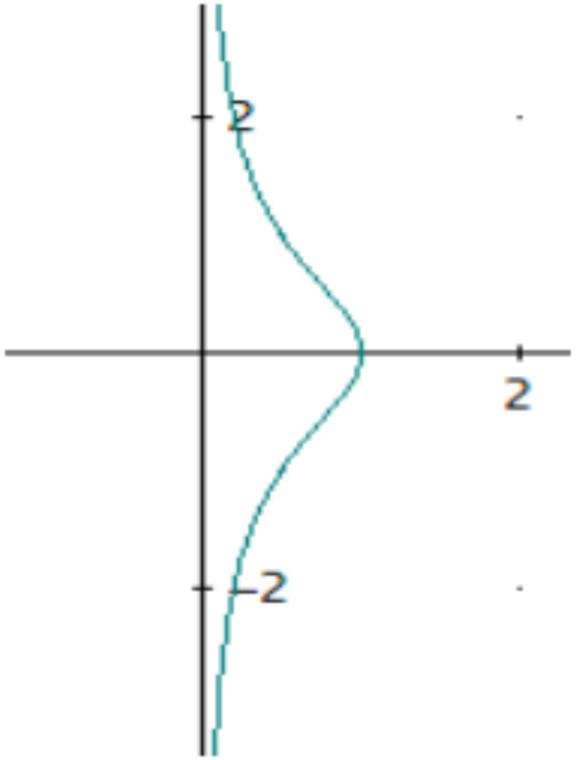
La fórmula a utilizar será: $A = \int_{t_0}^{t_1} |y(t)x'(t)|\,dt$

$$x'(t) = \frac{2}{\cos^2 t}$$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} |y(t)x'(t)|\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,\frac{2}{\cos^2 t}\,dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \boxed{4\pi}\,u^2$$

Hallar el área encerrada entre la curva $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$ y su asíntota.

Solución



$$\begin{cases} x = \cos^2 t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\, t) = \pm\infty \\ y = \operatorname{tg}\, t = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = \cos^2 0 = 1 \Rightarrow (1,0) \\ \pi \Rightarrow x = \cos^2 \pi = (-1)^2 = 1 \Rightarrow (1,0) \\ -\pi \Rightarrow x = \cos^2(-\pi) = 1 \Rightarrow (1,0) \end{cases} \end{cases}$$

Obviamente la asíntota es el eje de ordenadas (x=0)

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg}\, t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2\cos t \operatorname{sen} t \\ y' = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\cdot x'(t)\, dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = 2\int_0^{\pi/2} dt = \pi u^2$$

Hallar el área de las regiones acotadas por las siguientes curvas ($a > 0$)

a) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$ Resp: πab

b) $x = a\cos^3 t, \; y = b\sin^3 t$ Resp.: $3\pi ab/8$

c) $x = 2a\cos t - a\cos 2t, \; y = 2a\sin t - a\sin 2t$ Resp.: $6\pi a^2$

Graficar la curva plana que tiene ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \cos t \\ y & = & 1 + \sin t \end{array} \right. \text{ para } t \in [0, \pi]$$

$$\cup$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & l \\ y & = & 1 \end{array} \right. \text{ para } l \in [-1, 1]$$

y encontrar el área encerrada por esta curva. Resp.: $\pi/2$

Encontrar el área de la región limitada por el lazo de la curva

$$C : \begin{cases} x &= t^3 - 4t \\ y &= t^2 - 4 \end{cases}$$

Resp.: 256/15

Sea $a > 0$. Hallar el área limitada por la cicloide

$$\begin{cases} x &= a\,(t - \sin t) \\ y &= a\,(1 - \cos t) \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

y por el eje X entre dos puntos sucesivos de intersección de la curva con el eje X. Resp.: $3\pi a^2$

Si $a > 0$ Hallar el área limitada por el lazo del Folium de Descartes

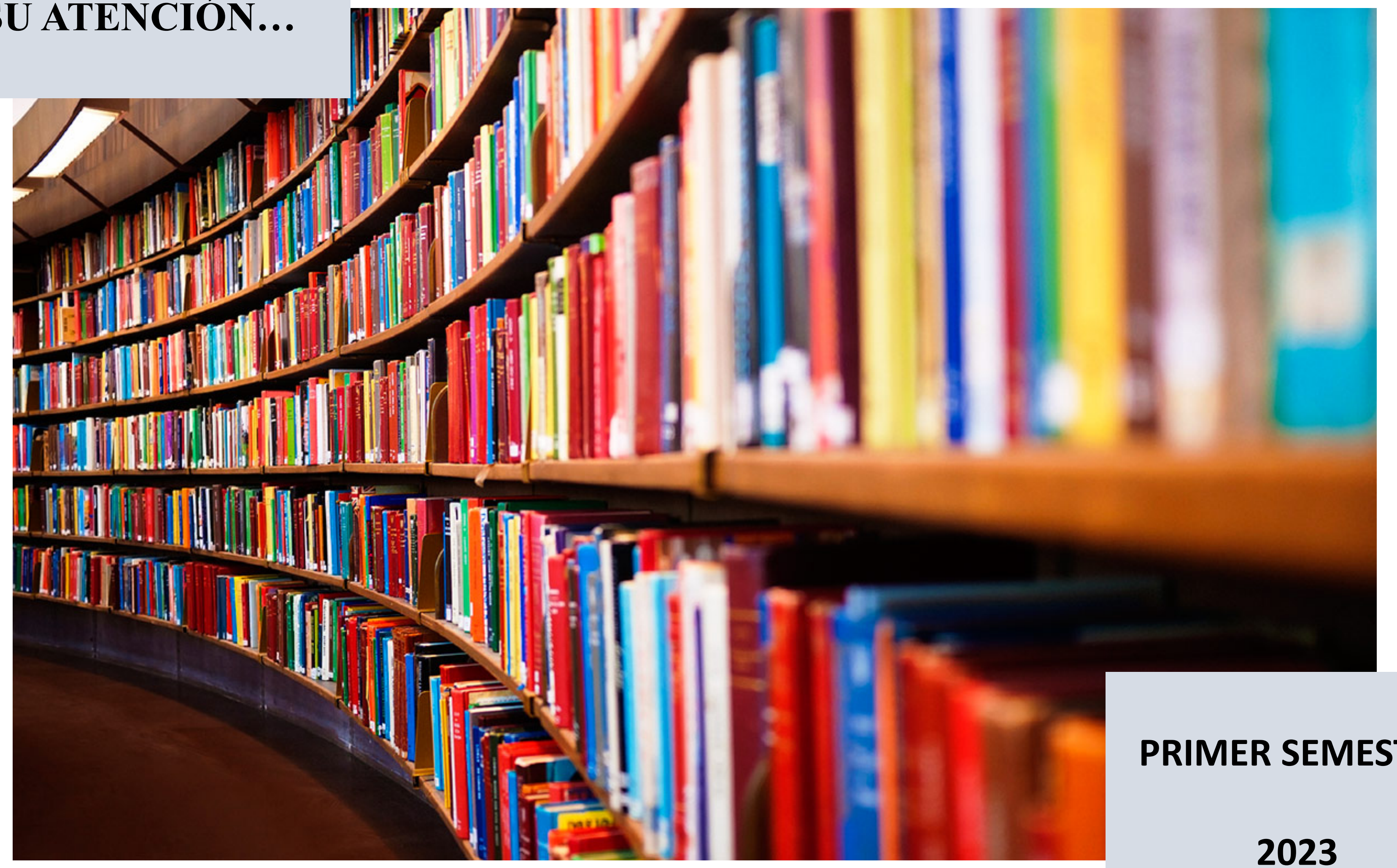
$$x^3 + y^3 = 3axy$$

Puede ser útil considerar

$$\begin{cases} x &= 3a\frac{t}{1+t^3} \\ y &= 3a\frac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad \text{para } t \neq -1$$

Resp: $\frac{3}{2}a^2$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



PRIMER SEMESTRE

2023