

Integral de Riemann I

Cálculo Integral

I. M. P (2023)



Libro: Apuntes de Cálculo USM Gruenberg, V. (2016)

La integral definida de Riemann

Definición Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado. Diremos que $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ si se cumple

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Observación Notar que $\mathcal{P}$ tiene $n + 1$ elementos y determina n subintervalos de $[a, b]$ de la forma $[x_{i-1}, x_i]$.

usaremos la notación $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y llamaremos norma de la partición $\mathcal{P}$ al número

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{\Delta x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

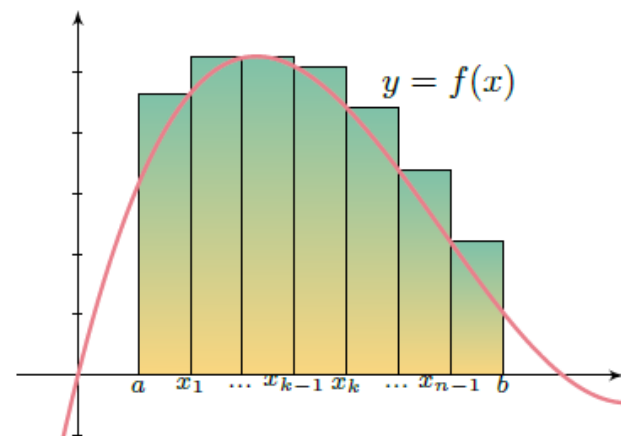
Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$. Para $i = 1, \dots, n$ denotaremos por

$$\begin{aligned} m_i &= \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i &= \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

(Como $[a, b] \neq \emptyset$ y f es acotada se sigue que para cada i el conjunto $\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ es no vacío y acotado, por ende existen su ínfimo y supremo).

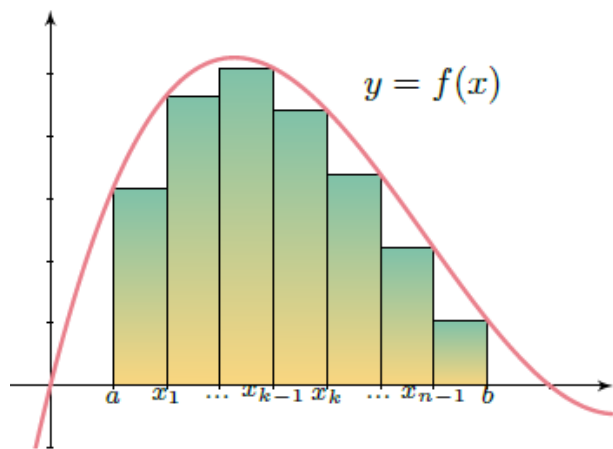
Definición Si $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es partición de $[a, b]$ se define la suma superior de f asociada a la partición $\mathcal{P}$ como el número

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$



de manera similar se define la suma inferior de f asociada a la partición $\mathcal{P}$ como el número

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$



Proposición Para cada $\mathcal{P}$ partición de $[a, b]$ se cumple $s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$
En efecto, para cada i se cumple $m_i \leq M_i$. Se sigue

$$m_i \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Si $\mathcal{P}$ es una partición de $[a, b]$ y agregamos otro punto de $[a, b]$ a la partición, digamos $x_{i_0-1} < x_\xi < x_{i_0}$, entonces formamos una partición $\mathcal{P}'$ del mismo intervalo que tiene la propiedad $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ además

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}')$$

y

$$S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P})$$

Corolario Si $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ entonces

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}_1) &\leq s(f, \mathcal{P}_2) \\ S(f, \mathcal{P}_2) &\leq S(f, \mathcal{P}_1) \end{aligned}$$

Corolario *Si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos particiones arbitrarias de $[a, b]$ entonces*

$$m(b-a) \leq s(f, \mathcal{P}_1) \leq S(f, \mathcal{P}_2) \leq M(b-a)$$

Tomar la partición $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ para la desigualdad

$$s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}_2)$$

Definición Llamaremos integral inferior de f en el intervalo $[a, b]$ al número real

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ particiones de } [a, b]\}$$

de manera similar se define la integral superior de f en el intervalo $[a, b]$ como el número

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ particiones de } [a, b]\}$$

Observación Notar que los resultados anteriores garantizan la existencia de tales números, además podemos decir

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

Definición Diremos que f es Riemann integrable si se cumple

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

y en tal caso escribiremos

$$\int_a^b f(x) dx$$

para el número en común.

Ejemplo Las funciones constantes son integrables.

Ejemplo La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

no es integrable.

Teorema . Considere una sucesión de particiones $\mathcal{P}_n$ de un intervalo $[a, b]$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_n\| = 0$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S(f, \mathcal{P}_n) - s(f, \mathcal{P}_n)) = 0$$

Entonces f es integrable en $[a, b]$ más aún

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{P}_n) = \int_a^b f(x) dx$$

Entonces f es integrable en $[a, b]$ más aún

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{P}_n) = \int_a^b f(x) dx$$

En efecto, para todo n se cumpliría

$$s(f, \mathcal{P}_n) \leq \underline{\int_a^b} f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx \leq S(f, \mathcal{P}_n)$$

entonces

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx - \underline{\int_a^b} f(x) dx \leq S(f, \mathcal{P}_n) - s(f, \mathcal{P}_n)$$

de donde obtenemos lo deseado al tomar el límite.

Ejemplo $f(x) = x$ es integrable en $[a, b]$ además

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

En efecto Considere las particiones aritméticas de $[a, b]$

$$\mathcal{P}_n = \left\{ x_i = a + i \frac{b-a}{n} : i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

entonces como f es creciente se sigue que

$$\begin{aligned} m_i &= \inf \{ x : x \in [x_{i-1}, x_i] \} = x_{i-1} \\ M_i &= \sup \{ x : x \in [x_{i-1}, x_i] \} = x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n x_{i-1} \left(\frac{b-a}{n} \right) \\
&= \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{i=1}^n \left(a + (i-1) \frac{b-a}{n} \right) \\
&= \left(\frac{b-a}{n} \right) \left(an + \frac{(n-1)n}{2} \frac{b-a}{n} \right) \\
&= \left(\frac{b-a}{n} \right) \left(\frac{1}{2} (a-b + an + bn) \right) \\
&= -\frac{(b-a)^2}{2n} + \frac{b^2 - a^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{P}_n) = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

se sigue que

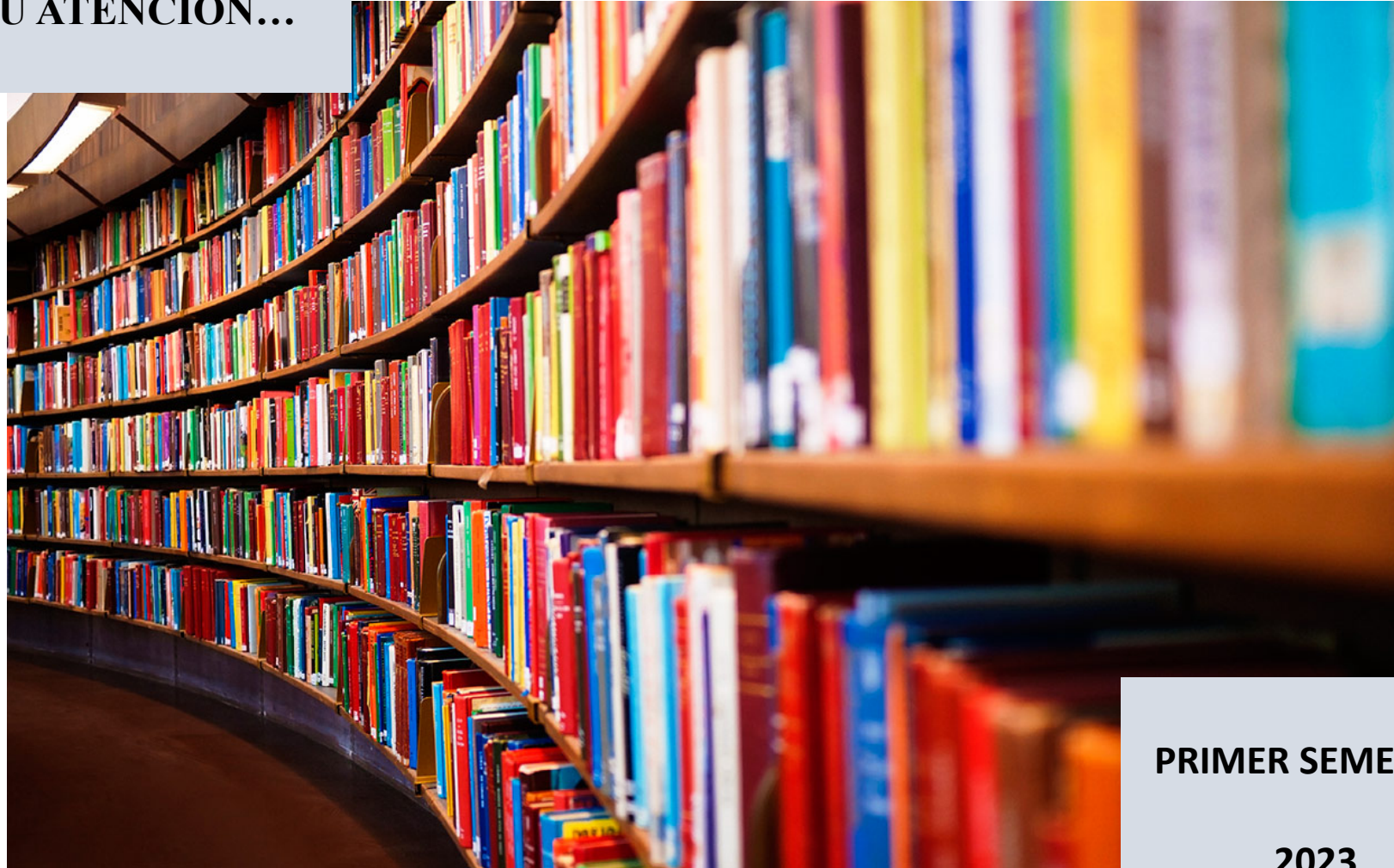
$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

De manera similar

$$\begin{aligned}
S(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{b-a}{n} \right) \\
&= \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{i=1}^n \left(a + i \frac{b-a}{n} \right) \\
&= \left(\frac{b-a}{n} \right) \left(\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} n \right) \\
&= \frac{(b-a)^2}{2n} + \frac{b^2 - a^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}_n) = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

...GRACIAS POR SU ATENCIÓN...



PRIMER SEMESTRE

2023