

DIDÁCTICA DEL AZAR Y LO DETERMINÍSTICO (2022)

ISABEL MATURANA P.

Didáctica de la Estadística

ESTOCÁSTICA Y SU DIDÁCTICA
PARA MAESTROS
2002



CARMEN BATANERO
JUAN D. GODINO



Conocimientos didácticos

1. Orientaciones curriculares

- 1.1. La estadística en la sociedad y la enseñanza obligatoria
- 1.2. Diseño curricular base del MEC
- 1.3. Principios y estándares para la matemática escolar del NCTM

2. Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje

3. Situaciones y recursos

- 3.1. Investigaciones y proyectos
- 3.2. Datos y fuentes de datos
- 3.3. Recursos en Internet

4. Conflictos en el aprendizaje. Instrumentos de evaluación

- 4.1. Comprensión de tablas y gráficos estadísticos
- 4.2. Medidas de posición central
- 4.3. Características de dispersión
- 4.4. Ítemes de evaluación

5. Taller de didáctica

- 5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didáctica
- 5.2. Análisis de respuestas a tareas de evaluación

1. Orientaciones curriculares

1.1. La estadística en la sociedad y la enseñanza obligatoria.

Las principales razones que fundamentan la enseñanza de la estadística son las siguientes:

Es útil para la vida posterior a la escuela, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.

Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva, apoyada en los datos, frente a criterios subjetivos.

Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Cuando tenemos en cuenta el tipo de estadística que queremos enseñar y la forma de llevar a cabo esta enseñanza debemos reflexionar sobre los fines principales de esta enseñanza que son los siguientes:

Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo.

Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones.

1.2. Diseño curricular base del MEC

La recogida, organización y presentación de datos, así como la interpretación y las posibles predicciones basadas en los mismos, son conocimientos que tienen cada vez más importancia en nuestro medio social lo que hace deseable su aprendizaje y utilización. Las sencillas actividades estadísticas pueden representar para los alumnos de estas edades aplicaciones de las matemáticas al medio real, prestando significado al mismo, haciéndolo más inteligible.

El objetivo general 6 para el área de Matemáticas de secundaria obligatoria formulado por el M.E.C. recoge el siguiente objetivo, relacionado con la estadística:

"Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma".

Este objetivo es desarrollado en el bloque de contenidos referido a organización de la información en los siguientes términos:

Conceptos:

1. La representación gráfica
2. Las tablas de datos.
3. Tipos de gráficos estadísticos: diagramas de barras, diagramas lineales, etc.
4. Carácter aleatorio de algunas experiencias.

Actitudes:

- 1) Actitud crítica ante las informaciones y mensajes transmitidos de forma gráfica y tendencia a explorar todos los elementos significativos.
- 2) Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico como forma de representar muchos datos.
- 3) Sensibilidad y gusto por las cualidades estéticas de los gráficos observados o elaborados.

Procedimientos:

- 1) Exploración sistemática, descripción verbal e interpretación de los elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.
- 2) Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.
- 3) Elaboración de gráficos estadísticos con datos poco numerosos relativos a situaciones familiares.
- 4) Expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso experimentado por el alumno.

Respecto a criterios de evaluación sobre los contenidos estocásticos el M.E.C. especifica:

- 1) Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.
- 2) Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos, y comprobar dicho resultado.

1.3. Principios y Estándares para la Matemática Escolar NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: , NCTM.

Estas orientaciones curriculares proponen, para los niveles K-2 (infantil y primer ciclo de primaria) que el currículo incluya experiencias con análisis de datos para que los alumnos sean capaces de:

- Clasificar objetos de acuerdo a sus atributos y organizar datos sobre los objetos.
- Representar datos usando objetos concretos, dibujos y gráficos.

En los niveles de 3° a 5° los niños deben ser capaces de:

- Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan al conjunto de datos.
- Recoger datos de observación, encuestas y experimentos.
- Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.
- Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos.
- Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos.
- Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes del conjunto de dato se muestra mejor con cada una de ellas.
- Proporcionar y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos y diseñar estudios para estudiar mejor las conclusiones y predicciones.

En estos niveles se pretende que progresivamente los niños sean capaces de ver el conjunto de datos como un todo, describir su forma y usar las características estadísticas, como el rango y las medidas de tendencia central para comparar conjuntos de datos.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Apenas hay estudios evolutivos del desarrollo de los conceptos estadísticos, siendo casi los únicos conceptos que no fueron tratados en los estudios de Piaget con sus colaboradores.

El único estudio de este tipo es realizado por Watson en Australia con unos 2200 niños desde el tercer curso de primaria para analizar cómo los niños progresan en la comprensión de las ideas de media, mediana y moda.

Diferencia las siguientes etapas:

Uso coloquial de las palabras media mediana y moda: sin asignarles un significado preciso; por ejemplo la palabra “media” pueden entenderla como “normal”, “frecuente”.

Estructuras múltiples para los conceptos: son capaces de utilizar ideas como “centro” o “sumar y dividir” para describir la media, pero sólo resuelven problemas muy simples.

Conocen los algoritmos y los asocian con las ideas de media, mediana y moda. Son capaces de reconocer que la media, mediana y moda representan el conjunto de datos, pero no son capaces de usarlas para comparar dos conjuntos de datos o de estimarlas a partir de una representación gráfica. En los gráficos, los sujetos se concentran en los datos aislados, pero no en las tendencias.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

Los resultados de diversas investigaciones proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento estadístico.

Algunas de estas orientaciones son las siguientes:

1. Involucrar a los niños en el desarrollo de proyectos sencillos en los que deban recoger sus propios datos a partir de la observación (¿de qué color son los ojos de los niños de la clase?), encuesta (¿qué tipos de trabajo hacen las madres y los padres de los niños?) y medida (¿tienen los pies, manos, hombros más grandes los niños que las niñas?).
2. Concienciar a los niños de que cada dato aislado forma parte de un todo (distribución de los datos) y que hay preguntas que no pueden contestarse con un sólo dato, sino con una distribución de datos.
3. Concienciar a los niños de las tendencias y variabilidad en los datos y cómo estas pueden usarse para responder preguntas sobre los datos o comparar varios conjuntos de datos.
4. Visualizar progresivamente que los datos recogidos son una muestra de una población más amplia y sobre cuáles son las condiciones para que los datos de la muestra puedan representar los datos de toda la población.
5. Animar a los niños a representar sus datos en tablas y gráficos, cuidando las cualidades estéticas matemáticas de los gráficos de modo que los datos queden correctamente representados en ellos. Advertirles de la facilidad con que un gráfico puede ser engañoso.

3.1. Investigaciones y proyectos

La estadística es hoy día una materia interdisciplinar que se utiliza no sólo en la clase de matemáticas, sino en otras disciplinas donde se convierte en herramienta de resolución de problemas.

En algunos países como Estados Unidos o Inglaterra es ya tradicional el celebrar en las escuelas competiciones de proyectos estadísticos y es posible que esta tendencia no tarde en llegar a nuestros centros. A continuación sugerimos algunos proyectos que podrían realizarse en los cursos 5º y 6º de educación primaria.

3.1. Investigaciones y proyectos

Actividad 1: Intención de voto en las próximas elecciones al consejo escolar

Se propone diseñar, llevar a cabo y analizar los datos de una encuesta en el centro para estudiar la intención de voto en el próximo consejo escolar, una vez que se conocen los candidatos a representantes de los alumnos. Los alumnos deben diseñar el cuestionario, seleccionar una muestra representativa de alumnos del centro, distribuir el cuestionario y analizar los datos. Algunas cuestiones relacionadas son:

- ¿Qué preguntas debemos incluir en el cuestionario? ¿Están claras las preguntas? ¿Qué variables identificativas del alumno podrían influir en su intención de voto?
- ¿Cómo elegimos la muestra de alumnos? ¿Cuál es la población objetivo? ¿Cuál es la población que podemos alcanzar?
- ¿Sería la encuesta fiable si hay un porcentaje alto de no respuesta? ¿Cómo podemos motivar la participación y disminuir la no respuesta? ¿Cómo y cuándo distribuimos el cuestionario y recogemos los datos?
- ¿Qué nos dicen los resultados? ¿Son diferentes en los distintos cursos? ¿En chicos y chicas?

Actividad 2: ¿Se mejora con la práctica?

1. *Estimación de tiempos:*

Intenta estimar la duración de un minuto.

Para ello tu compañero coge un reloj que cuente segundos y te indica cuando debes comenzar a calcular el tiempo. Tú te concentras y cuando creas que ha pasado un minuto dices ¡ya!. Tu compañero mira el reloj y anota los segundos transcurridos. Comprobáis si el tiempo transcurrido es verdaderamente un minuto o en cuántos segundos te has equivocado.

¿Crees que si repites el experimento 10 veces, cada vez estimarás el minuto con más exactitud? ¿Mejoras con la práctica?

2. *Estimación de distancias:*

Trabaja con un compañero.

Uno dibuja un segmento con una regla graduada y mide su longitud; el otro estima la longitud del segmento. Anotad la diferencia entre el valor estimado y el valor real del segmento.

¿Crees que si repites el experimento varias veces, cada vez estimarás mejor la longitud del segmento? ¿Mejoras con la práctica?

Actividad 2: ¿Se mejora con la práctica?

3. Durante la clase de gimnasia se recogen datos de cada alumno el primer día de clase y una vez transcurrido 3 meses.

Podrían analizarse, entre otras las siguientes variables, para ver si la práctica ayuda a mejorar, qué alumno mejoró más globalmente y si mejoran más las chicas o los chicos:

- tiempo en segundos para recorrer 50 metros
- pulsaciones por minuto antes y después de correr los 50 metros
- altura máxima que se puede saltar
- longitud máxima que se puede saltar
- Número de abdominales seguidos hasta cansarse
- Número de canastas encestandas en 10 intentos

3.1. Investigaciones y proyectos

Actividad 3: ¿Cuántas lentejas tiene un kilo de lentejas?

Se trata de estimar el número aproximado de lentejas en un kilo, sin tener que contarlas todas.

Puesto que el proceso de llenado de un paquete de lentejas tiene un componente aleatorio, este número variará de uno a otro paquete.

Los alumnos por equipos podrían tratar de estimar el número de lentejas en paquetes seleccionados de varias marcas comerciales.

Se presentaría el problema de que hay que especificar con claridad la variedad, pues existen diversos tamaños. Una vez fijada una variedad y comprados paquetes de diversas marcas cada equipo trataría de estimar el número de lentejas de su paquete.

Para ello se pueden tomar datos del número de lentejas en varias muestras de unidades de capacidad pequeñas, como el centímetro cúbico y resolver primero el problema de la estimación del número de lentejas en un cm^3 .

Calculado el volumen de los paquetes de kilo de lentejas, para calcular la distribución del número de lentejas en un paquete de kilo, se trata de hacer un cambio de variable en una distribución.

Por tanto, la media y desviación típicas quedarán afectadas por el cambio de escala que pasa del cm^3 al volumen del paquete.

3.2. Datos y fuentes de datos

Es decir, planteamos unos objetivos y preguntas que el alumno debe tratar de contestar. Para ello el alumno necesita recoger datos, que pueden provenir de diversas fuentes, ser obtenidos mediante diferentes técnicas, y corresponder a diversas escalas de medida y tipos de variables estadísticas.

Los proyectos en la clase de estadística se conciben como verdaderas investigaciones asequibles al nivel del alumno, donde tratamos de integrar la estadística dentro del proceso más general de investigación.

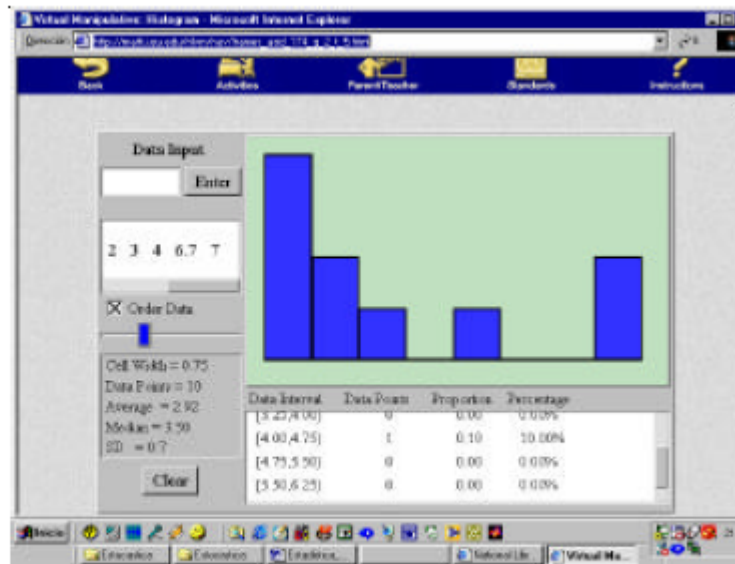
Tipos de datos en los proyectos

Procedencia de los datos	Variables estadísticas incluidas
Anuarios estadísticos	Cualitativa
Encuestas	Cuantitativa pocos valores
Experimento realizado en la clase	Cuantitativa necesidad de agrupar
Internet	Técnica de recogida de datos
Prensa	Observación
Simulación	Encuesta
	Medida

Consideramos importante que el alumno tenga oportunidad de apreciar esta diversidad de datos estadísticos. Algunas veces los datos se encuentran disponibles, pero hay que saber localizarlos de diferentes fuentes, como libros o anuarios estadísticos.

3.3. Recursos en Internet

1. Histogramas:



[http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames asid 174 g 2 t 5.html](http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames%20174_g%202_t%205.html)

Esta página permite explorar el efecto de variar la anchura de los intervalos sobre la forma del histograma, así como de añadir o quitar datos.

Proporciona también tablas de frecuencia para el histograma elegido, así como la media y mediana.

Es posible también visualizar el efecto de los valores atípicos, tanto sobre el histograma como sobre la media y mediana.

3.3. Recursos en Internet

2. Creacion de gráficos interactivamente



<http://nces.ed.gov/nceskids/Graphing/>

Usando esta página los alumnos pueden crear y modificar a su gusto una variedad de gráficos estadísticos, proporcionando los datos de entrada, que podrían ser datos tomados en clase por los alumnos.

Los gráficos son interactivos y una vez creados es posible cambiar el formato o colores, suprimir o añadir nuevos datos.

Los gráficos pueden ser impresos para ser utilizados en los proyectos por los estudiantes.

4. Conflictos en el aprendizaje. Instrumentos de evaluación

Uno de los estudios más completos de evaluación de la comprensión de la idea de probabilidad en los niños es el de Green. A continuación incluimos algunos de sus ítemes que contemplan tres aspectos diferentes:

El lenguaje de probabilidad: comprensión de los términos que usamos para referirnos al azar y la probabilidad.

- Razonamiento combinatorio: capacidad de enumerar todos los casos en un experimento aleatorio.
- Razonamiento probabilístico propiamente dicho.

Ítem 1. Escribe una palabra o frase que signifique lo mismo que:

- a) Imposible
- b) Posible
- c) Igual posibilidad
- d) Poca posibilidad
- e) Muy probable

Este es un ítem de lenguaje y el orden de dificultad es el siguiente: a) b) d) e) c) para los niños de 11-12 años. Los porcentajes de acierto varían entre el 80% en la parte a) y el 50% en la parte c).

Ítem 2. En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe en un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

- a) Es más probable que el nombre sea de un niño.
- b) Es más probable que el nombre sea de una niña.
- c) Es igual de probable que el nombre sea de un niño o de una niña.
- d) No lo se.

Este es un ítem de razonamiento probabilístico y evalúa la comprensión de la regla de Laplace q
en este caso no se aplica al ser los sucesos no equiprobables.

El índice de aciertos en los niños de 11-12 años es el 63%.

4. Conflictos en el aprendizaje. Instrumentos de evaluación

Item 3. Cuando se lanza un dado, ¿qué número o números son más difíciles de obtener? ¿o son todos iguales?

Este es un ítem de razonamiento probabilístico y evalúa las creencias subjetivas de que algunos números son más difíciles de obtener que otros. Aproximadamente el 20% de los niños de entre 11-12 años piensan que al lanzar un dado el cinco es el número más difícil de obtener.

Item 4. María y Esteban juegan a los dados. María gana un euro si el dado sale 2, 3, 4, 5 o 6. ¿Cuánto debe ganar Esteban para que el juego sea equitativo.

Este es un ítem de razonamiento combinatorio y también evalúa la comprensión de la idea de juego equitativo. Sólo el 45% de los chicos entre 11 y 12 años sabe resolver el problema.

Item 5. Se pidió a algunos niños lanzar una moneda 150 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Anotaron con la letra C la aparición de una cara y con + una cruz. Estos son los resultados de Daniel y Diana:

Daniel: c+c++cc++cc+c+c++c++c+ccc+++ccc++c++c+c+c++cc+ccc+
c+c+cc+++cc++c+c++cc+c++cc+c++cc+cc+c+++c++cc++c++
c+c+cc+c++cc+c+c++ccc+cc++c+c++cc+++c+++c+c++ccc++

Diana: +cc+++c++++c+cc+++cc+cc+++cc+ccc+++c++++++c+c+c+c+
+++ccccc+ccc+c+cc+ccccc+ccc+++ccc+c+ccccccccc++c+
ccccccc+++++cccc++c+c+cc+cc+cc++++++c+cc++ccc++ccc

¿Hicieron trampas Daniel o Diana? ¿Por qué?

Este es un ítem de razonamiento probabilístico y solo el 30 % de los niños da la solución correcta (Diana).

Los resultados no mejoran en los adultos quienes dan respuestas parecidas.

Se supone que Diana hace trampas porque la serie tiene rachas largas, sin embargo, esto es lo que suele suceder en una serie de resultados aleatorios.

Es interesante que los niños, sin embargo, pueden mostrar muchas ideas correctas sobre probabilidad con este ítem, por ejemplo:

- Contar las caras y cruces en cada secuencia y comparar con el resultado teórico $\frac{1}{2}$.
- Argumentar que los resultados aleatorios son impredecibles.
- Argumentar que la secuencia de Daniel es demasiado ordenada para ser aleatoria

4. Conflictos en el aprendizaje. Instrumentos de evaluación

Ítem 6. La probabilidad de que nazca un varón es $1/2$. A lo largo de un año completo, habrá más días en los cuales al menos el 60% de los nacimientos corresponden a varones:

- a) en un hospital grande (100 nacimientos al día)
- b) en un hospital pequeño (10 nacimientos al día)
- c) no hay ninguna diferencia.

Este ítem es de razonamiento probabilístico y evalúa la comprensión del efecto que el tamaño de la muestra tiene sobre un experimento aleatorio. Sabemos que la probabilidad de nacer varón es $1/2$. Este resultado puede variar, pero es más probable que varíe en una muestra pequeña, porque es menos fiable. Por tanto, la respuesta correcta es la b). De nuevo, tanto niños como adultos fallan en este ítem, donde el índice de aciertos es sólo el 20%.

5. Taller de didáctica

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didáctica

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con las ideas de azar y probabilidad.
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

5. Taller de didáctica

5.2. Análisis de respuestas a tareas de evaluación

A. Analizar los conceptos matemáticos puestos en juego en los ítems siguientes y estudiar las posibles interpretaciones erróneas del enunciado así como las posibles concepciones que lleven a una respuesta errónea.

B. Diseñar una situación de aprendizaje que permita concienciar a los alumnos de sus ideas erróneas respecto a estos problemas.

Ítem 1. La probabilidad de que un niño nazca varón es aproximadamente $1/2$.
¿Cuál de las siguientes secuencias de sexos es más probable que ocurra en seis nacimientos?

- a) VHHVHV;
- b) VHHHHV;
- c) las dos son igual de probables.

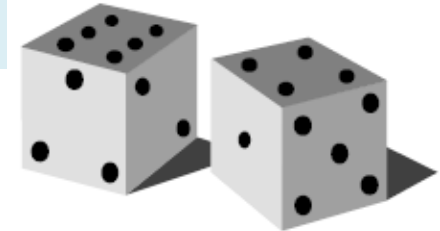
Item 2. En dos cajas, etiquetadas como A y B, se introducen las siguientes cantidades de canicas rojas y azules:

Caja	Rojas	Azules
A	6	4
B	60	40

¿Cuál caja da más probabilidad de obtener una bola azul?

Item 3.

- a) Al lanzar dos dados, ¿qué es más probable obtener, 5 en uno y 6 en otro, o 6 en ambos dados?
- b) Al lanzar una moneda, ¿qué es más probable obtener, cara en una y cruz en otra, o cara en ambas?
- c) Al lanzar dos dados, ¿qué es más probable, obtener el mismo número en los dos, o diferentes números?



Item 4. Responde si estás de acuerdo con las siguientes afirmaciones y por qué:

- a) José procura entrar en clase, cada día, poniendo primero el pié derecho.
Cree que esto aumenta sus posibilidades de obtener buena nota.
- b) Lola rellenó en cierta ocasión un boleto de lotería con los siguientes números: 1, 7, 13, 21, 22, 36, y resulta que ganó. Como consecuencia piensa que debe jugar siempre el mismo grupo de número, porque de este modo ganará.
- c) Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir.
- d) Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganada nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: “La lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces, y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima”.

5. Análisis de entrevistas a niños

Considera el juego siguiente:

Te propongo un juego, y tú me dices si es justo o no: Con una baraja, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tú ganas 1 pts. y si sale una carta distinta, yo gano 1 pts. ¿Es justo?

Analiza la siguiente entrevista a un niño, indicando si su razonamiento es correcto

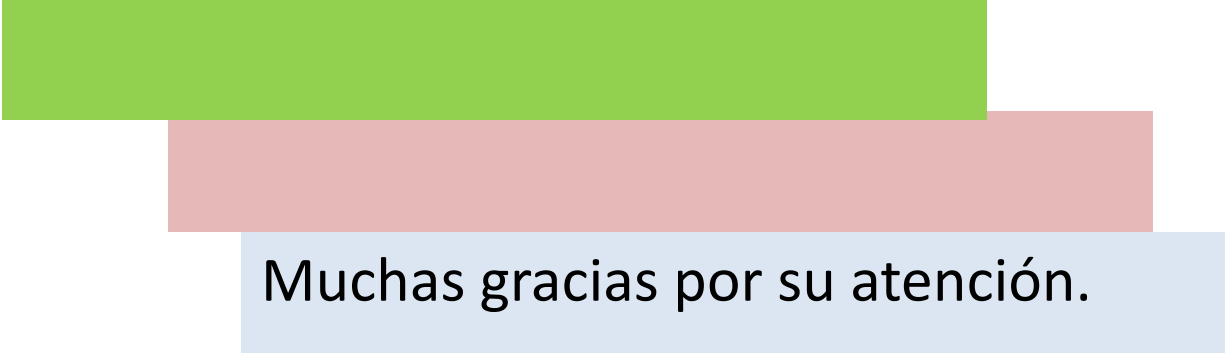
J.M (10 años, 11 meses): *No, no, porque tú lo tienes más fácil. Si a ti te sale una de bastos, te la llevas, te sale una de copas, te la llevas, te sale una de cualquier cosa que no sea oros y te la llevas.*

E: *Entonces, ¿cómo cambiaríamos el premio para que fuese justo?*

J.M: *Pues, que cada uno se lleve dos palos.*

E: *Bueno, pero en vez de cambiar las reglas de las cartas, vamos a cambiar el dinero del premio.*

J.M: *Pues, tú te llevas una y yo me llevaría tres.*



Muchas gracias por su atención.