

Métodos de Integración II

Cálculo Integral

I. M. P (2023)



Libro: Apuntes de Cálculo USM Gruenberg, V. (2016)

Métodos para determinar Antiderivadas

Integración por partes

la derivada de un producto de funciones $f(x)g(x)$ está dado por

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Si usamos la notación de primitivas tenemos

$$\int (f(x)g(x))' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

así

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

En ocasiones se utiliza una notación abreviada para expresar esta fórmula en términos de diferenciales, poniendo

$$\begin{aligned}u = g(x) &\Rightarrow du = g'(x) dx \\ dv = f'(x) dx &\Rightarrow v = f(x)\end{aligned}$$

se sigue

$$\int u dv = uv - \int v du$$

EJEMPLOCalcular $\int x \cos x \, dx$

Solución: Se elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$ de donde obtenemos $f'(x) = 1$ y $g(x) = \sin x$; aplicando la fórmula de integración por partes se sigue

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

Observar que la segunda integral es fácil de calcular. El mismo cálculo con la otra notación es

$$\begin{aligned}u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x \, dx &\Rightarrow v = \sin x\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}\int u \, dv &= uv - \int v \, du \\ \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

EJEMPLOS:

1. Calcular $\int \ln x dx$

Solución: Pongamos

$$\begin{aligned}u &= \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\dv &= dx \Rightarrow v = x\end{aligned}$$

se sigue

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \\&= x \ln x - \int dx \\&= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

2. Calcular $\int x^2 e^x dx$

Solución: Pongamos

$$\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

se sigue

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

podemos volver a aplicar integración por partes para calcular $\int x e^x dx$

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

se sigue

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

podemos volver a aplicar integración por partes para calcular $\int x e^x dx$

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

se sigue

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

se sigue

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \end{aligned}$$

3. Calcular la integral

$$\int e^x \cos x dx$$

Solución: Aplicamos integración por partes

$$\begin{aligned} u = e^x &\Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx &\Rightarrow v = \sin x \end{aligned}$$

se sigue

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

volvemos a aplicar integración por partes pero a la integral $\int e^x \sin x dx$

$$\begin{aligned} u = e^x &\Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx &\Rightarrow v = -\cos x \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x) dx \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \end{aligned}$$

se sigue

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right)$$

entonces

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

de donde obtenemos

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

4. Encuentre una fórmula de reducción (o de recursión) para:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

que es la fórmula de reducción buscada, válida para $n > 1$.

En el caso $n = 1$, es fácil ver que $I_1 = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$.

Usemos esta fórmula para calcular:

$$\begin{aligned} a) \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3} &= \underbrace{\frac{1}{2^2}}_{n=3} \frac{x}{4(x^2 + 4)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{2^2} \frac{x}{4(x^2 + 4)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \frac{x}{2(x^2 + 4)} + \frac{1}{2} I_1 \right) \\ &= \frac{1}{16} \frac{x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{3}{32} \frac{x}{(x^2 + 4)} + \frac{3}{8} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

$$b) \int (x^2 + 1)^{-3/2} dx = \underbrace{\frac{x}{(x^2 + 1)^{1/2}}}_{n=\frac{3}{2}} + C$$

Solución: Notar que

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx = \int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx + a^2 I_n$$

Usamos integración por partes en la integral de la derecha:

$$u = x \quad \wedge \quad dv = \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad \text{de donde} \quad du = dx \quad \wedge \quad v = -\frac{1}{2n-2} (x^2 + a^2)^{1-n}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx &= -\frac{x}{(2n-2)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \\ &= -\frac{x}{(2n-2)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{I_{n-1}}{2n-2} \end{aligned}$$

Luego:

$$I_{n-1} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{I_{n-1}}{2n-2} + a^2 I_n$$

y ordenando:

$$I_n = \frac{1}{a^2} \frac{x}{(2n-2)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

Ejercicios propuestos

1. Encuentre:

$$a) \int 5x \cos x \, dx$$

$$d) \int x \ln x \, dx$$

$$b) \int x \sin x \, dx$$

$$e) \int 2x \sin \frac{x}{2} \, dx$$

$$c) \int x \cos 2x \, dx$$

$$f) \int x^2 e^x \, dx$$

$$g) \int 5x^2 \cos x \, dx$$

$$i) \int x^3 e^{-x} \, dx =$$

$$h) \int x (\ln x)^2 \, dx$$

$$j) \int x^2 \sin \frac{x}{2} \, dx$$

2. Calcular $\int \sin(\ln x) \, dx$

3. Encontrar una fórmula para calcular para todo $n \in \mathbb{N}$ la primitiva $\int x^n e^x \, dx$.

4. Use integración por partes para obtener las fórmulas de reducción

$$a) \int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$b) \int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$$

$$c) \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$$

$$d) \int (\ln x)^n \, dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$$

5. Integración de las funciones inversas: Suponga que deseamos calcular

$$\int f^{-1}(x) dx$$

Hacemos la sustitución $u = f^{-1}(x)$, entonces $f(u) = x$ y así $dx = f'(u) du$ de donde

$$\int f^{-1}(x) dx = \int u f'(u) du$$

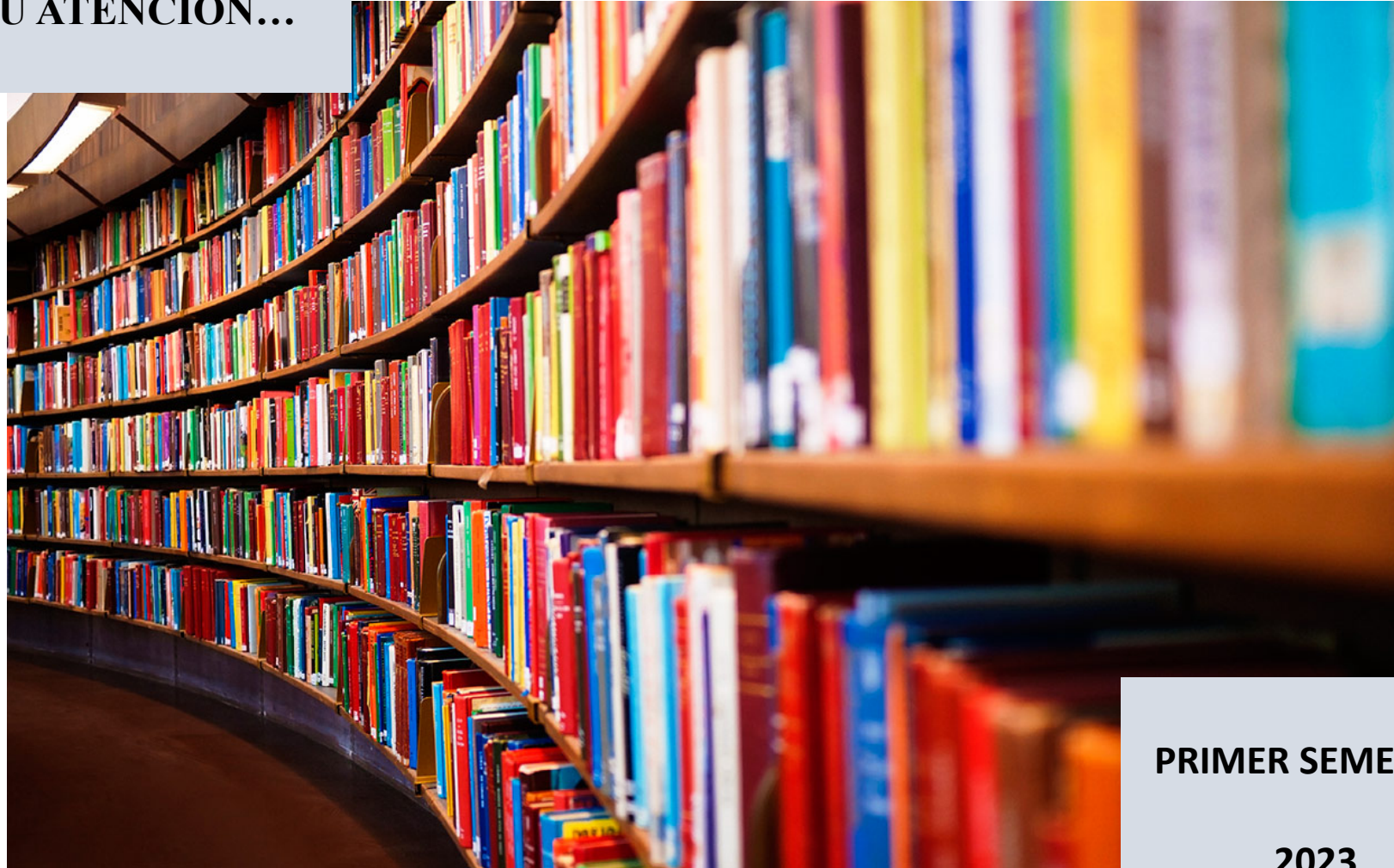
Si además aplicamos integración por partes

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - \int f(u) du$$

a) Calcular $\int \arctan x dx$

b) Calcular $\int \arcsen x dx$

...GRACIAS POR SU ATENCIÓN...



PRIMER SEMESTRE

2023