FACULTAD
CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de
Playa Ancha

Métodos de Integración III

Cálculo Integral

I. M. P (2023)

Libro: Apuntes de Cálculo USM   Gruenberg, V. (2016)

Métodos para determinar Antiderivadas

Recuerdo: Fracciones Parciales

Una **función racional** es una función que se escribe como un cuociente de polinomios. Se dice que una función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una **fracción propia**, si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. En caso contrario, es decir, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual al de $Q(x)$, la fracción se llama **impropia**.

Toda fracción impropia se puede expresar, efectuando la división, como la suma de un polinomio más una fracción propia. Es decir, si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es impropia, entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N_1(x)}{Q(x)}, \qquad \text{donde} \quad M(x) \quad \text{es un polinomio y} \ \frac{N_1(x)}{Q(x)} \ \text{es propia.}$$

Descomposición en fracciones parciales

Cualquier fracción propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer en la suma de fracciones parciales del siguiente modo:

- Si $Q(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax+b$, no repetido, entonces la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene un término de la forma $\frac{A}{ax+b}$, $A=$cte.

- Si $Q(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax+b$, repetido k veces, entonces la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma $\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$, $A_i=$cte., $\forall i=1,\cdots,k$.

- Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma ax^2+bx+c, no repetido, entonces la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene un término de la forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, $A, B=$ctes.

- Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma ax^2+bx+c, repetido k veces, entonces la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma
$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$, $A_i, B_i=$ctes., $\forall i=1,\cdots,k$.

Integración por Fracciones Parciales

Caso 1 El denominador $q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.

Ejemplo: Determine $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

Solución: El denominador se puede factorizar como sigue:

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2 = x(2x-1)(x+2)$$

Luego, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

con $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$. Así:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx &= \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right]dx \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x-1| - \tfrac{1}{10}\ln|x+2| + C\end{aligned}$$

Caso 2 El denominador $q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Ejemplo: Determine $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

Solución: La fracción es impropia, por lo que comenzaremos por dividir los polinomios:

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

Luego, factorizando el polinomio $q(x)=x^3-x^2-x+1$ se obtiene

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$$

Por lo tanto, su descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

del cual de obtiene: $A=1,$ $B=2$ y $C=-1,$ de modo que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx &= \int \left[x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right]dx \\ &= \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+1|+C\end{aligned}$$

Caso 3 El denominador $q(x)$ contiene factores cuadráticos irreductibles, ninguno de los cuales se repite.

Ejemplo: Encuentre $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$

Solución: La fracción se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

de donde se obtiene

$$A+B=2,\quad C=-1,\quad 4A=4 \quad\Longrightarrow\quad A=1,\quad B=1 \quad \text{y} \quad C=-1$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx &= \int \left[\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right]dx \\
&= \int \frac{1}{x}\,dx+\int \frac{x}{x^2+4}\,dx-\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\
&= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+K
\end{aligned}$$

Caso 4 El denominador $q(x)$ contiene un factor irreductible repetido.

Ejemplo: Determine $\displaystyle\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

Solución: La forma de descomponer esta división de polinomios en fracciones parciales es

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-1,\quad D=1 \quad \text{y} \quad E=0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx \\
&= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x) - \frac{1}{2(x^2+1)} + K
\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1. Encuentre:

   a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+x}\,dx$

   c) $\displaystyle\int \frac{5x+6}{x^2+3x+2}\,dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(1-x)(x-2)}\,dx$

   e) $\displaystyle\int \frac{9x+25}{x^2+10x+9}\,dx$

   f) $\displaystyle\int \frac{5x-11}{x^2+10x+9}\,dx$

   g) $\displaystyle\int \frac{4x}{4-x^2}\,dx$

   h) $\displaystyle\int \frac{15x+51}{x^2+7x+10}\,dx$

   i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

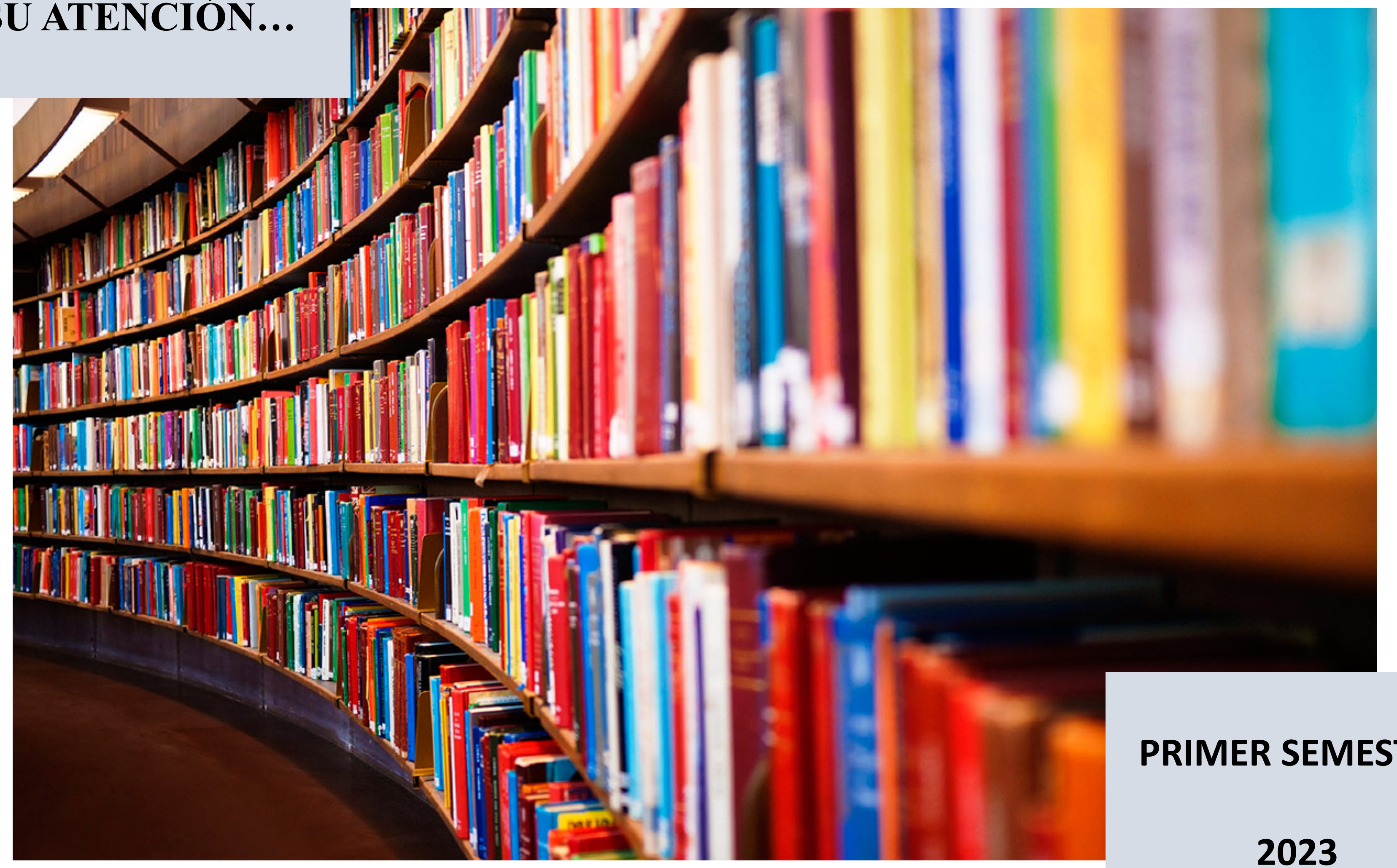
2. Exprese los integrandos como fracciones parciales y determine las siguientes:

   a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+1}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{4x+6}{(x+1)^2}\,dx$

   c) $\displaystyle\int \frac{7x-23}{x^2-6x+9}\,dx$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



PRIMER SEMESTRE

2023