FACULTAD
CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha

Métodos de Integración I

Cálculo Integral

I. M. P (2023)

Libro: Apuntes de Cálculo USM   Gruenberg, V. (2016)

Métodos para determinar Antiderivadas

Método de sustitución

El método de sustitución para el cálculo de primitivas es un método basado en la regla de la cadena y nos permite obtener primitivas de ciertas funciones a través de primitivas de funciones más sencillas.

Recordemos la *regla de la cadena*: La derivada de una composición del tipo $F(g(x))$ está dada por la expresión

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))\, g'(x)$$

Entonces, si se busca una primitiva de la forma:

$$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx$$

ésta sería una función cuya derivada es $F'(g(x))\, g'(x)$. Luego

$$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

Ahora, suponga que la expresión a la cual queremos encontrar una primitiva es del tipo $f(g(x))\,g'(x)$. Entonces, si podemos encontrar una función F tal que $F' = f$ se seguiría que

$$f(g(x))\,g'(x) = F'(g(x))\,g'(x) = [F(g(x))]'$$

En resumen, encontrar una primitiva de $f(g(x))\,g'(x)$ se reduce a encontrar una primitiva de f, digamos F y luego la antiderivada de $f(g(x))\,g'(x)$ será $F(g(x))$.

TEOREMA Suponga que g es una función derivable con recorrido un intervalo I. Suponga también que f es continua en I; entonces

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

donde $u = g(x)$.

Dem: Si F es una antiderivada de f entonces $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))\, g'(x)$. Haciendo la sustitución $u = g(x)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int f(g(x))\, g'(x)\, dx &= \int \frac{d}{dx} F(g(x))\, dx \\
&= F(g(x)) + C \\
&= F(u) + C \\
&= \int F'(u)\, du \\
&= \int f(u)\, du
\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u)\, du$$

EJEMPLOS:

1. Calcular $\displaystyle\int x^2\cos\left(x^3+7\right)dx$

Solución: Ponemos $u=x^3+7$ entonces $du=3x^2dx$ de donde $\dfrac{du}{3}=x^2dx$.

Luego

$$\begin{aligned}\int x^2\cos\left(x^3+7\right)dx &= \int\frac{\cos u}{3}du = \frac{1}{3}\int\cos u\,du\\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}u+C = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(x^3+7\right)+C\end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

Solución: Haciendo $u=\sqrt{x}$ entonces $du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$; luego $2du=\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

Se sigue, por el teorema de sustitución, que

$$\begin{aligned}\int\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx &= \int\operatorname{sen}u\,2du\\ &= \int 2\operatorname{sen}(u)\,du=-2\cos(u)+C\end{aligned}$$

Pero $u=\sqrt{x}$, de donde obtenemos

$$\int\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$$

3. Calcula
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$$

Solución: Haciendo $u(x)=1-2x^2$ se tiene $du=-4x\,dx$ de donde $-\frac{du}{4}=x\,dx$

Entonces
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx \;=\; \int \frac{-du}{4\sqrt{u}} \;=\; -\frac{1}{2}u^{1/2}+C \;=\; -\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}+C$$

4. Calcular $\displaystyle\int \frac{4}{(1+2x)^3}dx$

Solución: Poniendo $u(x)=1+2x$ se sigue $du=2dx$. Entonces
$$\int \frac{4}{(1+2x)^3}dx \;=\; \int \frac{2}{u^3}du \;=\; \frac{-1}{u^2}+C \;=\; -\frac{1}{(1+2x)^2}+C$$

EJERCICIOS:

1. Determine:

a) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

b) $\int \frac{3x}{x^2+1} dx$

c) $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$

d) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}} dx$

e) $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$

f) $\int (x^2-x-1)^3(2x-1)\, dx$

g) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

h) $\int (1-\cos x)^3 \operatorname{sen} x \, dx$

i) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

j) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

k) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

l) $\int (3x+1)^7 dx$

m) $\int \frac{e^x}{\sqrt{16-2^{2x}}} dx$

n) $\int \frac{(\sqrt{x}+3)^3}{\sqrt{x}} dx$

ñ) $\int \frac{x}{x^2+9} dx$

2. Utilice sustituciones básicas para determinar

a) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

b) $\int \frac{6\, dx}{x\sqrt{25x^2-1}}$

c) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

d) $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$

e) $\int x \sec(x^2-5)\, dx$

f) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$

h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

i) $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}^2 x+3\cos^2 x}$

Sustituciones trigonométricas

Primitivas de funciones que involucran expresiones del tipo $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ y $\sqrt{x^2+a^2}$ pueden ser calculadas en algunas ocasiones mediante sustituciones trigonométricas. La siguiente tabla indica el cambio adecuado en cada caso:

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$1-\mathrm{sen}^2\theta=\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta,\ \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$	$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$

EJEMPLOS:

$\frac{\pi}{2}]$ entonces

1. Calcular

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$$

$= |a|\,|\cos\theta|$

Análogamente en los otros caso

Solución: Hacemos $x = 3\operatorname{sen}\theta$ entonces $dx = 3\cos\theta\, d\theta$; así:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\operatorname{sen}^2\theta}3\cos\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta = \int \operatorname{cotg}^2\theta\, d\theta \\
&= \int \left(\operatorname{cosec}^2\theta - 1\right) d\theta \\
&= -\operatorname{cotg}\theta - \theta + C
\end{aligned}$$

Para retornar a la variable original notar que

$$\operatorname{sen}\theta = x/3 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

y así

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

2. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Solución: Hacemos $x=2\tan\theta$ entonces $dx=2\sec^2\theta\, d\theta$; así:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} &= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\tan^2\theta\sqrt{4\tan^2\theta+4}} \\
&= \int \frac{\sec\theta\, d\theta}{4\tan^2\theta} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \quad = \quad -\operatorname{cosec}\theta + C
\end{aligned}$$

3. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

Solución: Hacemos $x = 2\sec\theta$ entonces $dx = 2\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$; así:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} &= \int \frac{2\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta-4}} \\ &= \int \sec\theta\,d\theta\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN: No siempre que aparecen las expresiones $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ y $\sqrt{x^2+a^2}$ las sustituciones anteriores son el camino más conveniente; por ejemplo, para calcular la integral

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

es más rápido usar la sustitución $u = x^2+1$ en lugar de una sustitución trigonométrica.

EJERCICIOS:

Determine:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{49-x^2}}$

2. $\displaystyle\int \sqrt{x^8-9x^6}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+x^4}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx$

5. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

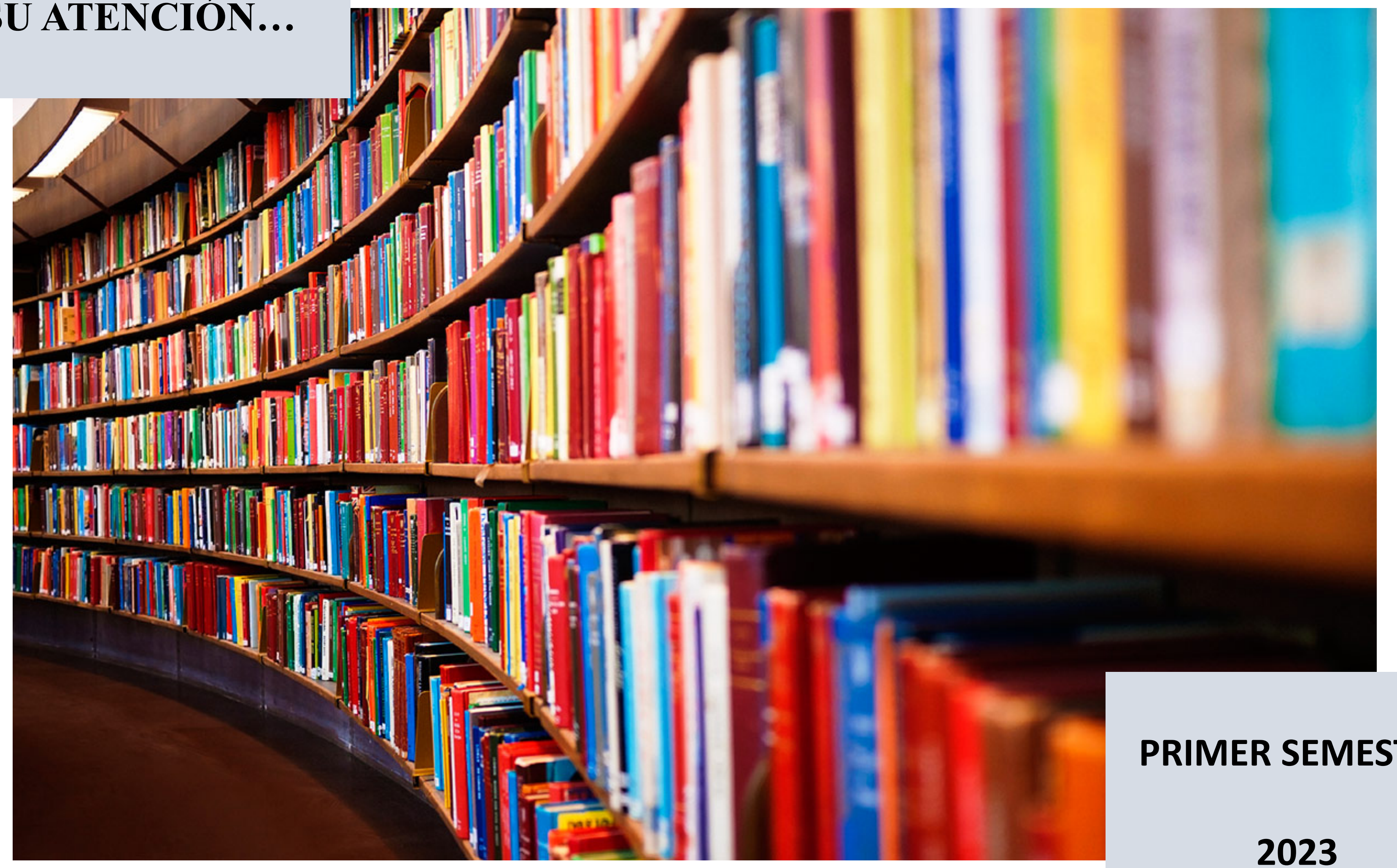
6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}}\,dy$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4-3x^2}}{x^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{z^3+z+1}{z^4+2z^2+1}\,dz$

9. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4t+13}}\,dt$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



PRIMER SEMESTRE

2023