

Métodos de Integración IV

Cálculo Integral

I. M. P (2023)



Libro: Apuntes de Cálculo USM Gruenberg, V. (2016)

Métodos para determinar Antiderivadas

Sustitución tangente del ángulo medio

Este método se utiliza para integrales de la forma

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx \quad \text{donde } R \text{ es una función racional.}$$

Utilizamos la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, de donde

$$2 \arctan t = x \quad \Rightarrow \quad \frac{2dt}{1+t^2} = dx$$

Además,

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \wedge \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

entonces

$$\begin{aligned}\sin(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

de donde

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R(t) dt$$

EJEMPLO Calcular la integral $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

Solución: Usamos la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ entonces

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|t+1| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| + C$$

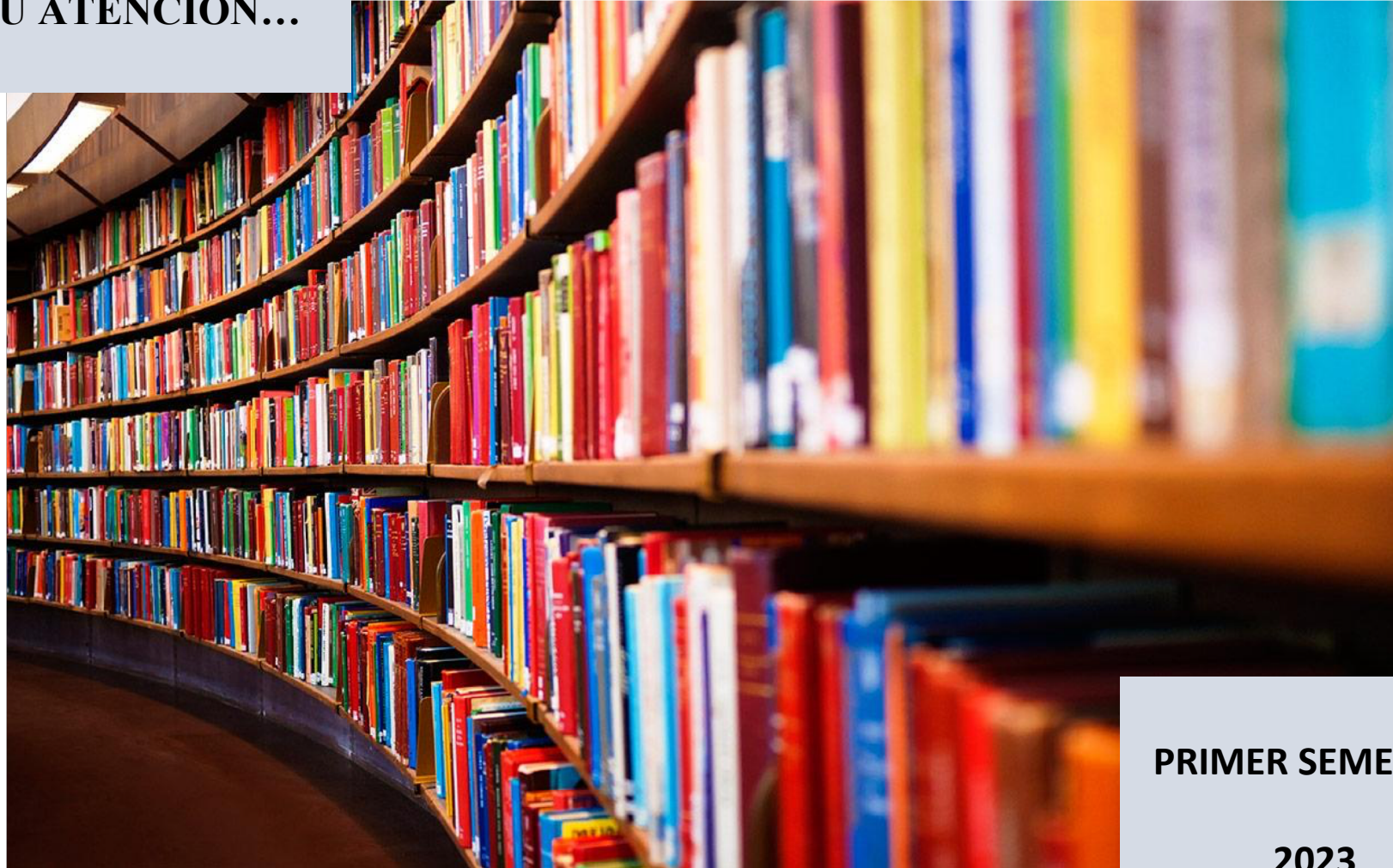
EJERCICIOS:

1. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$

2. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

3. $\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \cos x}$

...GRACIAS POR SU ATENCIÓN...



PRIMER SEMESTRE

2023