Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Modelo Sintético de Geometría Euclidiana Plana

[Pedagogía en Matemática]

Ronald Manríquez

Agosto 2023-1

Geometría de las proporciones

Definiciones

- Se considera la razón *entre dos segmentos* a la razón que existe entre las medidas de ellos.
-
-

Definiciones

- Se considera la razón *entre dos segmentos* a la razón que existe entre las medidas de ellos.
- Dos segmentos son proporcionales a otros dos, cuando la razón que existe entre las medidas de los dos primeros es igual a la razón de las medidas de los otros dos.

Definiciones

- Se considera la razón *entre dos segmentos* a la razón que existe entre las medidas de ellos.
- Dos segmentos son proporcionales a otros dos, cuando la razón que existe entre las medidas de los dos primeros es igual a la razón de las medidas de los otros dos.
- El máximo común divisor (m.c.d.) entre dos números: se divide el mayor por el menor. Si el residuo de esta división es cero, el número menor es el m.c.d. entre ellos. Si existe residuo, se divide el divisor por cada residuo tantas veces hasta que el residuo sea cero y el último divisor empleado es el m.c.d.
  Ejemplo. m.c.d$\{195, 30\}$=5

Sean m y n las medidas de dos segmentos. Para encontrar la máxima común medida entre ellos, se emplea un procedimiento análogo al presentado anteriormente; es decir, la medida menor m, se copia sobre el segmento de medida n tanta veces como sea posible. Se procede de misma la manera con el segmento restante sobre el segmento de medida m sucesivamente, hasta que no quede segmento restante. La medida del último segmento obtenido es la medida común.

Sean m y n las medidas de dos segmentos. Para encontrar la máxima común medida entre ellos, se emplea un procedimiento análogo al presentado anteriormente; es decir, la medida menor m, se copia sobre el segmento de medida n tanta veces como sea posible. Se procede de misma la manera con el segmento restante sobre el segmento de medida m sucesivamente, hasta que no quede segmento restante. La medida del último segmento obtenido es la medida común.

Si tienen común medida, se dice que los segmentos son *conmensurables*. Si esta común medida no existe, se dice que los segmentos son ıinconmensurables.

Ejemplo

Resultados

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Teorema

En un segmento $\overline{AB}$ existe un solo punto en su interior cuyas distancias a los extremos del segmento están en una razón dada.

Resultados

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Teorema

En un segmento $\overline{AB}$ existe un solo punto en su exterior cuyas distancias a los extremos del segmento están en una razón dada.

Resultados

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Corolario

Dados dos puntos A y B sobre una recta, existen en esta recta dos puntos y solo dos, que dividen al segmento $\overline{AB}$ en una razón dada.

Defınción

Dados cuatro puntos sobre una recta de modo que dos de ellos dividan interior y exteriormente al segmento formado por los otros dos, estos cuatro puntos son *puntos armónicos*.

Defininción

Dividir armónicamente un segmento, es dividir interior y exteriormente al segmento en una razón dada.

Para dejar establecido que un segmento $\overline{AB}$ queda dividido armónicamente por dos puntos C y D (ver figura), basta probar que se cumple la proporción $CB : CA = DA : DB$. La proporción resultante es una proporción armónica.

Figura: División armónica.

Para dejar establecido que un segmento $\overline{AB}$ queda dividido armónicamente por dos puntos C y D (ver figura), basta probar que se cumple la proporción $CB : CA = DA : DB$. La proporción resultante es una proporción armónica.

Figura: División armónica.

Los puntos A y B son puntos conjugados armónicos con respecto a los puntos C y D, y recíprocamente.

Teorema de Thales

Teorema (Lema)

Si un conjunto de rectas paralelas determinan segmentos congruentes sobre una recta dada, entonces también determinan segmentos congruentes en cualquier otra recta a la que también intersecten.

Problema

Dividir un segmento dado $\overline{AB}$ en n partes congruentes.

Teorema General de Thales

Si un conjunto de rectas paralelas intersectan a otras dos rectas dadas, determinan sobre ellas segmentos proporcionales.

Teorema recíproco del teorema de Thales

Si en dos rectas dada l y l' se consideran dos conjuntos de puntos ordenados, $L = \{A, B, C, \ldots\}$y $L' = \{A', B', C', \ldots\}$ en cada una de ellas tales que:

1. los segmentos que tienen por extremos los puntos correspondientes son proporcionales y
2. las rectas $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$,

entonces son paralelas todas las otras rectas construidas por cada par de puntos correspondientes.

Corolario

Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, y que interseca a los otros dos lados o a sus rayos opuestos, determina sobre ellos segmentos proporcionales

Recíproco del Corolario previo

Si una recta determina sobre dos de los lados de un triángulo segmentos proporcionales, entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.

Teorema

Si los lados de un ángulo (o los rayos opuestos a sus lados) se intersecan por rectas paralelas, los segmentos de estas paralelas comprendidos entre los lados del ángulo (o de sus rayos opuestos), son entre sí como las medidas de los segmentos cuyos extremos son el vértice del ángulo y los puntos de intersección de las paralelas con los lados del ángulo (o sus rayos opuestos).

Construir la cuarta proporcional geométrica entre los segmentos de medidas a, b y c.

Dividir interiormente un segmento dado en la razón $m : n$.