

La Antiderivada

Cálculo Integral



Libro: Apuntes de Cálculo USM Gruenberg, V. (2016)

Antiderivadas o Primitivas de una función

DEFINICIÓN

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Una primitiva (o antiderivada) de f en A es una función $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $g'(x) = f(x) \forall x \in A$, excepto a lo más en un número finito de puntos.

EJEMPLOS:

1. Una primitiva para la función $f(x) = \text{sen}(x)$ es $g(x) = -\cos(x)$. Otra primitiva para esta función es $h(x) = -\cos(x) + k$ cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$.

En efecto, basta derivar y comprobar: $(-\cos(x) + k)' = -(-\text{sen}(x)) = \text{sen}(x)$

2. Una primitiva para la función $f(x) = 2x$ es $g(x) = x^2 + C$.
3. Una primitiva para la función $f(x) = 2x + 3$ es $g(x) = x^2 + 3x + C$.

4. Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$. Para encontrar una primitiva para la función $\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$ notamos que no hay ninguna función cuya derivada sea igual a χ_I , $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, esta función posee una antiderivada:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ x - a & \text{si } a \leq x \leq b \\ b - a & \text{si } x > b \end{cases}$$

Vemos que g es continua en $\mathbb{R}$, y que es diferenciable allí, excepto en $x = a \wedge x = b$.

5. Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 0 \\ x^2-3 & x > 0 \end{cases}$$

Una primitiva para $f(x)$ es la función **OBSERVACIÓN:**

,

Es claro, de los ejemplos anteriores, que las primitivas no son únicas. Más aún, si g es una antiderivada de f , entonces $g + C$, $C = \text{cte.}$ también es una antiderivada de f , es decir:

\quad \quad \quad

Otra primitiva es

$$g_2(x) = \begin{cases} x^2 + x + 5 & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{3} - 3x + 5 & x > 0 \end{cases}$$

Observar que ni $g_1(x)$ ni $g_2(x)$ son derivables en $x = 0$.

PROPOSICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si g es una primitiva de f en A entonces $g(x) + C$ es una primitiva de f .

PROPOSICIÓN Si A es un **intervalo** y g, h son primitivas de f entonces $h(x) = g(x) + C$ para algún $C \in \mathbb{R}$.

Dem. Basta probar que la función $j = h - g$ es constante en el intervalo A . Como h y g son antiderivadas, en particular son continuas, $\therefore j$ es continua en A .

Por el mismo motivo, $j'(x) = h'(x) - g'(x) = f(x) - f(x) = 0$ excepto, a lo más, en un número finito de puntos.

Sean $a, b \in A$ arbitrarios, y denotemos por $x_1, \dots, x_{n-1}$ a los puntos ordenados en $]a, b[$ donde h, g no son derivables. Sea $x_0 = a \wedge x_n = b$.

Como j es continua en el intervalo $[x_0, x_1]$ y diferenciable en $]x_0, x_1[$, tenemos, por el Teorema del Valor Medio que:

$$\exists c \in]x_0, x_1[: \quad j(x_1) - j(x_0) = j'(c)(x_1 - x_0)$$

Como $j'(c) = 0$, se tiene que $j(x_1) = j(x_0)$. Aplicando el mismo razonamiento a todos los intervalos $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, obtenemos

$$j(a) = j(x_0) = j(x_1) = \dots = j(x_n) = j(b)$$

Como a, b se eligieron arbitrariamente en el intervalo A , se tiene que j es constante en A .

OBSERVACIÓN: La hipótesis que la función esté definida en un **intervalo** es muy importante. Considere $D = \mathbb{R} - \{0\}$ y las funciones $g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 5 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{x} - 8 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Claramente, g y h son antiderivadas de $f(x) = -\frac{1}{x^2}$. Pero,

$$g(x) - h(x) = \begin{cases} -5 & \text{si } x > 0 \\ 8 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

que **no** es una función constante. Esto sucede porque D **no** es un intervalo.

^

Notación: Escribimos $\int f(x) dx = g(x) + C$ para indicar la «familia» de todas las primitivas de f .

Tabla de Primitivas

- 1.- $\int dx = x + C$
- 2.- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \forall a \neq -1$
- 3.- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$
- 4.- $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$
- 5.- $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$
- 6.- $\int \tan x dx = -\ln(|\cos x|) + C$
- 7.- $\int \cotg x dx = \ln(|\operatorname{sen} x|) + C$
- 8.- $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$
- 9.- $\int \sec(x)\tan(x) dx = \sec(x) + C$
- 10.- $\int e^x dx = e^x + C$
- 11.- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x) + C$
- 12.- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctan}(x) + C$

PROPOSICIÓN Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces:

$$\blacksquare \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\blacksquare \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$$

EJEMPLO:

Calcular $\int (x^{1/2} + x)^2 dx$

Solución: Notemos que $(x^{1/2} + x)^2 = x + 2x^{1/2}x + x^2 = x + 2x^{3/2} + x^2$

$$\begin{aligned} \int (x^{1/2} + x)^2 dx &= \int (x + 2x^{3/2} + x^2) dx \\ &= \int x dx + \int 2x^{3/2} dx + \int x^2 dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2 \int x^{3/2} dx + \frac{x^3}{3} \\ &= \frac{x^2}{2} + 2 \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} \right) + \frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{4x^{5/2}}{5} + \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

2. Calcular $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{x} dx$

Solución: Notemos que $\frac{\sqrt{x}+1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x}$ entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x} + 1}{x} dx &= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int \left(x^{-1/2} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int x^{-1/2} dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= 2x^{1/2} + \ln |x| + C\end{aligned}$$

3. Calcular $\int \cos^4 x \, dx$

Solución: Usando identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2(2x) \\ &= \frac{1}{4} + \cos 2x + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \\ &= \frac{3}{8} + \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{3}{8} + \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C\end{aligned}$$

4. Calcular $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

Solución: Notemos que si $f(x) = e^x + 1$ entonces $f'(x) = e^x$ se sigue que

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

es decir

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + C$$

5. Calcular $\int \cos(3x + 1) dx$

Solución: Sabemos calcular las primitivas de $f(x) = \cos x$ en efecto $\int \cos x dx = \sin x + C$ se sigue directamente de la proposición

$$\int \cos(3x + 1) dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 1) + C$$

6. Calcular $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

Solución: Vamos a manipular la expresión para calcularla en términos de primitivas elementales

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x}} dx \\ &= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsin x - \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

Calcular la antiderivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución: Notar que en el intervalo $x \leq -1$ la función es $f_1(x) = x$. Se sigue que f en el intervalo $x \leq -1$ son de la forma

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

De manera similar, en el intervalo $-1 < x < 2$ las primitivas son de la forma

$$F(x) = 3x + C_2$$

y en el intervalo $x \geq 2$ las primitivas son de la forma

$$F(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + C_3$$

Luego, la primitiva de f es de la forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x + C_2 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x - \frac{x^2}{2} + C_3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Pero, la definición de primitiva requiere que F sea continua, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) = \frac{1}{2} + C_1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x + C_2) = -3 + C_2$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + C_2) = 6 + C_2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(2x - \frac{x^2}{2} + C_3 \right) = 2 + C_3$$

de donde

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{7}{2} + C_2 \\ C_3 &= 4 + C_2 \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{7}{2} + C_2 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x + C_2 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x - \frac{x^2}{2} + 4 + C_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{7}{2} & \text{si } x \leq -1 \\ 3x & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x - \frac{x^2}{2} + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} + C_2 \end{aligned}$$

Notar que $F(x)$ es continua y $F'(x) = f(x)$, salvo en una cantidad finita de puntos.

PROPOSICIÓN Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si g es una primitiva de f y $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{a} g(ax+b)$ es una primitiva de $f(ax+b)$.

Dem. $\left(\frac{1}{a} g(ax+b) \right)' = \frac{1}{a} g'(ax+b) \cdot a = g'(ax+b) = f(ax+b)$

EJEMPLO $\int \cos(3x+1) dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x+1) + C$

PROPOSICIÓN Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Entonces:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$$

EJEMPLO $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + C.$

En efecto, si derivamos el lado derecho de la igualdad, queda:

$$(\ln(e^x+1) + C)' = \frac{1}{e^x+1} \cdot (e^x+1)' = \frac{1}{e^x+1} \cdot e^x$$

EJERCICIOS:

1. Determine las siguientes antiderivadas

$$a) \int (|x-1| + |x-3|) dx$$

$$b) \int |x - |x-2|| dx$$

2. Encuentre las siguientes antiderivadas:

$$a) \int (x^{1/2} + x)^2 dx$$

$$j) \int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$b) \int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx$$

$$k) \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$$

$$c) \int \sin x \cos^4 x dx$$

$$l) \int \left(\frac{3+5x-6x^2-7x^3}{2x^2}\right) dx$$

$$d) \int (\cos x + \sin x) dx$$

$$m) \int \sqrt{x}(x^2 + x + 1) dx$$

$$e) \int (e^x - 1) dx$$

$$n) \int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$f) \int (1 - 10x + 9x^2) dx$$

$$g) \int \left(3 \sec^2 x + \frac{4}{x}\right) dx$$

$$\tilde{n}) \int \frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2} dx$$

$$h) \int (x^{-5} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$$

$$o) \int \frac{\tan x}{\sin x \cos x} dx$$

$$\tilde{i}) \int (x \sqrt{x} + x^{\sqrt{2}}) dx$$

3. Separe las fracciones para determinar

$$a) \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$b) \int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}} dx$$

$$c) \int \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$$

$$d) \int \frac{2-8x}{1+4x^2} dx$$

4. Multiplique por una forma de 1 adecuado para determinar

$$a) \int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx$$

$$b) \int \frac{1}{1+\cos x} dx$$

$$c) \int \frac{1}{\sec x + \tan x} dx$$

$$d) \int \frac{1}{\operatorname{cosec} x + \cotg x} dx$$

$$e) \int \frac{1}{1-\sec x} dx$$

$$f) \int \frac{1}{1-\operatorname{cosec} x} dx$$

5. Determine

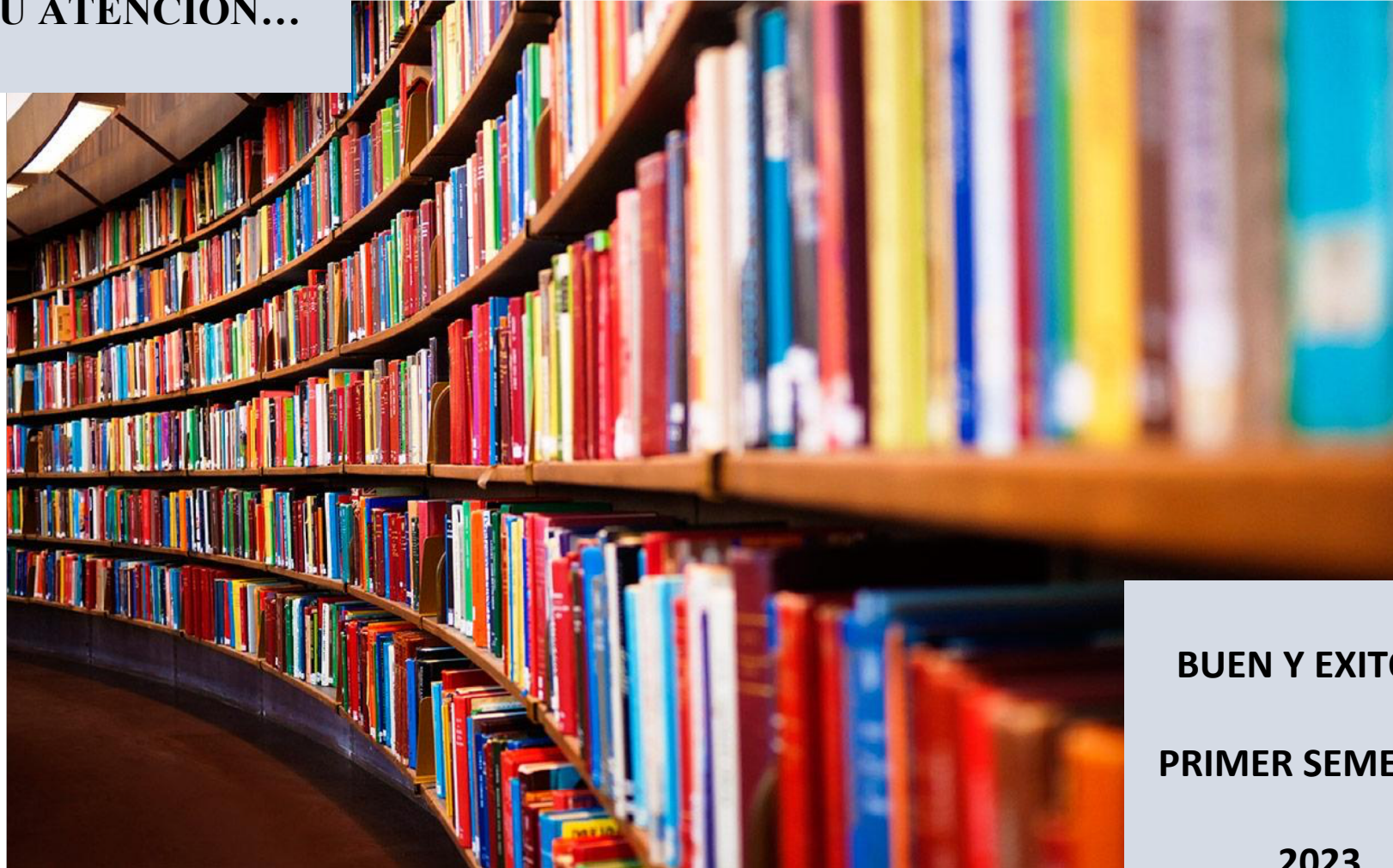
$$a) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

$$b) \int \frac{2x^3}{x^2-1} dx$$

$$c) \int \frac{4x^2-7}{2x+3} dx$$

$$d) \int \frac{4x^3-x^2+16x}{x^2+4} dx$$

...GRACIAS POR SU ATENCIÓN...



**BUEN Y EXITOSO
PRIMER SEMESTRE
2023**