ESTIMACIÓN PUNTUAL

Dr. Cristian Carvajal Muquillaza

Universidad de Playa Ancha

Contenido

1 Estimación Puntual

2 Métodos de Estimación
- Método de los Momentos
- Método de Máxima Verosimilitud
- Método de Evaluación de los Estimadores

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Estimación Puntual

Definición (Estimación Puntual)

*Un **estimador puntual** es cualquier función $W(X_1, X_2, ..., X_n)$ de la muestra; es decir, cualquier estadístico es un estimador puntual.*

Métodos de Estimación

Métodos de Estimación

1. Método de los Momentos
2. Método de Máxima Verosimilitud

Método de los Momentos

Definición (Método de los Momentos)

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a (n), desde una población con pdf o pmf $f(x|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$. Los estimadores por el método de los momentos son encontrados igualando los k momentos poblacionales con los k momentos muestrales y resolver el sistema:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^1 = E(X_i^1)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = E(X_i^k)$$

Método de los Momentos

Ejemplo 1:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a (n), desde una población con distribución Exponencial (θ), es decir $X \sim Exp(\theta)$. Encuentre un estimador para θ, utilizando el Método de los Momentos.

Método de los Momentos

Ejemplo 2:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a (n), desde una población con distribución Binomial (k, p), es decir $X \sim Bin(k, p)$. Encuentre un estimador para k y p, utilizando el Método de los Momentos.

Método de Máxima Verosimilitud

Definición (Función de Verosimilitud)

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ *una m.a (n), desde una población con pdf o pmf* $f(x|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$. *La función de Verosimilitud está definida por:*

$$L(\theta|x) = L(\theta_1, ..., \theta_k|x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta_1, ..., \theta_k)$$

Método de Máxima Verosimilitud

Definición (Método de Máxima Verosimilitud)

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a (n), desde una población con función de Verosimilitud $L(\theta|x)$, el estimador de máxima verosimilitud para θ es el valor $\hat{\theta}_{MV}$ que maximiza la verosimilitud (probabilidad), es decir:

$$L(\hat{\theta}_{MV}|x_1, ..., x_n) = \max_{\theta} L(\theta_1, ..., \theta_k|x_1, ..., x_n)$$

Si $L(\theta|x)$ es diferenciable en θ_i, un posible candidato para ser estimador de máxima verosimilitud son los valores de $\theta_1, ..., \theta_k$ que resuelven la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(\theta|x) = 0, \quad i = 1, ..., k.$$

Método de Máxima Verosimilitud

Ejemplo 1:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a (n), desde una población con distribución Poisson (λ), es decir $X \sim Pois(\lambda)$. Encuentre un estimador de Máxima Verosimilitud para λ.

Ejemplo 2:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a (n), desde una población con distribución Normal $(\mu, 1)$, es decir $X \sim N(\mu, 1)$. Encuentre un estimador de Máxima Verosimilitud para μ.

Método de Máxima Verosimilitud

Ejemplo 3:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a (n), desde una población con distribución Uniforme $(0, b)$, es decir $X \sim U(0, b)$. Encuentre un estimador de Máxima Verosimilitud para b.

Método de Evaluación de los Estimadores

Definición (Error Cuadrático Medio (MSE))

*El **Error Cuadrático Medio (MSE)** de un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ, es la función de θ definida por:*

$$E_\theta \left[\hat{\theta} - \theta\right]^2$$

Método de Evaluación de los Estimadores

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right] &= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta})+\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2+2\left((\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta)\right)+\left(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta)\right]+\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\right.\right. \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2\right]+2(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta)\overbrace{\mathbb{E}(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))}^{=\mathbb{E}(\hat{\theta})-\mathbb{E}(\hat{\theta})=0}+\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta\right)\right. \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2\right]+\mathbb{E}_\theta\left[\left(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta\right)^2\right] \\
&= \mathrm{Var}(\hat{\theta})+\mathrm{sesgo}(\hat{\theta},\theta)^2
\end{aligned}
$$

Método de Evaluación de los Estimadores

Definición (Insesgadez)

Sea $\hat{\theta}$ el estimador puntual del parámetro θ. Diremos que $\hat{\theta}$ es un estimador ***insesgado*** *de θ si:*

$$\mathbb{E}_\theta\left[\hat{\theta}\right] = \theta$$

Corolario

Si $\hat{\theta}$ es un ***estimador insegado*** *de θ, entonces:*

$$\mathbb{E}_\theta\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right] = Var_\theta\hat{\theta}$$