FACULTAD CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha

Integral de Riemann IV

Cálculo Integral

I. M. P (2023)

Libro: Apuntes de Cálculo USM   Gruenberg, V. (2016)

TEOREMA **(Sustitución en integrales definidas)** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y sea $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ con derivada φ' continua y tal que: $\varphi(c)=a,\ \varphi(d)=b$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx$$

EJEMPLOS:

1. Evalúe la integral definida: $\displaystyle\int_0^2 x e^{x^2}\, dx$

   Solución: Consideramos el cambio de variable $u = x^2$ con $x \in [0,2] \Rightarrow du = 2x\,dx$.
   Luego, $x=0 \Leftrightarrow u=0$ y $x=2 \Leftrightarrow u=4$.

   Entonces:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x e^{x^2}\, dx &= \int_0^4 \frac{1}{2} e^u\, du = \frac{1}{2} e^u \Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - e^0)\\ &= \frac{1}{2}(e^4 - 1)\end{aligned}$$

2. ¿Es posible realizar la sustitución $x = \sec t$ en la integral $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx$?

   Solución: No es posible ya que $\sec t \geq 1$ y el intervalo de integración es $[0,1]$.

3. Demuestre que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx$$

Aplique esta propiedad para calcular

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

Solución: Hacemos el cambio de variable: $u = \pi - x \quad \Rightarrow \quad du = -dx$:

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - u) f(\operatorname{sen}(\pi - u))\, du = \int_0^{\pi} \pi f(\operatorname{sen} u)\, du - \int_0^{\pi} u f(\operatorname{sen} u)\, du$$

donde hemos usado que $\operatorname{sen}(\pi - u) = \operatorname{sen} u$. Luego:

$$2\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \pi \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} u)\, du \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} u)\, du$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}\arctan(t)\Big|_1^{-1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

4. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, tal que $f(x) = f(a+b-x)$. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = M$, determine $\displaystyle\int_a^b x f(x)dx$.

Solución:

$$\int_a^b x f(x)dx \underbrace{=}_{u=a+b-x} \int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)(-du) = \int_a^b (a+b-u)f(u)du$$

$$= \int_a^b (a+b)f(u)du - \int_a^b u f(u)du = (a+b)M - \int_a^b u f(u)du$$

$$\therefore \quad 2\int_a^b x f(x)dx = (a+b)M \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b x f(x)dx = \frac{(a+b)M}{2}$$

Ejercicios:

1. Pruebe que $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx.$

2. Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y considere $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ una función continua.

   a) Muestre que si f es impar entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

   b) Muestre que si f es par entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

3. Aplique lo anterior para calcular:

   a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \operatorname{sen}(5x)\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\,dx$

Teorema **(Integración por partes en integrales definidas)** Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciables y tales que f' y g' son integrables en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

EJEMPLOS:

1. Calcular $\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$

   Sean $f, g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ tales que,

   $$f(x) = x,\ g'(x) = \cos(x)\,dx. \quad \text{Entonces } f'(x) = dx, \text{ y } g(x) = \operatorname{sen}(x)$$

   Luego, integrando por partes:

   $$\begin{aligned}
   \int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx &= x\operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx \\
   &= x\operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\pi} + \cos(x)\Big|_0^{\pi} \\
   &= (\pi\operatorname{sen}(\pi) - 0\operatorname{sen}(0)) + (\cos(\pi) - \cos(0)) = -2
   \end{aligned}$$

2. Sea f una función con primera derivada continua en $[0,1]$. Si se sabe que $f(0)=4$ y $f(2)=9$, calcule:

$$\int_0^1 f^2(2x)\cdot f'(2x)\,dx$$

Solución: Integramos por partes, con $u=f^2(2x)$, $dv=f'(2x)\,dx$ de donde $v=\frac{f(2x)}{2}$.

Luego:

$$I=\int_0^1 f^2(2x)\cdot f'(2x)\,dx=f^2(2x)\cdot\frac{f(2x)}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 4f^2(2x)\cdot f'(2x)\,dx=$$

$$=\frac{f^3(2x)}{2}\Big|_0^1-2I=\frac{f^3(2)}{2}-\frac{f^3(0)}{2}-2I=\frac{9^3}{2}-\frac{4^3}{2}-2I$$

$$\therefore\qquad I=\frac{9^3-4^3}{6}$$

3. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$, calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}\,dx$.

Solución: Integramos por partes, con $u = \arctan x$, $dv = \dfrac{dx}{x+1}$ de donde $v = \ln(x+1)$.

Luego:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}\,dx = \arctan x \ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

4. Si $\quad I_n = \int_0^1 \frac{(x+1)^2-2}{(x^2+1)^n}dx \quad$ y $\quad J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$:

i) Calcular I_1.

ii) Calcular I_2.

iii) Demuestre que $\quad I_n = \frac{1-2^{1-n}}{n-1} + J_{n-1} - 2J_n$.

Solución:

i) $$I_1 = \int_0^1 \frac{(x+1)^2-2}{(x^2+1)}dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)}dx = \int_0^1 \left(1+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= x+\ln(x^2+1) - 2\arctan x\Big|_0^1 = 1+\ln 2 - \frac{\pi}{2}$$

ii) $$I_2 = \int_0^1 \frac{(x+1)^2-2}{(x^2+1)^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx + \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx + \left(-\frac{1}{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx + \frac{1}{2}$$

Para calcular la integral restante, hacemos el cambio de variable:

$u = \arctan x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{1+x^2}$ de donde $(x=0 \quad \Rightarrow \quad u=0) \quad \wedge \quad \left(x=1 \quad \Rightarrow \quad u=\frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/4} -2\cos u\,du = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

iii) $I_n=\int_0^1\frac{(x+1)^2-2}{(x^2+1)^n}dx=\int_0^1\frac{x^2-1}{(x^2+1)^n}dx+\int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^n}dx=$

$$=\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}-\int_0^1\frac{2\,dx}{(x^2+1)^n}+\int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^n}dx=J_{n-1}-2J_n+\int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^n}dx=$$

$$=J_{n-1}-2J_n+\left.\frac{(x^2+1)^{1-n}}{1-n}\right|_0^1=J_{n-1}-2J_n+\frac{1-2^{1-n}}{n-1}$$

fórmula de Wallis:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots n}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{32}$$

Sea $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{t+1}dt$, si $x>0$. Calcule $f(x)+f(1/x)$. Calcule además esta suma para $x=2$.

Solución:

Tenemos que $f(1/x)=\int_1^{1/x} \frac{\ln t}{t+1}dt$ y debemos calcular entonces:

$$f(x)+f(1/x)=\int_1^x \frac{\ln t}{t+1}dt+\int_1^{1/x} \frac{\ln t}{t+1}dt$$

Analicemos la segunda integral:

$$\int_1^{1/x} \frac{\ln t}{t+1}dt \underset{t=\frac{1}{u}}{=} -\int_1^x \frac{\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}+1}\cdot\frac{1}{u^2}du=\int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}du$$

Luego:

$$f(x)+f(1/x)=\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t(1+t)}+\frac{\ln t}{t+1}\right)dt=\int_1^x \frac{\ln t(1+t)}{t(1+t)}dt=\int_1^x (\ln t)t^{-1}\,dt$$

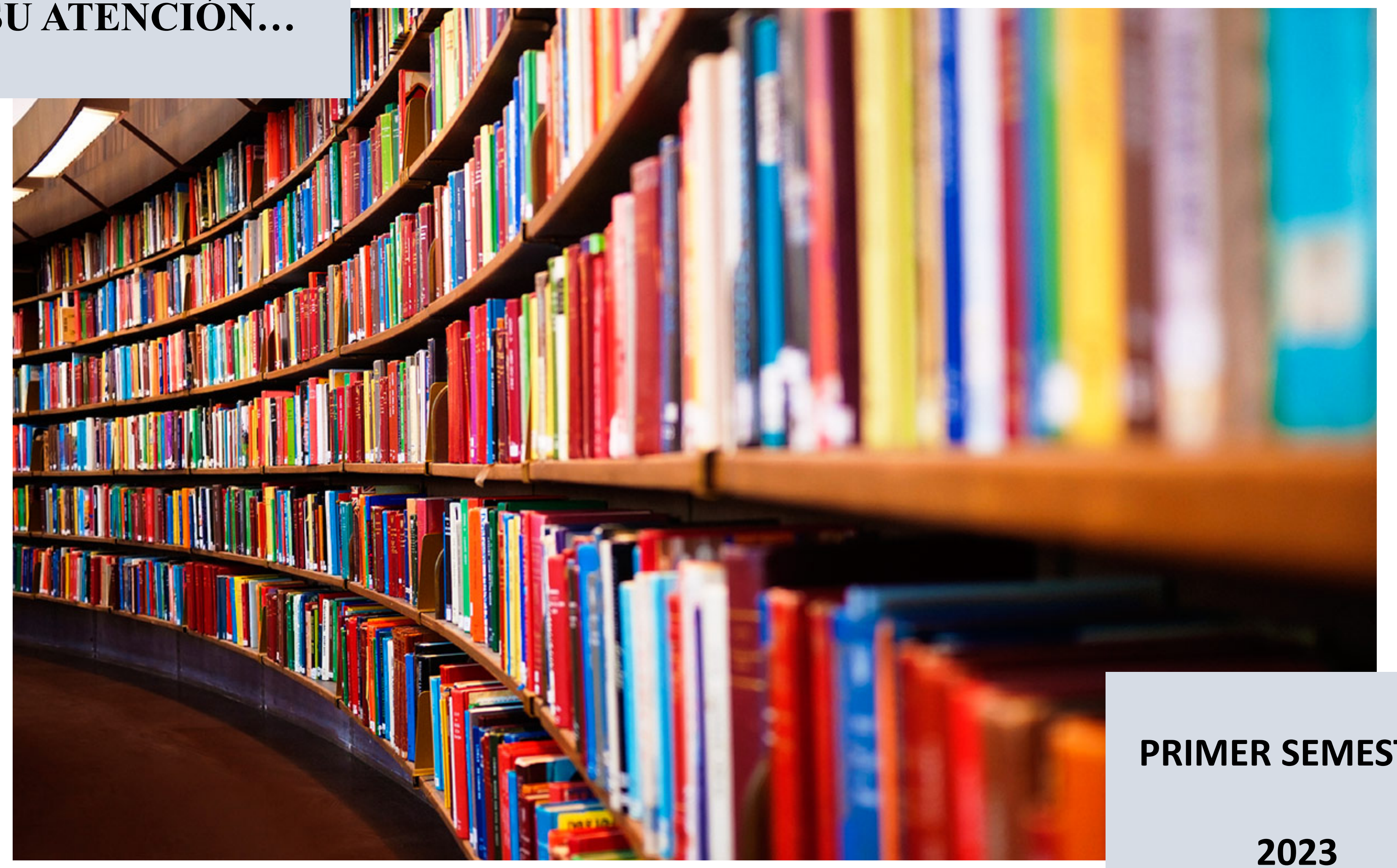
Calculamos esta última integral por partes:

$$I=\int_1^x \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{t^{-1}\,dt}_{dv}=\ln t\cdot\ln t\Big|_1^x-\int_1^x t^{-1}\ln t\,dt=\ln^2 x-I$$

$$\therefore \quad I=\frac{1}{2}\ln^2 x \qquad \text{de donde} \qquad f(x)+f(1/x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

En particular, si $x=2$: $\quad f(2)+f(1/2)=\frac{1}{2}\ln^2 2.$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



PRIMER SEMESTRE

2023