FACULTAD CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha

Integral de Riemann III

Cálculo Integral

I. M. P (2023)

Libro: Apuntes de Cálculo USM   Gruenberg, V. (2016)

La integral definida de Riemann

Propiedades de la integral definida

PROPOSICIÓN Sean $f\,,\ g : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ acotadas e integrables. Entonces:

1. $f \pm g$ es integrable, y además $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces αf es integrable y $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA Si $f(x)=0 \quad \forall x \in [a,b]$, salvo un número finito de puntos, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

COROLARIO Sean f, g dos funciones definidas en $[a,b]$ tales que f es integrable y $f(x) \neq g(x)$ sólo en un número finito de puntos (o, $f(x)=g(x)$ c.t.p.). Entonces, g es integrable y, más aún:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

TEOREMA Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotadas e integrables. Entonces:

1. Si $f(x) \geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

2. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, salvo quizás en un conjunto finito de puntos, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

3. $|f(x)|$ es integrable y se cumple:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

4. Si $m \leq f(x) \leq M$, salvo quizás un conjunto finito de puntos, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Ejemplo

Muestre que $\quad 0{,}5 \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(4-x^2)}} \leq 0{,}6$

Solución:

La función en el integrando está definida para $\quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Luego:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{4} & \leq & (1-x^2)(4-x^2) & \leq & 4 \\
\frac{3}{4}\sqrt{5} & \leq & \sqrt{(1-x^2)(4-x^2)} & \leq & 2 \\
\frac{1}{2} & \leq & \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}} & \leq & \frac{4}{3\sqrt{5}} \leq \frac{6}{10}
\end{array}$$

PROPOSICIÓN **(Aditividad)** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Para todo $c \in [a, b]$, f es integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$. Además se cumple:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

El recíproco también es válido, es decir, si f es integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ para algún $c \in [a, b]$ entonces $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y vale la igualdad anterior.

DEFINICIÓN Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Definimos

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

PROPOSICIÓN Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable. Dados $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ cualesquiera y sin importar el orden entre ellos, se cumple:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

EJEMPLOS:

Suponga que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5, \qquad \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2 \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7. \qquad \text{Entonces}$$

a) $\displaystyle\int_{4}^{-1} f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2f(x) - 3h(x))\,dx$

2. Calcular $\displaystyle\int_0^4 2^{[x]} dx$ donde $[x]$ denota la parte entera de x.

$$\int_0^4 2^{[x]} dx = \int_0^1 2^{[x]} dx + \int_1^2 2^{[x]} dx + \int_2^3 2^{[x]} dx + \int_3^4 2^{[x]} dx =$$

$$= \int_0^1 2^0 dx + \int_1^2 2^1 dx + \int_2^3 2^2 dx + \int_3^4 2^3 dx = 1+2+4+8 = 15$$

3. Calcular $\displaystyle\int_1^3 \left[x^2\right] dx.$

Notemos que:

$$[x^2] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2 & \text{si} \quad \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \\ 3 & \text{si} \quad \sqrt{3} \le x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2 \le x < \sqrt{5} \\ 5 & \text{si} \quad \sqrt{5} \le x < \sqrt{6} \\ 6 & \text{si} \quad \sqrt{6} \le x < \sqrt{7} \\ 7 & \text{si} \quad \sqrt{7} \le x < \sqrt{8} \\ 8 & \text{si} \quad \sqrt{8} \le x < 3 \end{cases}$$

Criterios de Integrabilidad

TEOREMA Sea $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ monótona; entonces f es integrable en $[a\,,b]$.

TEOREMA Sea $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continua; entonces f es integrable en $[a\,,b]$.

TEOREMA Sea $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continua por trazos, y sean $x_0, x_1, \ldots x_n$ los puntos de discontinuidad de f. Entonces f es integrable en $[a\,,b]$ y se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$$

TEOREMA: **(Teorema del Valor Medio para Integrales)** Sea f una función continua sobre el intervalo $[a,b]$; entonces:

$$\exists c \in [a,b]: \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Teorema Fundamental del Cálculo

DEFINICIÓN Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, integrable. Llamaremos **Integral Indefinida de** f a la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

PROPOSICIÓN Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada e integrable entonces F es continua.

Teorema Fundamental del Cálculo

TEOREMA **(Teorema Fundamental del Cálculo)** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua; entonces la integral indefinida F de f es derivable en $x_0 \in [a, b]$ y, más aún

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

OBSERVACIÓN: Otras maneras de escribir este resultado son:

- $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'\Big|_{x=x_0} = f(x_0)$
- $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)\Big|_{x=x_0} = f(x_0)$

EJEMPLOS:

1. $\left(\int_0^x \sqrt[3]{1+t^5}\,dt\right)'$:

2. Sea $f(x)=\int_1^x x^3 \arctan(t^2)\,dt$. Calcule $f''(1)$.

TEOREMA **(Regla de Barrows o Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y sea g una primitiva de f en $[a,b]$; entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

EJEMPLOS:

1. $\displaystyle\int_0^\pi \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^\pi = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0$

2. $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1-(-1) = 2$

3. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{2}{3}(2x+1)^{3/2}\frac{1}{2}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1)\Big|_0^2 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \ln\left(1+\operatorname{sen}^2(x)\right)\Big|_0^{\pi/2} = \ln(2)$

PROPOSICIÓN Si $f(x)$ es continua y $g(x)$, $h(x)$ son derivables en el intervalo $[a, b]$ entonces se cumple:

1. $\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$
2. $\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$

EJEMPLOS:

1. $\left(\int_{x^3}^{\cos x} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt\right)'$

2. Si $x^3+2x=\int_0^{x^3} f(t)\,dt$, calcular $f(3)$.

3. Determinar todas las funciones $y = f(x)$ tal que

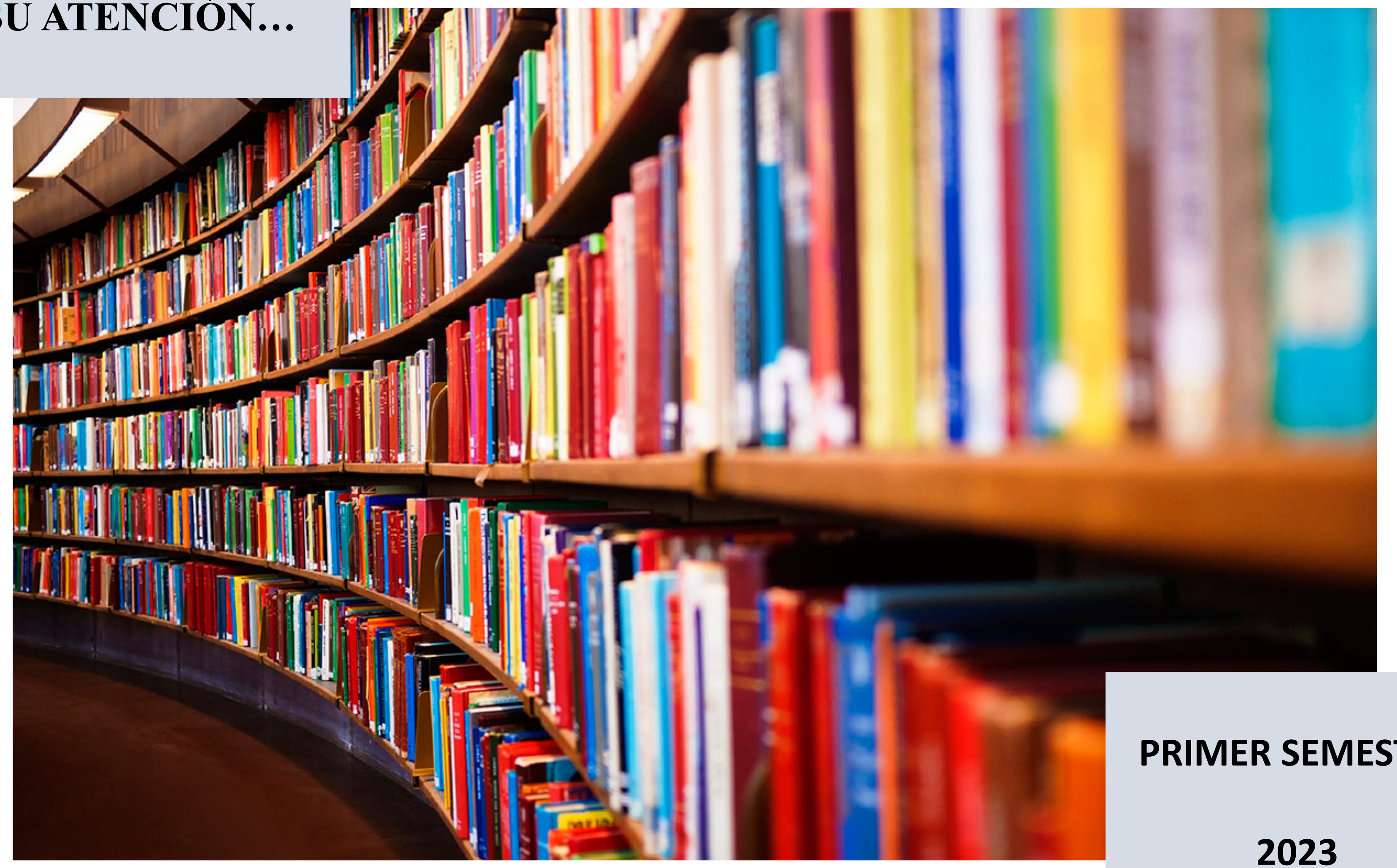
$$y(x)+\int_0^x y(t)\,dt+3=0$$

Encuentre $\frac{dy}{dx}$, donde y está dado implícitamente por

$$\int_0^y e^t\,dt + \int_0^x \cos t\,dt = 0$$

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{arcsen} t\,dt}{x\tan x}$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



PRIMER SEMESTRE

2023