

# DIDÁCTICA DEL AZAR Y LO DETERMINÍSTICO 2022

ISABEL MATURANA P.

Didáctica  
de la  
Estadística



CARMEN BATANERO



## **INVESTIGACIONES SOBRE RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE**

3.1. Introducción

3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

- La intuición del azar
- La estimación de la frecuencia relativa
- Estimación de posibilidades y noción de probabilidad
- Distribución y convergencia
- La distribución normal

3.3. Investigaciones psicológicas: heurísticas y sesgos

3.4. Investigaciones didácticas: errores, obstáculos y concepciones

### 3.1. Introducción

Una preocupación en educación estadística es :

identificar los puntos difíciles y los errores  
que continúan al finalizar la enseñanza,

El propósito es diseñar actividades didácticas adecuadas  
para superar estas dificultades  
e informar al profesor sobre las mismas.

Por otra parte, en Psicología lo fundamental es  
analizar el razonamiento humano en situaciones de incertidumbre.

En Nisbett y Ross (1980) y Kahneman, Slovic y Tversky (1982)  
describen los errores  
sistemáticos que cometemos al tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

Piaget

y

Fischbein



### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

Los niños aprenden no sólo en la escuela, sino en su entorno familiar y social, su razonamiento se modifica gradualmente, a partir de sus experiencias y de la interacción con los objetos y el mundo que les rodea.

En el caso de la probabilidad y la estadística es especialmente importante analizar los razonamientos de los niños, puesto que en dichas materias tratamos con ideas bastante abstractas y no tan ligadas a la experiencia directa del niño como pudieran ser los conceptos geométricos o numéricos.

El niño debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades.

Las operaciones aritméticas básicas se pueden también concretizar en operaciones con objetos físicos que tienen la propiedad de ser reversibles.

La falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios sin duda influye en el desarrollo más tardío de las nociones de probabilidad.

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

Piaget (1951) se centró en dar criterios para determinar en qué nivel de desarrollo intelectual se encuentra el niño a diversas edades, y analizó la comprensión formal de los conceptos.

Postuló que la experiencia, la actividad y el conocimiento previo son las bases que determinan el aprendizaje.

El conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno.

El niño trata de adaptarse al mundo que le rodea.

Cuando una idea nueva se le presenta, se crea un "*conflicto cognitivo*" o "*desequilibrio*" en su estado mental si esta idea choca con las ya existentes.

Proceso de "*equilibración*" que consiste en los pasos de *asimilación* y *acomodación*.

- La asimilación es la incorporación (aceptación) por parte del sujeto de los datos nuevos
- La acomodación es el cambio o reestructuración de los ya existentes.

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

Por ejemplo el desarrollo del razonamiento probabilístico son relevantes tres etapas:

- ***Preoperatoria,***

caracterizada por la necesidad de manipular objetos reales para el aprendizaje de un cierto concepto, pues el niño se apoya en sus experiencias empíricas para comprender los conceptos.

- ***Operaciones concretas:***

Se comienza a comprender la conservación de la masa, peso, número y volumen.  
Aparecen conceptos secundarios, que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta.

- ***Operaciones abstractas:***

Se pueden manipular relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones.  
Se comprende el significado de abstracciones verbalmente, sin referirse a objetos particulares.

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

Fischbein,

su conceptualización para **las intuiciones** como procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, y tienen las siguientes características:

inmediatez,  
globalidad,  
capacidad extrapolatoria,  
estructurabilidad y  
auto-evidencia.

Fischbein diferencia entre **intuiciones primarias y secundarias**:

Las ***intuiciones primarias*** se adquieren directamente con la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática.  
Por ejemplo las intuiciones espaciales elementales, como el cálculo de distancia.

Las ***intuiciones secundarias*** se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela.  
Es un aprendizaje que se transforma en convicción, en creencia, en un sentimiento de evidencia.

## 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

### La Intuición del Azar

El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas.

Piaget e Inhelder (1951) defienden que la comprensión del azar por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto.

Los niños concebirían el azar como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente producirían un resultado inesperado.

En consecuencia, hasta que el niño no comprende la idea de causa, no tiene un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios.

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

#### Un experimento piagetiano clásico:

Una bandeja con dos compartimentos en los extremos, que se unen en el centro  
Figura 1.

En uno de estos dos compartimentos se colocan cuatro bolas blancas y en el otro cuatro rojas, de modo que al bascular la bandeja se produce la mezcla progresiva de las dos clases de bolas.

Figura 1: El experimento de la bandeja: Al mover la bandeja, las bolas, que en principio estaban ordenadas se mezclan progresivamente



Antes de mover la bandeja, Piaget pide a los niños que hagan una predicción sobre la colocación final de las bolas.

En el **periodo preoperacional** los niños piensan que, después de mover varias veces la bandeja, las bolas vuelven nuevamente a su lugar original, o bien que el conjunto completo de blancas acabarán en el lugar ocupado originalmente por las rojas, y viceversa.

Piaget interpreta indicando que el niño no comprende la naturaleza **irreversible** de la mezcla aleatoria por tener un pensamiento reversible.

Además el niño de esta edad no comprende bien la relación entre causa y efecto.

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

Fischbein rechaza la interpretación de Piaget, según su modelo la *intuición primaria* del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista aparece antes de los 7 años.

Fischbein se basa en la conducta de los niños al practicar juegos de azar, ya que en juegos sencillos, los niños son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad.

Para Piaget, en el ***periodo de las operaciones concretas***, con la adquisición de esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, el niño alcanza la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, aunque esta comprensión no es completa, puesto que el pensamiento está todavía muy ligado al nivel concreto.

En los fenómenos aleatorios los resultados aislados son imprevisibles pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible.

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

Cuando se comprende esto aparece la idea de probabilidad expresada por la razón entre las posibilidades de un caso particular y del conjunto de posibilidades.

Por tanto, la idea de azar, para Piaget, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente adquirida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales.

Fischbein sostiene que la distinción entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales.

En experimentos donde se requiere calcular probabilidades el adolescente a veces busca dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias, siendo influenciado por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

#### La estimación de la frecuencia relativa

Bajo el supuesto que un niño sea capaz de diferenciar los fenómenos aleatorios y deterministas, el segundo paso es que pueda estimar en una serie de experimentos cuáles son los sucesos que aparecen con mayor o menor frecuencia.

##### Ejemplo

*Se presenta al alumno dos luces de color diferente que se irán encendiendo intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo, el 70 y el 30%, respectivamente. El sujeto debe predecir cuál de las dos luces se encenderá la próxima vez.*

Los resultados obtenidos en este tipo de experimentos concluyen que *en el periodo preoperacional* el niño adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo.

Ello nos indica que los niños son capaces de apreciar las diferentes frecuencias relativas con que aparecen los resultados de los fenómenos aleatorios.

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

La estimación de la frecuencia relativa de sucesos mejora en el *periodo de operaciones concretas*.

Como resultado de experiencias acumuladas, la intuición de la frecuencia relativa se desarrolla de un modo natural como consecuencia de las experiencias del niño con situaciones que implican sucesos aleatorios, en las que sea necesaria una estimación de las frecuencias relativas de los fenómenos.

En el *periodo de las operaciones formales* el adolescente ha hecho progresos en comparación a los niños más pequeños en lo que se refiere a la intuición de la frecuencia relativa,

particularmente en casos donde las predicciones tienen algún resultado práctico.

La estrategia óptima ante decisiones en condiciones aleatorias muestra los efectos favorables del desarrollo de la inteligencia sobre las predicciones de ocurrencia de los fenómenos aleatorios.

## 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

### Estimación de posibilidades y noción de probabilidad

Piaget e Inhelder pensaron que el niño en el *periodo pre-operatorio* es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, basándose en que el niño de esta edad no posee los recursos necesarios:

- la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible;
  - el concepto de proporción;
- los procedimientos combinatorios.

Fischbein piensa que, a pesar de ello, el niño puede hacer juicios probabilísticos, en situaciones sencillas.

Una de estas situaciones es pedir al niño que elija, entre dos cajas con diferente número de bolas blancas y negras, aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola blanca.

## 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

### Estimación de posibilidades y noción de probabilidad

En el *periodo de las operaciones concretas* los niños pueden resolver problemas que:  
impliquen comparación de probabilidades  
de un mismo suceso en dos experimentos diferentes

Posteriormente pasan a resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción.

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

Estrategias que siguen los niños al comparar probabilidades. Tabla de Cañizares (1997):

|                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>A) Comparación del número de casos posibles:</i><br>Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas.                                                      | Es propia del período preoperacional. Los niños sólo tienen en cuenta el número de casos posibles de ambas cajas, sin comparar las proporciones de bolas blancas y negras.                                                                        |
| <i>B) Comparación del número de casos favorables:</i><br>Consiste en elegir la caja que contenga más bolas del color favorable.                                            | De los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos y se ignoran los demás. Corresponde, al final del nivel preoperacional, en que el alumno no posee aún la capacidad para establecer relaciones entre el todo y sus partes. |
| <i>C) Comparación del número de casos desfavorables:</i><br>Se elige la caja con menor número de bolas del color desfavorables.                                            | Los niños en el nivel preoperacional utilizan esta estrategia cuando existe igualdad de casos favorables, y centran su atención, entonces, sobre el número de casos desfavorables.                                                                |
| <i>D) Estrategias aditivas:</i> Se tienen en cuenta los casos favorables, los desfavorables y los posibles, pero comparan los datos por medio de alguna operación aditiva. | Es característicos del período de operaciones concretas                                                                                                                                                                                           |
| <i>E) Estrategia de correspondencia:</i> Se establece un criterio de proporcionalidad en una fracción y se aplica a la otra fracción.                                      | A falta de un cálculo de fracciones, el sujeto determina un sistema de correspondencias cuando las proporciones o desproporciones son comparables en forma inmediata. Para ir transformándose en una estrategia puramente multiplicativa.         |

## 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

### Distribución y convergencia

Piaget e Inhelder (1951) investigaron la comprensión de los niños sobre lo que ellos llamaron "distribuciones uniformes", que en realidad eran distribuciones de Poisson en el plano.

Por ejemplo:

El niño tiene experiencia de observar la distribución de las gotas de lluvia sobre un embaldosado.

Basándose en esta experiencia Piaget e Inhelder usan la siguiente técnica experimental:

Una hoja de papel blanco es dividida  
en cuadrados de 2 o 3 cm,  
y algunas  
fichas se lanzan sobre la hoja de papel al azar,  
simulando gotas de lluvia.

Se pide al niño  
que prevea donde caerán las gotas de lluvia sucesivas y  
cómo se efectuará la distribución,  
cuando aumentamos el número de gotas.

### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

Los niños de *preescolar* saben que, cuando cae la lluvia, habrá gotas por todas partes, aunque ello no implica que comprendan que la distribución es, a la vez, aleatoria y cada vez más regular.

En el primer estadio, el niño está convencido de la distribución regular de la lluvia.

*En el periodo de las operaciones concretas,* aceptan la irregularidad de la distribución,

si todos los cuadrados, menos uno tienen al menos un punto, el cuadrado "seco" se considera todavía como el más probable para recibir la siguiente gota.

*En el periodo de las operaciones formales* se comprende, finalmente, el mecanismo de la convergencia progresiva.

En función del número cada vez mayor de gotas, la diferencia en el número de gotas en las baldosas cada vez disminuye más, no en forma absoluta, sino en forma relativa.

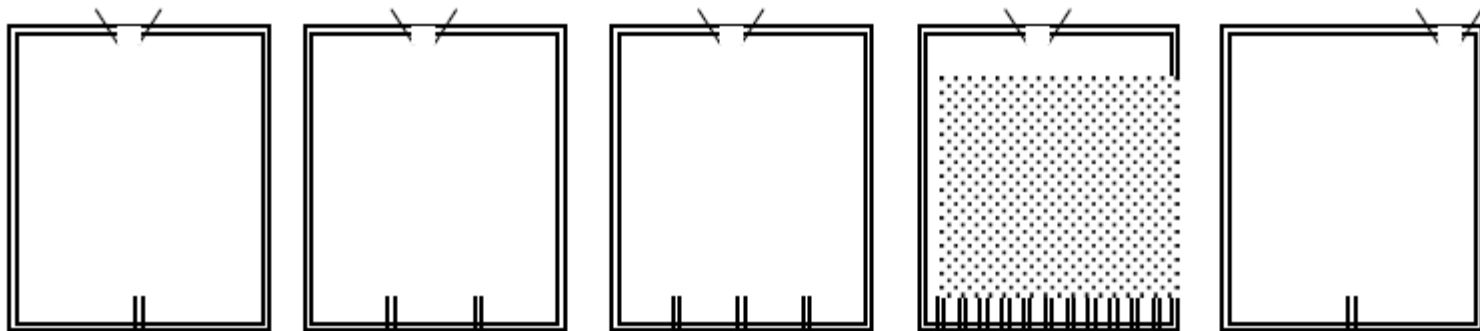
## 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

### La distribución normal

Por ejemplo cuando los granos de arena caen a través de un pequeño orificio (en un reloj de arena).

Para Piaget, para comprender el mecanismo de esta distribución es preciso captar la simetría de las trayectorias posibles de los granos al caer por el orificio, porque hay las mismas posibilidades para cada grano de orientarse a derecha o izquierda

**Figura 3.1. Esquema de los aparatos de Galton utilizados en la experiencia**



### 3.2. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo de Piaget y Fischbein

#### La distribución normal

En el primer estadio se caracteriza por la ausencia de la idea de distribución.

La etapa de operaciones concretas se caracteriza por un principio de distribución de conjunto generalizable, reconocible. El niño prevé la desigualdad entre las frecuencias laterales y centrales.

El tercer estadio (a partir de 12 años) está marcado por la cuantificación de la distribución de conjunto, es decir, por la previsión de una equivalencia entre las partes simétricas correspondientes de la dispersión.

### 3.3 Investigaciones psicológicas sobre el razonamiento estocástico de sujetos adultos: heurísticas y sesgos

Sobre la década de los años setenta autores como Kahneman y Tversky contribuyen a un cambio en la forma de concebir el razonamiento no determinista, y su trabajo ha sido utilizado en muchos campos en los que la toma de decisiones es fundamental.

Las investigaciones psicológicas en el campo del razonamiento parte de los estudios sobre la racionalidad humana.

una acción es racional si está de acuerdo con los valores y creencias del individuo, es decir, si es consistente con un conjunto de axiomas (modelos normativos).

### 3.4. Investigaciones didácticas: errores, obstáculos y concepciones

Un principio ampliamente asumido en psicología educativa es el enunciado por Ausubel y cols. (1983):

*"el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente".*

Un problema didáctico es que algunas de estas concepciones, que permiten resolver correctamente algunas tareas, son inapropiadas para otros problemas más generales, y que el sujeto muestra una resistencia a cambiar esta concepción.

En estas circunstancias se habla de la existencia de un *obstáculo*. Brousseau (1983) describe las siguientes características de los obstáculos:

- *Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.* El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia.
- *El alumno no es consciente del obstáculo* y no logra establecer un conocimiento mejor.
- Después de que el alumno se ha dado cuenta de que existía un obstáculo, *continúa manifestándolo, de forma esporádica.*

### 3.4. Investigaciones didácticas: errores, obstáculos y concepciones

#### Tipos de obstáculos:

**Obstáculos ontogénicos** (obstáculos psicogenéticos):  
son debidos a las características del desarrollo del niño.

Por ejemplo, para comprender la idea de probabilidad se requiere un cierto razonamiento proporcional, por lo que un niño muy pequeño no puede comprender la probabilidad.

**Obstáculos didácticos:**  
resultan de alguna forma inadecuada de enseñar un concepto.  
Por ejemplo, la introducción de un nuevo simbolismo tal como:

$$(\sum_{i=1}^n x_i) / n$$

para la media, en lugar de facilitar la comprensión del significado de la media, puede oscurecerlo, en caso de alumnos con poca base matemática.

**Obstáculos epistemológicos:**  
Relacionados con el propio concepto y conteniendo parte del significado del mismo.

Por ejemplo, las circularidades que se presentan en las diferentes definiciones del significado de la probabilidad (clásica, frecuencial, subjetiva) que mostraron en su día la necesidad de una definición axiomática.

### 3.4. Investigaciones didácticas: errores, obstáculos y concepciones

#### *Actividad .*

*Una creencia frecuente por parte de los estudiantes es que después de una racha de obtención de caras al lanzar , la probabilidad de obtener una cruz aumenta.*

*Analiza los posibles obstáculos implicados en este razonamiento y su tipología.*

#### *Actividad*

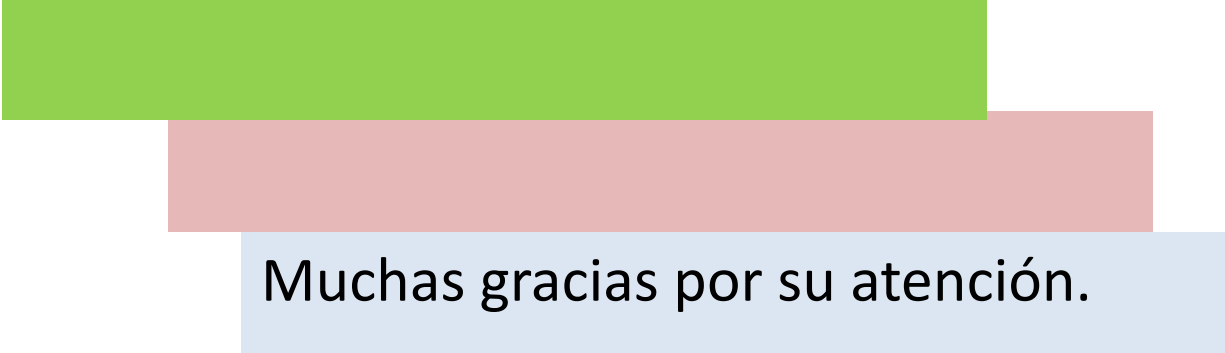
*Busca ejemplos de obstáculos epistemológicos ligados al desarrollo histórico de algún concepto estocástico fundamental.*

#### *Actividad*

*Analiza el desarrollo del tema de estadística en un libro de texto del MINEDUC.*

*¿Es el vocabulario usado adecuado?*

*¿Podría algún término o definición empleada constituir un posible obstáculo didáctico?*



Muchas gracias por su atención.