

Integral de Riemann II

Cálculo Integral

I. M. P (2023)



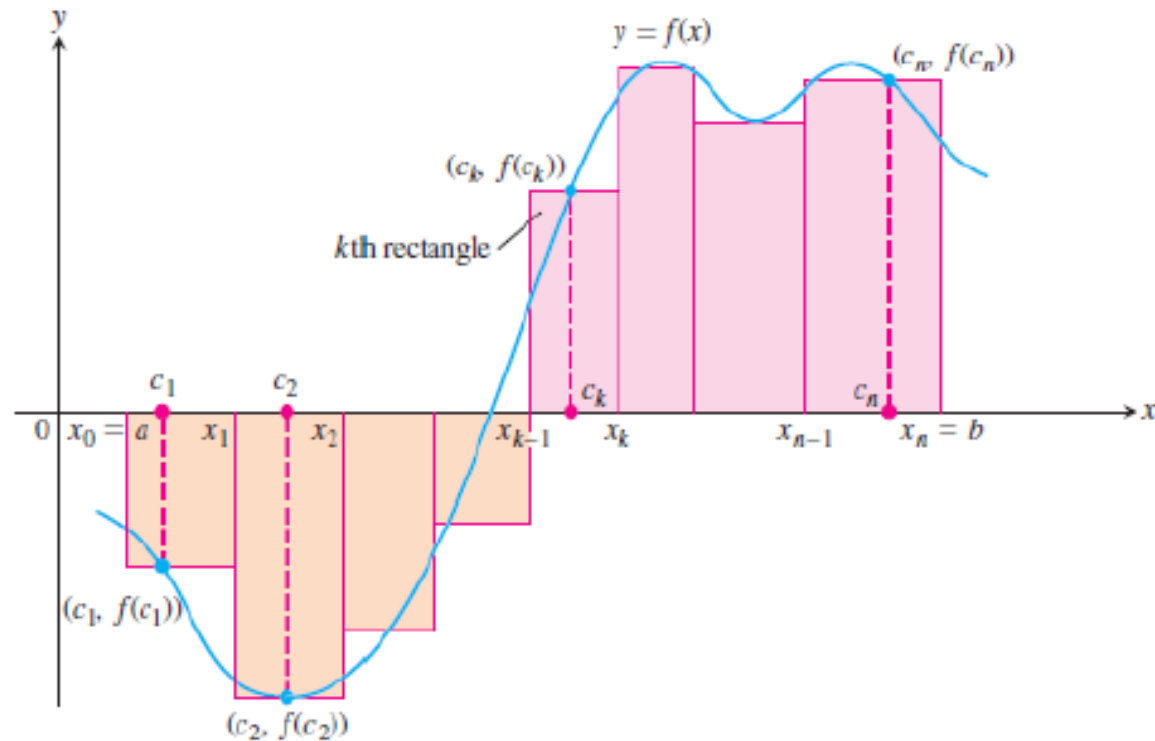
Libro: Apuntes de Cálculo USM Gruenberg, V. (2016)

La integral definida de Riemann

Definición Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\mathcal{P}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Una Suma de Riemann para la función f respecto de la partición $\mathcal{P}$ es una suma finita de la forma

$$S(f, \mathcal{P}, \varepsilon_i) = \sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k)(x_k - x_{k-1})$$

donde los $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$.



Observación

Cuando la función considerada es continua las sumas superiores e inferiores corresponden a sumas de Riemann.

Escribiremos

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}, \varepsilon_i) = L$$

para denotar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{P}$ es una partición con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ entonces $|S(f, \mathcal{P}, \varepsilon_i) - L| < \varepsilon$.

Teorema Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada entonces

$$1. \quad \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}) = \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

$$2. \quad \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \underline{s(f, \mathcal{P})} = \underline{\int_a^b f(x) dx}$$

$$3. \quad \text{Si } f \text{ es integrable en } [a, b] \text{ entonces } \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}, \varepsilon_i) = \int_a^b f(x) dx$$

Observación En los libros de cálculo se acostumbra a definir la integral de la siguiente forma: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Diremos que f es **integrable Riemann** si

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}, \varepsilon_i) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^r f(\varepsilon_i)(t_k - t_{k-1})$$

existe y no depende del tipo de particiones ni de los ε_i escogidos. En tal caso se denota

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}, \varepsilon_i) = \int_a^b f(x) dx$$

Sea $f : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{P}_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{nb}{n}\right\}$.

Verifique que
$$\int_0^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b}{n} f(kb/n)$$

La partición $\mathcal{P}_n$ es aritmética, y su norma es $\|\mathcal{P}_n\| = \frac{b}{n}$. Además,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Escogemos $c_k = x_k = \frac{bk}{n}$. Luego:

$$\int_0^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \lim_{\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{bk}{n}\right) \frac{b}{n}$$

Use lo anterior para evaluar:

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right)$$

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$$

$$\text{iii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{na} + \frac{1}{na+b} + \frac{1}{na+2b} + \cdots + \frac{1}{na+(n-1)b} \right)$$

$$\text{iv) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{3/n} + e^{6/n} + \cdots + e^{3n/n} \right)$$

i) Sea $f(x) = x^2$ y consideremos la partición $\mathcal{P}_n = \left\{ 0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{nb}{n} \right\}$.

$$\therefore f(c_k) = \left(\frac{bk}{n} \right)^2. \quad \text{Luego:}$$

$$b^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \left(\left(\frac{b}{n} \right)^2 + \left(\frac{2b}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{nb}{n} \right)^2 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{bk}{n}\right) \frac{b}{n} = \lim_{\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{bk}{n}\right) \frac{b}{n} = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right) = \frac{1}{3}$$

ii) Sea $f(x) = \sin x \Rightarrow f(c_k) = \sin\left(\frac{bk}{n}\right)$. Claramente, debemos escoger

$$b = \pi, \text{ de donde, } f(c_k) = \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{\pi}{n} \\ &= \int_0^{\pi} \sin x \, dx \end{aligned}$$

Así:

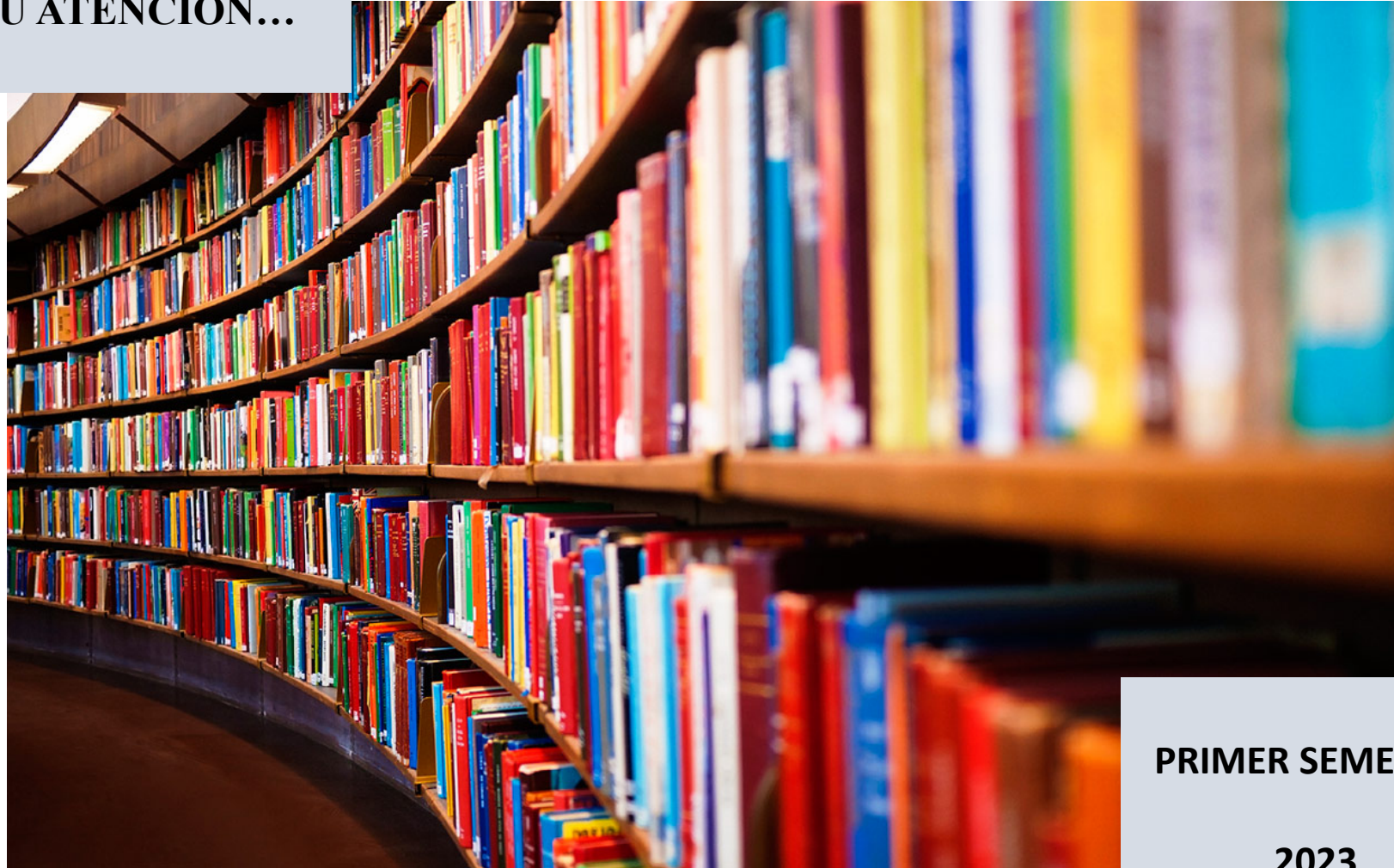
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$$

iii) Notamos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{na} + \frac{1}{na+b} + \frac{1}{na+2b} + \cdots + \frac{1}{na+(n-1)b} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{na+(k-1)b} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a + \left(\frac{k-1}{n}\right)b} \right) \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{a+bx} \, dx \end{aligned}$$

iv) Claramente, en este caso, $f(x) = e^{3x}$, y se procede análogamente.

...GRACIAS POR SU ATENCIÓN...



PRIMER SEMESTRE

2023