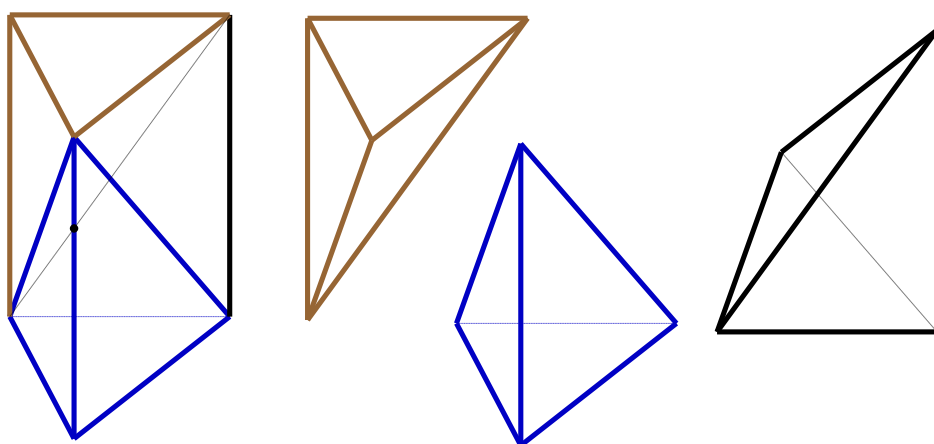


ESTUDIO AXIOMÁTICO DE LA GEOMETRÍA

Eudoxio



AUTORES

**RAMÓN ROBRES LÓPEZ
JOSÉ GONZÁLEZ CAMPOS
RONALD MANRÍQUEZ PEÑAFIEL**

PRIMAVERA DE 2021

Dedicatoria

A mis maestros, por la formación que me entregaron.

A mis ex alumnos maestros, para que desarrollen las personas de sus alumnos mediante el estudio de la geometría.

A los alumnos de pedagogía en matemática, futuros maestros, para que se les facilite el estudio de la geometría, parte importante del saber matemático.

Presentación

La etimología de la palabra geometría (geo, tierra; methron, medida) indica que la aplicación que se hizo de su estudio, a través del tiempo, ha sido una constante en casi todas las civilizaciones humanas: Mesopotamia (Babilonia), Egipto, India, China, Grecia y otras.

Se considera la geometría como la parte de la matemática que estudia las propiedades de las representaciones mediante figuras de los conceptos geométricos y de las relaciones que existen entre ellas.

En un comienzo, el estudio y análisis de estas relaciones se hicieron usando el método de experimentación y de ensayo – error, para deducir las propiedades de las formas y medidas geométricas en forma empírica.

Fueron los griegos, a partir del siglo VI a. C, los que establecieron las reglas lógicas del método deductivo para la formulación de lo que actualmente conocemos como la Geometría Euclidiana o Geometría Axiomática.

El método axiomático consiste en establecer relaciones mediante definiciones, axiomas y teoremas, que permitan desarrollar el quehacer del pensamiento puro. Es la manera de confirmar las conclusiones mediante la demostración lógica.

El inicio de este estudio formal de la geometría, se remonta hacia el año 600 a. C con Thales de Mileto. Más tarde, Pitágoras establecerá su famosa Escuela, en la cual se estudia la filosofía, la música, y las ciencias naturales, mediante la demostración matemática. Sin embargo, es el genio de Euclides, fundador de la escuela de matemática de Alejandría, hacia el año 450 a. C, en su gran obra *Los Elementos*, de fama universal, quien establece los fundamentos del método de demostración, en una recolección de trabajos matemáticos conocidos hasta la época.

Es por eso, lo que nosotros conocemos como Geometría Euclidiana, consiste en el estudio de la geometría, utilizando el método propio de la matemática, el método deductivo.

Desde el punto de vista pedagógico, siempre el estudio de la geometría ha sido considerado como el procedimiento más adecuado para desarrollar, en las personas que la aprenden, el pensamiento lógico y la capacidad crítica y creativa.

Los hombres estamos viviendo en un mundo cambiante y de gran desafío, y sólo podrán sobrevivir en él las personas que sepan pensar y razonar de manera correcta. Es por esto que, en este texto, se presenta a los estudiantes de pedagogía y a los profesores de matemática, en un lenguaje actualizado y en forma rigurosa, los diferentes contenidos de las unidades de Geometría correspondientes a los programas de Educación Media, con el fin de que se comprendan cabalmente en que consiste el desarrollo del método axiomático y tengan una luz de cómo deben proyectar su quehacer pedagógico, en la formación de sus alumnos, mediante la rigurosidad del pensamiento lógico - matemático.

El estudio formal de la geometría, permitirá conocer y comprender las estructuras conceptuales y facilitar el estudio de los distintos contenidos.

El diseño del presente texto corresponde a la recopilación, como ya se ha mencionado, de definiciones, teoremas, demostraciones y construcciones geométricas, correspondientes a las unidades programáticas del nivel de Educación

Básica y Media.

Consta de tres secciones: 1ª Geometría Axiomática. 2ª Geometría de las proporciones y transformaciones y 3ª Geometría Axiomática del espacio (Estereometría).

En cada una de estas secciones, los teoremas se presentan con su hipótesis, tesis y demostración. La figura correspondiente a la demostración, destaca los datos de la hipótesis, generalmente con segmentos gruesos de color azul y con segmentos delgados, de color rojo, los elementos que corresponden a la demostración propiamente tal.

Algunos teoremas solamente están enunciados. Se deja abierta la posibilidad para que cada lector desarrolle la demostración, como ejercicio de aplicación de los conceptos que deberían haber sido asimilados.

Igualmente, a continuación de cada una de las secciones, se propone un taller con un conjunto de demostraciones y de problemas de aplicación referente a cada una de los contenidos analizados y estudiados.

Se podrá objetar que la presentación de este texto es tradicional. Pero esto no es tan así. Es cierto que los avances tecnológicos permiten en la actualidad, acceder un sinnúmero de software que sirven para facilitar la comprensión y el aprendizaje conceptual. Pero, para que el profesor aproveche al máximo las potencialidades de los mismos y sea capaz de detectar los errores que puedan presentar, es necesario que domine plenamente los contenidos, de modo que esté capacitado para transmitir a sus alumnos los conceptos en forma correcta y guiarlos en el buen manejo de los software existentes y en la mejor manera de utilizar la información existente.

Para finalizar, es necesario argumentar que, a partir de mediados del siglo XIX y durante todo el siglo XX, además del enfoque euclidiano, se ha presentado el estudio de las relaciones geométricas desde otros puntos de vista, dando origen a las geometrías no – euclidianas, por una parte y, por otra, el estudio de la geometría como objeto de los Grupos Afines.

INDICE

Capítulo Previo: *Objeto y uso de la lógica. Generalidades de la geometría*

Demostración. Teorema. Lema. Corolario	9
La geometría. Generalidades	10
El método axiomático	10

Capítulo I: *Los conceptos primitivos de la geometría y sus Axiomas*

Conceptos primitivos	12
Sistemas de axiomas	13
De incidencia	13
De orden	14
De separación	16
Taller 1-1	17
Los ángulos	19
Propiedades del paralelismo y aplicaciones	21
Taller 1-2	25

Capítulo II *Los polígonos*

Generalidades	26
El triángulo.	
Sus elementos	27
Relaciones angulares	29
Relación de congruencia	30
Propiedades del triángulo isósceles	32
Taller 2-1	35
Lugares geométricos	37
Taller 2-2	39
Puntos singulares del triángulo Teoremas	39
Relación de desigualdad en el triángulo	41
Taller 2-3	44
Construcciones de triángulos	45
Taller 2-4	47
Los cuadriláteros. Clasificación	48
Propiedades de los paralelogramos y aplicaciones	50
Taller 2-5	52

Capítulo III *La circunferencia y el círculo*

Definición y elementos	53
Relación entre cuerdas y arcos	54
Posiciones relativas entre rectas y circunferencias	56
Relaciones angulares en el círculo. Arco capaz de un ángulo	60
Tangentes a una circunferencia	61
Taller 3-1	65

Capítulo IV *Geometría de las proporciones*

Razones y proporciones	66
Segmentos proporcionales	67

Taller 4-1	68
Teorema de Thales y aplicaciones	69
Taller 4-2	75
Circunferencia de Apolonio	76
Semejanza de las figura y de los triángulos en el plano	79
Polígonos semejantes	82
Taller 4-3	84
Relaciones métricas en el triángulo rectángulo	85
Relaciones métricas en el círculo. Potencia de un punto	87
Taller 4-4	90

Capítulo V *Polígonos regulares inscritos y circunscritos*

Generalidades	91
Medida de los lados en los polígonos regulares inscritos o circunscritos, en función del radio de la respectiva circunferencia.	92
Cálculo de π por el método de los perímetros	98

Capítulo VI *Relación de equivalencia de las figuras en el plano*

Superficie, área y relación de equivalencia	101
Equivalencia de áreas en los paralelogramos y en los triángulos	101
Medida de las áreas de las figuras	103
Comparación de áreas en los polígonos semejantes	105
Longitud de la circunferencia y área del círculo	108
Taller 6-1	101

Capítulo VII *Transformaciones de las figuras en el plano*

Generalidades. Isometrías	113
Traslaciones	113
Rotaciones	115
Simetrías	116
Taller 7-1	117

Capítulo VIII *Estereometría*

Introducción axiomática	119
Rectas y planos perpendiculares	120
Rectas paralelas en el espacio	123
Proyecciones. Distancia. Ángulo de inclinación	124
Rectas y planos paralelos	126
Planos paralelos	127
Diedros. Planos perpendiculares. Rectas alabeadas	129
Ángulos sólidos o poliédricos	131
Simetría y congruencia	133
Taller 8-1	135

Los poliedros

Generalidades sobre poliedros	136
Superficie prismática. Los prismas	136
Los paralelepípedos	138
Superficie piramidal. Las pirámides	139
Poliedros regulares	142
Taller 8-2	144

Cuerpos redondos

Superficie de los cuerpos de rotación	146
Cilindro y superficie cilíndrica	147
Cono y superficie cónica	148
Secciones cónicas	150
La esfera y superficie esférica	151
Posiciones recíprocas de rectas, planos y superficie esférica	153
Figuras inscritas y circunscritas a una esfera	155
Extensión y medida de la superficie de los sólidos	158
Medida del área de la superficie lateral de los sólidos	159
Taller 8-3	164
Extensión y medida de los volúmenes de los sólidos	
Relación de equivalencia entre la medida de los volúmenes de los sólidos	165
Principio de Cavalieri	165
Teorema de Eudoxio	167
Medida de los volúmenes de los sólidos. Los poliedros	170
Medida de los volúmenes de los sólidos. Cuerpos redondos	173
Semejanza en el espacio	177
Teorema de Guldino referido a la superficie de rotación	179
Taller 8-4	182

Símbolos usados en el texto.

$\angle$	Ángulo.
Δ	Triángulo.
#	Paralelogramo.
$\odot(A, b)$	Circunferencia con centro en A y radio b.
$A \leftrightarrow B$	Se une A con B.
$l \perp l'$	l es perpendicular con l'.
$l // l'$	l es paralela con l'.
$\cong$	Congruente.
$\approx$	Semejante.
$\acute{a} \Delta ABC$	Área del ΔABC .
$m \angle ABC$	Medida del $\angle ABC$.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
$\overleftrightarrow{AB}$	Recta AB.
$\overrightarrow{AB}$	Rayo AB.

“La filosofía está escrita en ese grandísimo libro abierto ante los ojos; quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto”.
(Galileo Galilei)

Capítulo Previo

Objeto y uso de la lógica. Generalidades de la geometría.

Para iniciar el estudio de la geometría es conveniente recordar los conceptos de proposición, implicación, y equivalencia.

Uno de los objetivos de la lógica es proporcionar las reglas deductivas, en base a las cuales, partiendo de una premisa verdadera, se puede deducir una conclusión verdadera.

En otras palabras, la lógica estudia el modo de razonar correctamente.

Sea una afirmación verdadera por sí (sin demostrar) o por deducción, esta se expresa mediante el lenguaje verbal o escrito. Es por esto que, podemos deducir, que el objetivo de la lógica es el lenguaje. La *proposición* es un conjunto de términos lingüísticos, para los cuales tiene sentido hablar de verdadero o falso. El término *enunciado* lo consideraremos como sinónimo de proposición. Las categorías verdadero o falso son exhaustivas y excluyentes.

La *implicación (condicional)* es la operación lógica mediante la cual, dadas dos proposiciones p, q se forma con ellas una nueva proposición $r, r = p \Rightarrow q$, que se considera falsa si p es verdadero y q falsa, siendo verdadera en los otros casos.

La *doble implicancia (bicondicional)* es la operación lógica mediante la cual, dadas dos proposiciones p, q se forma con ellas una nueva proposición $r, r = p \Leftrightarrow q$, que se considera verdadera si ambas son verdaderas o falsas, siendo falsas en los otros casos. $p \Leftrightarrow q$ implica decir $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$.

Demostración. Teorema. Lema. Corolario.

Si de la veracidad de una proposición p se deduce, *mediante el razonamiento*, la veracidad de otra proposición q , en matemática se dice que la implicación $p \Rightarrow q$ *queda demostrada* y a dicha proposición se le da el nombre de *teorema*. La componente p (premisa o antecedente) es la *hipótesis* y la componente q (consecuente o conclusión) es la *tesis* del teorema. La *demostración* es el conjunto de etapas del paso lógico desde la hipótesis a la tesis. Un *corolario* es un teorema que se deduce inmediatamente de la demostración de otro teorema.

Algunos postulados fundamentales de la lógica:

1. *Principio de identidad*: Cualquier cosa es idéntica (igual) a sí misma y sólo a sí misma. $A = A$. El signo “=” se lee “idéntico” o “es igual”. La escritura $A = B$ significa que A y B significan la misma cosa o bien, A y B son dos nombres distintos de la misma cosa.
2. *Principio de no contradicción*: una cosa no puede ser y no ser al mismo tiempo. Para nuestro caso, significa que una proposición no puede ser verdadera o falsa al mismo tiempo. O sea, las proposiciones p y $\bar{p}$ no pueden ser al mismo tiempo verdaderas. Si esto ocurre, se dice que la teoría es contradictoria.
3. *Principio del tercero excluido*: Una proposición es verdadera o falsa. De una proposición se puede decir que es verdadera o falsa, pero no “casi verdadera” o “más verdadera que falsa”.

Proposiciones equivalentes: Dado el teorema directo $p \Rightarrow q$, la proposición $q \Rightarrow p$ se llamará *teorema inverso o recíproco* de $p \Rightarrow q$ y si ambos son verdaderos, se anotará $p \Leftrightarrow q$, que se puede leer: de p se deduce q y viceversa, de p se deduce recíprocamente q , p equivale a q , p es verdadero si y solo si es verdadero q .

Ejemplos: 1) $p \Leftrightarrow q$: ABC es un triángulo equilátero si y solo si ABC es un triángulo equiángulo.

- 2) $r \Leftrightarrow s$: si dos rectas son paralelas, entonces forman ángulos correspondientes congruentes y viceversa.

- 3) $t \Leftrightarrow u$: la proposición “un punto P pertenece a la mediatriz de un segmento” implica recíprocamente la proposición “un punto que es equidistante de los extremos del segmento”.

Contra ejemplo: $p \Leftrightarrow q$: “un número n es múltiplo de 4” no es equivalente a “un número n es par”.

Si “ $p \Rightarrow q$ ” es un teorema directo, entonces $q' \Rightarrow p'$ se llama teorema contrapuesto contrario del recíproco.

Se puede demostrar que “si un teorema es verdadero, es verdadero también su contrapuesto”.

Ejemplo: “si un paralelogramo es equilátero, las diagonales son perpendiculares”; esto es equivalente a decir: “si las diagonales de un paralelogramo no son perpendiculares, entonces no es un paralelogramo equilátero”.

La geometría. Generalidades.

La geometría que nosotros presentamos es la llamada Geometría Euclidiana o Axiomática. Es por eso que presentamos una breve biografía del gran geómetra Euclides.

Euclides(330 a.C. - 275 a.C.)

Matemático griego. Poco se conoce a ciencia cierta de la biografía de Euclides, pese a ser el matemático más famoso de la Antigüedad. Es probable que Euclides se educara en Atenas, lo que explicaría con su buen conocimiento de la geometría elaborada en la escuela de Platón, aunque no parece que estuviera familiarizado con las obras de Aristóteles. Enseñó en Alejandría, donde alcanzó un gran prestigio en el ejercicio de su magisterio durante el reinado de Tolomeo I Sóter; se cuenta que éste lo requirió para que le mostrara un procedimiento abreviado para acceder al conocimiento de las matemáticas, a lo que Euclides repuso que no existía una vía regia para llegar a la geometría (el epigrama, sin embargo, se atribuye también a Menecmo como réplica a una demanda similar por parte de Alejandro Magno).

La tradición ha conservado una imagen de Euclides como hombre de notable amabilidad y modestia, y ha transmitido así mismo una anécdota relativa a su enseñanza, recogida por Juan Estobeo: un joven principiante en el estudio de la geometría le preguntó qué ganaría con su aprendizaje; Euclides, tras explicarle que la adquisición de un conocimiento es siempre valiosa en sí misma, ordenó a su esclavo que diera unas monedas al muchacho, dado que éste tenía la pretensión de obtener algún provecho de sus estudios.

Euclides fue autor de diversos tratados, pero su nombre se asocia principalmente a uno de ellos, los *Elementos*, que rivaliza por su difusión con las obras más famosas de la literatura universal, como la Biblia o el *Quijote*. Se trata, en esencia, de una compilación de obras de autores anteriores (entre los que destaca Hipócrates de Quíos), que las superó de inmediato por su plan general y la magnitud de su propósito.

De los trece libros que la componen, los seis primeros corresponden a lo que se entiende todavía como geometría elemental; en ellos Euclides recoge las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver lo que hoy se consideran ejemplos de ecuaciones lineales y cuadráticas, e incluyen también la teoría general de la proporción, atribuida tradicionalmente a Eudoxio.

Los libros del séptimo al décimo tratan de cuestiones numéricas y los tres restantes se ocupan de geometría de los sólidos, hasta culminar en la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas, que había sido ya objeto de estudio por parte de Teeteto.

La influencia posterior de los *Elementos* de Euclides fue decisiva; tras su aparición, se adoptó de inmediato como libro de texto ejemplar en la enseñanza inicial de la matemática, con lo cual se cumplió el propósito que debió de inspirar a Euclides. Más allá, incluso, del ámbito estrictamente matemático, fue tomado como modelo, en su método y exposición, por autores como Galeno, para la medicina, o Spinoza, para la ética.

De hecho, Euclides estableció lo que, a partir de su contribución, había de ser la forma clásica de una proposición matemática: un enunciado deducido lógicamente a partir de unos principios previamente aceptados. En el caso de los *Elementos*, los principios que se toman como punto de partida son veintitrés definiciones, cinco postulados y cinco axiomas o nociones comunes.

La naturaleza y el alcance de dichos principios han sido objeto de frecuente discusión a lo largo de la historia, en especial por lo que se refiere a los postulados y, en particular, al quinto (postulado de las paralelas). Su condición distinta respecto de los restantes postulados fue ya percibida desde la misma Antigüedad, y hubo diversas tentativas de demostrarlo como teorema; los esfuerzos por hallarle una demostración prosiguieron hasta el siglo XIX, cuando se puso de manifiesto que era posible definir geometrías consistentes, llamadas «no euclidianas», en las que no se cumpliera la existencia de una única paralela trazada a una recta por un punto exterior a ella.

La principal característica del estudio de la geometría, como en el de la matemática en general, debe ser el carácter personal, en el marco del pensamiento crítico, del razonamiento lógico deductivo, sin dejar de lado la analogía y la inducción.

En el estudio de las ciencias es usado, generalmente, el “Método Axiomático”, presentado por el gran filósofo Aristóteles en el siglo IV a.C., en el cual afirma que la ciencia se apoya en la definición, y demostración, único método para propiciar la investigación científica.

En el *Método Axiomático*, usado en la construcción de una teoría, se consideran las siguientes componentes:

1. Los conceptos, que son de dos tipos:
 - a) *Conceptos no definidos o primitivos*, los cuales se admiten como existentes y no son definidos.
 - b) *Conceptos definidos o definiciones*. Son los conceptos no primitivos. Se dice que se define un concepto cuando se establece una relación con otros conceptos de significado conocido, clarificando o describiendo. Son proposiciones que exponen con claridad las características y diferencias de los objetos.
2. *Las propiedades* que tienen los conceptos primitivos y las definiciones son:
 - a) Los *axiomas*, que son propiedades que se aceptan de por sí, sin demostrarlas, como verdaderas. Los axiomas establecen las reglas fundamentales que se deben seguir en la elaboración de una teoría.
 - b) Los *teoremas* que son las propiedades de los conceptos que es necesario demostrar para considerarlas verdaderas. Para demostrar los teoremas, se aplican los conceptos primitivos, las definiciones, los axiomas y otros teoremas ya demostrados. Una vez demostrados, los teoremas podrán ser usados como propiedades de los conceptos.

Capítulo I

Los conceptos primitivos de la geometría y sus axiomas.

Los conceptos primitivos de la geometría o elementos fundamentales, son los conceptos de *punto*, *línea* y *plano*.

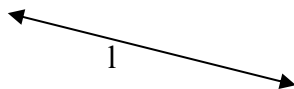
A modo de descripción, puede afirmarse:

Punto: Es una idea o abstracción que, simplemente expresa la idea de ubicación

Se dibuja designándolo por una letra mayúscula.



Línea: También es una abstracción, como lo son, en general, todas las figuras geométricas. Se denominan las líneas con letras minúsculas.



Las líneas son infinitas en extensión.

El plano se considera como un conjunto infinito de puntos continuos, en todas direcciones. Se denominará (P).



Definición: Cualquier conjunto de puntos se llamará *figura geométrica*.

Se dirá que un punto pertenece a la figura o que la figura contiene al punto. Si el punto no pertenece a la figura el punto será externo a ella. De manera que un punto único será una figura.

Definición: *Espacio* es la figura que contiene todos los puntos y, por lo tanto, a todas las figuras.

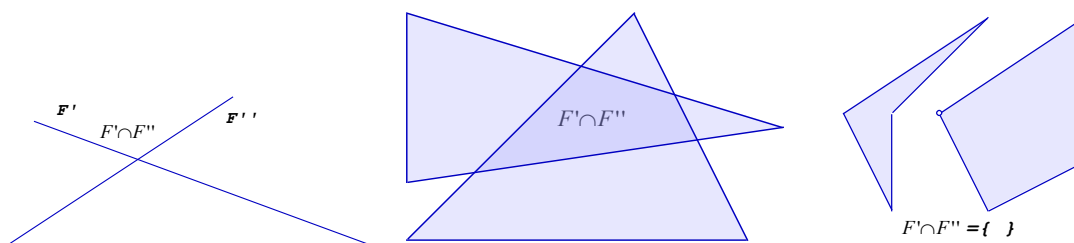
Afirmaciones: Sea E el espacio, (P) un plano y l una recta.

(1) $(P) \subset E$: (P) se puede considerar como un subconjunto infinito de puntos de E .

(2) $l \subset (P)$: l se puede considerar como un subconjunto infinito de puntos de (P) .

Dos figuras que tienen puntos en común se llamarán incidentes o secantes y la figura formada por estos puntos será su intersección.

Si se escribe, por ejemplo, $F = F' \cap F''$, el símbolo “ $=$ ” significa, en este caso, la igualdad lógica o identidad.



Si todos los puntos de una figura están en un mismo plano, se dirá que es plana. En caso contrario se dirá que es sólida.

Sistemas de Axiomas.

En geometría los axiomas nos permitirán demostrar los teoremas o propiedades de las figuras geométricas.

En el desarrollo del estudio de la geometría distinguimos los siguientes tipos de axiomas:

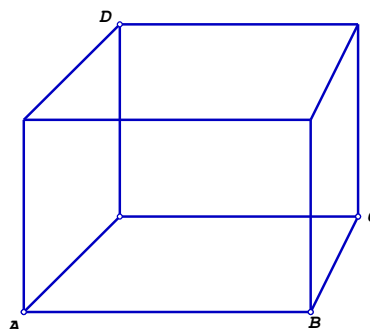
- de incidencia o de pertenencia de puntos: establecen una relación simple e inmediata entre los elementos primitivos puntos, rectas, planos; estas relaciones se refieren a pertenecer, incidir, “estar en”, “tener en común”.
- de orden: expresan la relación de ubicarse un punto antes o después de otro en una recta.
- de separación
- de la congruencia y de la medida
- del paralelismo.

Para facilitar el desarrollo de las distintas unidades que se estudiarán, se numerarán los axiomas.

A 1 Axiomas de incidencia (pertenencia).

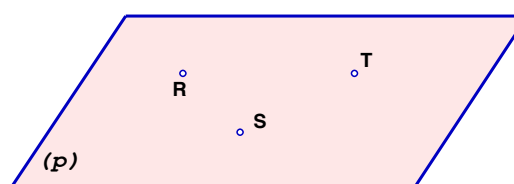
Axioma 1:

El espacio existe y consta de, al menos, cuatro puntos que no pertenecen a un mismo plano (no son *coplanarios*).



Axioma 2:

Un plano contiene, a lo menos, tres puntos que no pertenecen a una misma recta (no son *colineales*).



Axioma 3 Un recta contiene a lo menos dos puntos.

Axioma 4: (*axioma de la recta*) Dados dos puntos cualesquiera, existe sólo una recta que los contiene.

La recta que contiene a los puntos A y B se anotará $\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{BA}$ También se puede designar las rectas con letras minúsculas, p, q, r....



Otra forma de enunciar el Axioma 4: Dos puntos distintos pertenecen a una y solo a una recta. O bien: si dos puntos son distintos, entonces pertenecen a una y solo una recta o por dos puntos pasa una única recta.

Axioma 5: Tres puntos que no pertenecen a una misma recta (no son colineales), pertenecen a uno y solo a un plano (determinan un único plano).

Axioma 6: Si dos planos se intersecan, su intersección es una recta.

Axioma 7: Si dos puntos pertenecen a un plano, entonces la recta que los contiene también pertenece al plano (todos los puntos de la recta pertenecen al mismo plano).

A 2. Axiomas de orden

El concepto primitivo de orden expresa la idea de “estar tras de”, referido a puntos que pertenecen a una misma recta y están situados en orden natural o inverso (precede o sigue).

Axioma 8: Dados dos puntos A y B de una recta, uno de ellos precede al otro o que el segundo precede al primero.

Axioma 9: Sean A, B y C puntos colineales y si A precede a B y B precede a C, entonces A precede a C.

Axioma 10: Si A precede a B, cualquier punto que preceda a A también precede a B. (La recta es un conjunto denso).

Axioma 11: No existe un primer ni último punto en una recta. (una recta es ilimitada por ambos lados).

Axioma 12: (*axioma de la distancia*): A cada par de puntos le corresponde un único número real no negativo.

Definición 1: La *distancia* entre dos puntos es el número obtenido al aplicar el axioma 12. Si A y B son dos puntos, entonces su distancia se anotará AB o BA.

Si A y B son el mismo punto, entonces $AB = 0$. La distancia entre dos puntos no depende del orden en que consideren los puntos.

Axioma 13: (*axioma de la regla*): Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales, de manera que:

1. existe una relación biunívoca entre los puntos de una recta numérica y el conjunto de los números reales;
2. la distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

Generalmente, a una correspondencia como la que se ha enunciado se llama *sistema de coordenadas*. Al número asignado a cada punto se llama *coordenada* del punto. Para medir una distancia se usa una regla graduada.

Definición : A, B y C son puntos colineales y si $AB + BC = AC$, entonces se dice que *B está entre A y C*.

Definición (*segmento*): Para dos puntos cualesquiera A y B, el segmento AB, que se designará $\overline{AB}$ o $\overline{BA}$, es el conjunto de los puntos A y B, y de todos los puntos que están entre A y B.



Según esta definición $\overline{AB} = \overline{BA}$. Esto es, $AB = BA$.

Para facilitar su escritura, las medidas se pueden expresar con letra

minúsculas: a, b, c...

Los puntos del segmento, distintos de A y B se llaman *puntos internos*.

Definición: Un punto C es el *punto medio* de $\overline{AB}$, si C está entre A y B y $AC = BC$



Se dice que el punto C *dimidia o biseca* a $\overline{AB}$.

Definición: Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son segmentos tales que la medida $AB = CD$, entonces se dice que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ *son congruentes*.

Esta relación se anotará $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

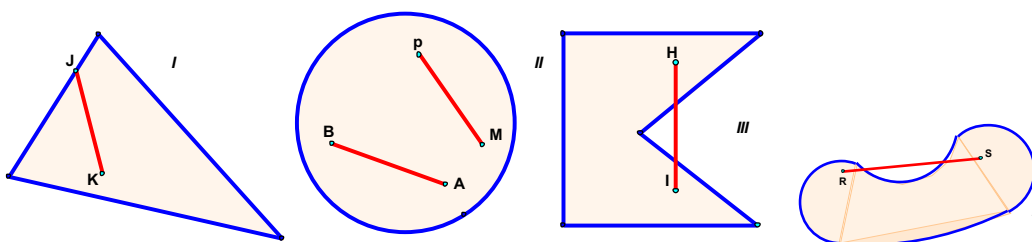
Sabiendo que las medidas de los segmentos son números reales no negativos y aplicando las propiedades de la igualdad, se puede demostrar que la congruencia de segmentos ($\cong$) cumple: 1. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (*Reflexividad*);

2. $(\overline{AB} \cong \overline{CD}) \Rightarrow (\overline{CD} \cong \overline{AB})$ (*Simetría*) y

3. $(\overline{AB} \cong \overline{CD}) \wedge (\overline{CD} \cong \overline{EF}) \Rightarrow (\overline{AB} \cong \overline{EF})$ (*Transitividad*).

Por lo tanto, $\cong$ es una relación de equivalencia.

Definición Un conjunto de puntos forma una *figura convexa* si contiene al segmento formado por cada uno de los pares de puntos de la figura. En caso contrario se dice que no es convexo. En las figuras I y II son convexas. II y IV no son convexas.



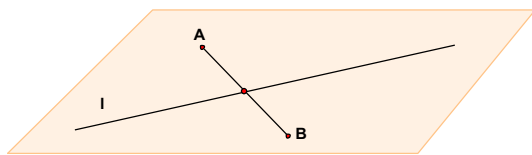
Las figuras convexas pueden ser extensas, o sea que sus puntos están en un mismo plano; por ejemplo, rectas, planos....

A 3. Axiomas de separación

Axioma 14: (*Axioma de separación*) a) *Separación de la recta*: Todo punto en una recta, forma dos figuras convexas sobre la recta llamadas semirrectas.

El punto, llamado *frontera*, que no pertenece a ninguna de las dos semirrectas.

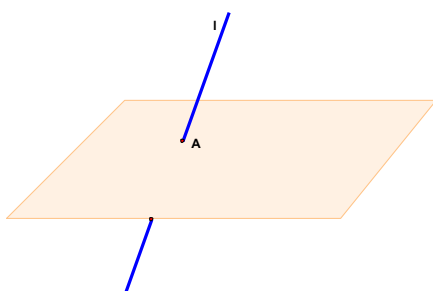
b) *Separación del plano*: Cualquier recta perteneciente a un plano, divide a éste



en dos figuras convexas, llamadas semiplanos, tales que: si un punto A está en uno de los semiplanos y el punto B en el otro semiplano, entonces $\overline{AB}$

interseca a la recta. La recta es la *arista*; ésta no pertenece a ninguno de los dos semiplanos.

c) *Separación del espacio*. Cualquier plano en el espacio, divide a éste en



dos figuras convexas, llamadas semiespacios, tales que: si un punto A está en uno de los semiespacios y el punto B en el otro, entonces $\overline{AB}$ interseca al plano en un punto. El plano es la *cara*, que no pertenece a ninguno de los semiespacios.

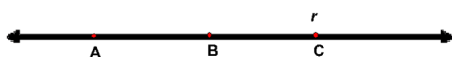
Definición: Dada una recta l y un punto A en ella, la figura formada por el punto A y una de las semirrectas determinadas por él, es un *rayo*.

Definición: Dados dos puntos A y B de una recta l , el rayo $\overrightarrow{AB}$, que se designará $\overrightarrow{AB}$, es la figura de puntos formados por $\overline{AB}$ y por todos los puntos C pertenecientes a la recta l de modo que B esté entre A y C. El punto A se llama extremo o punto frontera de $\overrightarrow{AB}$.



Una vez conocidos los diferentes axiomas, podemos demostrar algunas propiedades de los objetos geométricos ya definidos.

Teorema (*de la localización de puntos*) "Dado el rayo $\overrightarrow{AB}$ y r un número real positivo, existe solo un punto C en el rayo, tal que $AC = r$ ".



Hipótesis $\overrightarrow{AB}$ y r dados;

$C \in \overrightarrow{AB}$ y $AC = r$.

Tesis: C es punto único.

Demostración. 1. En $\overrightarrow{AB}$ se consideran coordenada de A = 0 y coordenada de B = s. (axioma de la regla).

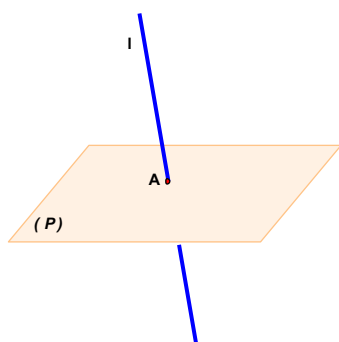
2. $AC = |r - 0| = r$ (definición valor absoluto).

3. Pero existe solo un punto en $\overrightarrow{AB}$ de coordenada r (Propiedad de los números reales).

4. Por lo tanto, existe solo un punto cuya distancia al punto A es r . (tesis).

Se puede demostrar el siguiente teorema "Todo segmento tiene solo un punto medio".

Teorema “Si una recta interseca a un plano que no la contiene, su intersección es un punto único”.



Hipótesis $(P) \cap l = \{A\}; l \not\subset (P)$

Tesis: A es punto único.

Demostración.

1. Supongamos que el plano (P) y l se intersecan en dos puntos A y B.
2. Por lo tanto (P) contiene a l (axioma 7).
3. Esto contradice la hipótesis, por lo tanto A es punto único.

Se puedes demostrar lo siguiente: Teorema “Dada una recta y un punto fuera de ella, existe un solo plano que contiene a ambos”.

Teorema “Dadas dos rectas que se intersecan, existe un solo plano que contiene a ambas”.

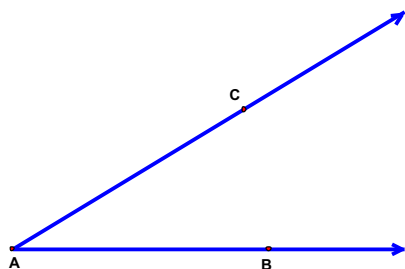
Taller 1-1

1. Veamos como anda su lenguaje. Justifique por qué están defectuosos los siguientes enunciados: a) Un cuadrado es algo que no es redondo. b) Un triángulo rectángulo es un triángulo cuyos ángulos son rectos. c) Un triángulo equilátero es un triángulo con tres lados y tres ángulos y cuyos lados tienen el mismo largo y cuyos ángulos tienen la misma medida. d) Un triángulo es cuando tres rectas se intersecan entre sí. e) Los teoremas se demuestran solamente a base de definiciones y de conceptos primitivos.
2. Denomine todos los segmentos determinados por cuatro puntos A, B, C, D, pertenecientes a una misma recta.
3. Determine cuántas regiones en un plano, determinan cuatro rectas que se intersecan de dos en dos.
4. Si $\overline{AB}$ es un segmento y O un punto de él de modo que $\overline{OA} \cong \overline{OB}$. Demuestre que este punto es único. Se considera, además, otro punto C a continuación de O y de B. Escriba las desigualdades relativas a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$: a) de modo que el primer miembro de la desigualdad sea menor que el segundo. b) de modo que el primer miembro sea mayor que el segundo.
5. Dados dos puntos diferentes P y Q, ¿cuales son las figuras que se pueden determinar en todas las rectas que contienen a los puntos P y Q?
6. Suponga que A, B, C son puntos colineales. Indique la relación que debe existir entre $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ si C está entre A y B.
7. Si P, Q, R son tres puntos en una circunferencia, ¿puede decirse cuál de los puntos está entre los otros dos?
8. A, B, C son puntos colineales; determine cuáles de los siguientes enunciados pueden ser ciertos: a) C está entre A y B y B está entre A y C.
b) B está entre A y C y B está entre C y A c) A está entre B y C y C está entre A y B.
d) C está entre A y B y C está entre B y A e) A está entre C y B y A está entre B y C
9. Si A, B, C son tres puntos distintos, ¿siempre se va a cumplir que

- $AB + BC = AC$? Analice todos los casos y averigüe si puede ocurrir que $AB + BC > AC$. En este último caso, ¿cuál es la relación entre A, B, C?
10. Cuatro puntos A, B, C, D, son colineales de manera que $AC > AB$ y $DB < BC$. Haga el dibujo de los cuatro puntos cumpliendo las condiciones dadas. Explique si habrá más de un orden posible.
 11. Los pares de letras del siguiente enunciado representan o bien números, o rectas, o segmentos, o rayos. Complete con los símbolos apropiados en el enunciado después de efectuar el dibujo de los puntos correspondientes. “ $AB + BC = AC$. DB contiene los puntos A y C pero DB no contiene ni al punto A ni al punto C. A pertenece a DB, pero C no”.
 12. Dibujar dos puntos para los cuales la intersección de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ es el conjunto vacío pero la intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ es exactamente un punto.
 13. Con el enunciado del ejercicio 12, averigüe qué sucede si las rectas coinciden.
 14. Para cada uno de los siguientes enunciados considere el conjunto de puntos de una recta cuyas coordenadas x satisfacen la condición dada:

a) $x \leq 3$	b) $x = 1$	c) $5 \geq x \geq 0$	d) $x \geq 1$	e) $x = -4$	f) x
≤ -2 o $x \geq 2$	g) $ x \leq 2$	h) $ x \geq 0$			

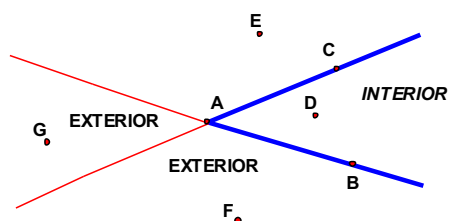
Los ángulos



La palabra ángulo la anotaremos con el símbolo $\angle$.

Definición: $\angle BAC$ o $\angle CAB$ es la unión de los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que tienen el mismo punto frontera u origen y no están en la misma recta.

Los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son *los lados* del ángulo y el punto frontera común A es *el vértice* de él. Para facilitar la nominación de los ángulos se acostumbra emplear letras griegas o letras minúsculas.



En la figura se indican *el interior* y *el exterior* de un ángulo.

Definición Sea el $\angle ABC$. Un punto D, en el plano que forma el ángulo, está en el *interior* del $\angle ABC$, si los puntos D y C están en el mismo lado de $\overrightarrow{AB}$ y si los puntos D y B están en el mismo lado de $\overrightarrow{AC}$. El *exterior* del $\angle ABC$ es el conjunto de todos los puntos en el plano del ángulo, que no están en el ángulo ni en su interior.

Como se ha definido el ángulo como un conjunto de puntos, no importa el orden en que se nombre el ángulo. Además, en el estudio de la geometría euclidiana, tampoco se considera la orientación del ángulo, como cuando se emplean las relaciones trigonométricas.

Medidas de los ángulos

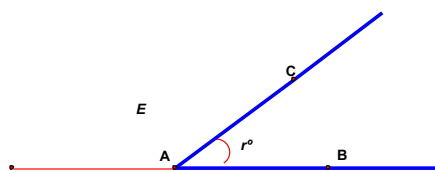
Generalmente en geometría se trabaja con las medidas de los ángulos. Tal como los segmentos se miden con una regla con coordenadas, los ángulos se miden con un instrumento llamado transportador, que es una regla en de semicírculo dividida entre 0 y 180 grados. El número de grados de un ángulo es su medida.

Axioma 15: (*de la medida de un ángulo*) A cada ángulo le corresponde un número entre 0 y 180.

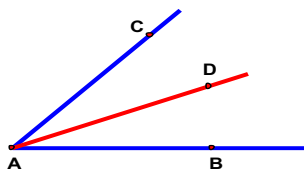
Observación: El sistema de coordenadas usado es esta definición es un sistema sexagesimal. También en algunas ocasiones se usa el sistema centesimal, en el cual la medida de un ángulo es considerada como un número entre 0 y 200.

Definición: El número dado por el postulado de la medida de un $\angle ABC$ es la *medida* de él y se escribe $m \angle ABC$.

Axioma 16 (*de la construcción del ángulo*) Si $\overrightarrow{AB}$ es rayo de la arista del semiplano E, para cada número $0 < r < 180$, existe solo un rayo $\overrightarrow{AC}$ en E, tal que $m \angle CAB = r$.



Axioma 17 (de la adición de ángulos)

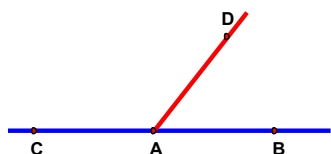


Si el punto D está en el interior del $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

Se dice que $\angle BAD$ y $\angle DAC$ son *contiguos o colaterales*.

Definición Si el punto D está en el interior del $\angle BAC$ y $\overrightarrow{AD}$ es un rayo tal que $m\angle BAD = m\angle DAC$, entonces $\overrightarrow{AD}$ es la *bisectriz* del $\angle BAC$. (Ver figura anterior).

Definición: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ es un rayo cualquiera,



entonces, $\angle BAD$ y $\angle DAC$ forman un *par lineal*. Se dice que estos ángulos son *adyacentes*.

Definición: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180, entonces los ángulos son *suplementarios* y cada uno de ellos es el *suplemento* del otro.

Axioma 18 Si dos ángulos forman un par lineal (o son adyacentes), entonces son suplementarios.

Definición: Si los ángulos de un par lineal tienen igual medida, entonces cada uno de ellos es un *ángulo recto*.

Se define, también, un *ángulo recto es el ángulo cuya medida es 90*.

Definición: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo recto, entonces los rayos son *perpendiculares*. En adelante se anotará $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Del mismo modo se pueden definir *segmentos o rectas perpendiculares* ($\overline{AB} \perp \overline{AC}$ o $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$).

Definición: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90, entonces los ángulos son *complementarios* y cada uno de ellos es el *complemento* del otro.

Definición: Si la medida de un ángulo es menor de 90, entonces el ángulo es *agudo* y si es mayor de 90 es *obtuso*.

Definición. Si las medidas de dos ángulos son iguales, entonces los ángulos son *congruentes*. $\angle ABC \cong \angle DEF \Leftrightarrow m\angle ABC = m\angle DEF$.

Como en la relación de congruencia de los segmentos, la relación de congruencia de ángulos también es una relación de equivalencia.

Se pueden demostrar los siguientes teoremas:

“Si dos ángulos son complementarios, entonces ambos son agudos”.

“Todo ángulo es congruente consigo mismo”.

“Dos ángulos rectos son congruentes”.

“Si dos ángulos son al mismo tiempo congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es recto”.

“Los suplementos de dos ángulos congruentes, son congruentes”.

“Si dos ángulos tienen suplementos congruentes, entonces son congruentes”

“Los complementos de dos ángulos congruentes, son congruentes”.

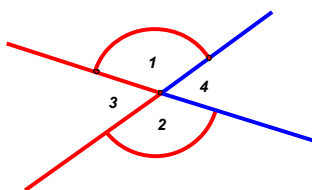
“Si dos ángulos tienen complementos congruentes, entonces son congruentes”

“Si dos rectas al intersectarse forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos”.

“Si dos ángulos son congruentes, sus mitades también son congruentes”.

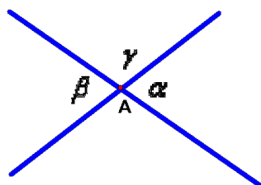
Definición:

Dos ángulos son *opuestos por el vértice*, si sus lados son rayos opuestos.



$\angle 3$ y $\angle 4$ son ángulos opuestos por el vértice.
También lo son $\angle 1$ y $\angle 3$.

Teorema “Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes”.



Hipótesis α y β son ángulos opuestos por el vértice.

Tesis: $\alpha \cong \beta$.

Demostración

1. Se considera el ángulo auxiliar γ .
2. $m \gamma + m \alpha = 180$ (forman par lineal).
3. $m \gamma + m \beta = 180$ (forman par lineal).
4. De 2) y 3) $m \gamma + m \alpha = m \gamma + m \beta$.
5. Luego, $m \alpha = m \beta$ (propiedad uniforme $\Rightarrow$).
5. Por lo tanto $\alpha \cong \beta$ (Definición de $\cong$ de $\angle s$). (Tesis).

Propiedades del paralelismo

Las posiciones posibles de dos rectas en el espacio son: 1. *Intersectarse* en un punto. 2. Pueden no intersectarse y no ser coplanarias. En este caso son *rectas alabeadas*. 3. Las dos rectas están en el mismo plano y no intersectarse. En este caso son *rectas paralelas*.

Definición: Dos rectas son *paralelas* si a) son coplanarias y b) no se intersectan.

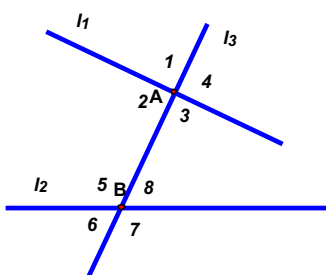
Se usará el símbolo $//$ para el paralelismo. $(l_1 // l_2 \Leftrightarrow l_1$ y l_2 son coplanarias y $l_1 \cap l_2 = \emptyset$

Axioma 19 (V Postulado de Euclides) Por un punto que no está en una recta dada, pasa sólo una recta paralela a la recta dada.

Es interesante la larga historia de este postulado. Durante 2000 años el estudio de la geometría se basó en el tratado *Los Elementos de Euclides*, escrito alrededor del año 300 a.C. Muy entrada la Edad Media, ya se empezó a buscar una demostración del enunciado del Quinto Postulado. En el siglo XIX se da inicio al estudio de las Geometrías no-euclidianas partiendo de la negación de la existencia de este postulado.

Ángulos formados por dos rectas intersecadas por una tercera recta

Sean las rectas l_1 , l_2 y l_3 coplanarias. l_3 es una recta transversal a las otras dos, es decir las interseca en los puntos A y B. En la figura obtenida se forman ocho ángulos que se denominan de la siguiente manera:



Ángulos internos: 2, 5, 3, 8.
 Ángulos externos: 1, 6, 4, 7.
 Ángulos alternos internos: 2 y 8; 3 y 5.
 Ángulos alternos externos: 1 y 7; 4 y 6.
 Ángulos correspondientes: 1 y 5; 2 y 6; 3 y 7; 4 y 8.
 Conjuguados internos: 2 y 5; 3 y 8.
 Conjuguados externos: 1 y 6; 4 y 7.

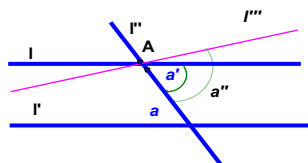
Se puede demostrar el siguiente teorema “Si dos rectas se intersecan por una transversal y forman dos ángulos alternos congruentes, entonces los otros dos ángulos alternos internos también son congruentes.

Axioma 20 Si dos rectas paralelas son intersecadas por otra recta transversal, entonces forman ángulos alternos internos congruentes.

Se puede demostrar el siguiente teorema “Si dos rectas paralelas son intersecadas por otra recta transversal, entonces forman ángulos alternos externos congruentes, ángulos correspondientes congruentes y ángulos contrarios suplementarios”.

Propiedad directa del paralelismo: “Si dos rectas paralelas son intersecadas por otra recta transversal, entonces forman ángulos alternos internos congruentes, ángulos alternos externos congruentes, ángulos correspondientes congruentes y ángulos contrarios suplementarios”.

Teorema (Propiedad recíproca del paralelismo) “Si dos rectas son intersecadas por otra recta transversal formando ángulos alternos internos congruentes, ángulos alternos externos congruentes, ángulos correspondientes congruentes y ángulos contrarios suplementarios, entonces las rectas son paralelas”.



Hipótesis $\angle a \cong \angle a'$ y alternos internos entre las rectas l y l' .

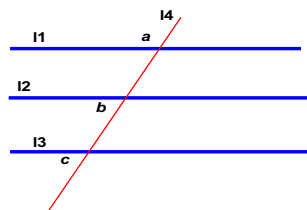
Tesis: $l \parallel l'$.

Demostración

1. Por el punto A se puede construir solo una recta paralela a l' .
2. Supongamos que l no es paralela a l' , por lo tanto lo será otra recta l'' .
3. Si $l'' \parallel l'$ entonces $\angle a'' \cong \angle a'$ ($\angle$ s alternos internos entre l'' s).
4. De 3) e hipótesis: $\angle a' \cong \angle a''$ (propiedad transitiva de la $\cong$).
5. Esto es contradicción, ya que $\angle a'$ es una parte del $\angle a''$.

6. Esta contradicción resultó de 2).
7. Por lo tanto $l // l'$ (Tesis).
8. Análogamente se demuestran las otras partes del teorema.

Teorema “Dos rectas paralelas a una tercera recta, son paralelas entre sí”.



Hipótesis $l_1 // l_2$ y $l_3 // l_2$.

Tesis. $l_1 // l_3$.

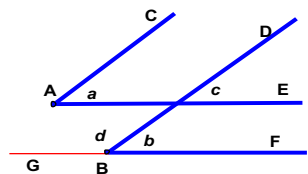
Demostración

1) Se construye la recta l_4 transversal a las rectas l_1 , l_2 , y l_3 .

- 2) $\angle a \cong \angle b$ ($\angle$ s correspondientes entre $//$ s) (por hipótesis)
- 3) $\angle a \cong \angle c$ ($\angle$ s correspondientes entre $//$ s) (por hipótesis)
- 4) Por lo tanto de 2) y 3) $\angle c \cong \angle b$ (propiedad transitiva $\cong$) y además, son ángulos correspondientes entre l_3 y l_2 .
- 5) Luego $l_3 // l_2$ (propiedad recíproca del $//$). (Tesis).

Definición: Si dos ángulos son rectos o agudos u obtusos, son *ángulos de igual naturaleza*. En caso contrario, son *de distinta naturaleza*,

Teorema (Ángulos de lados $//$ s) “Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, entonces son congruentes si son de misma naturaleza o son suplementarios si son de distinta naturaleza”.



Hipótesis $\overrightarrow{AC} // \overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{AE} // \overrightarrow{BF}$.

$\angle a$ y $\angle b$ de misma naturaleza.

$\angle a$ y $\angle d$ de distinta naturaleza.

Tesis: a) $\angle a \cong \angle b$. b) $m \angle a + m \angle d = 180^\circ$.

Demostración a)

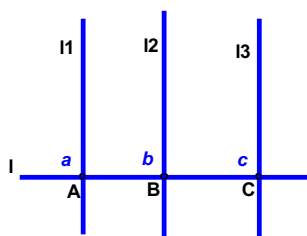
- 1) Se considera el $\angle c$ formado por $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{BD}$.
- 2) $\angle a \cong \angle c$ ($\angle$ s correspondientes entre $//$ s)
- 3) $\angle b \cong \angle c$ ($\angle$ s correspondientes entre $//$ s)
- 4) Por lo tanto de 2) y 3) $\angle a \cong \angle b$ (Tesis)

Demostración b)

- 1) $m \angle b + m \angle d = 180^\circ$ (forman par lineal).
- 2) Pero $\angle a \cong \angle b$ (Dem. a).
- 3) Reemplazando en 1): $m \angle a + m \angle d = 180^\circ$ (Tesis).

Corolario: Si dos rectas son paralelas, toda recta perpendicular a una de ellas, será también perpendicular a la otra.

Teorema “Si dos o más rectas son perpendiculares a una misma recta en el plano, entonces son paralelas entre sí”.



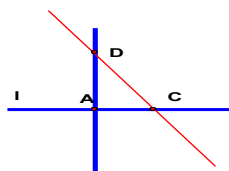
Hipótesis $l_1 \perp l$; $l_2 \perp l$; $l_3 \perp l$.

Tesis: $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$.

Demostración.

- 1) $\angle a \cong \angle b \equiv \angle c$ (90° , por hipótesis)
- 2) Además los ángulos son correspondientes entre l_1 , l_2 , l_3 y l .
- 3) Por lo tanto: $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ (propiedad recíproca del $\parallel$) (Tesis).

Teorema “Desde un punto que no pertenece a una recta dada, se puede construir una y solo una recta perpendicular a la recta dada”.



Hipótesis l recta dada y D punto no perteneciente a ella. $\overrightarrow{DA} \perp l$

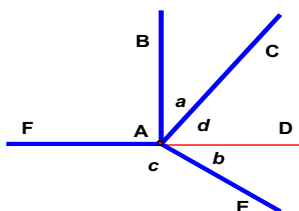
Tesis: $\overrightarrow{DA}$ es única recta $\perp$ a l .

Demostración

- 1) Su pongamos que $\overrightarrow{DA}$ no es la única perpendicular a la recta l por el punto A .
- 2) Se construye también $\overrightarrow{DC} \perp l$.
- 3) De hipótesis, 2) y teorema $\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{DA}$.
- 4) Pero $\overrightarrow{DC} \cap \overrightarrow{DA} = \{D\}$.
- 5) De 3) y 4) contradicción que se deduce de 1).
- 6) Por lo tanto $\overrightarrow{DA}$ es única recta $\perp$ a l . (Tesis).

Se puede demostrar el siguiente teorema: “Desde un punto que pertenece a una recta dada, se puede construir una y solo una recta perpendicular a la recta dada”.

Teorema (Ángulos de lados $\perp$ s) “Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, entonces son congruentes si son de misma naturaleza o son suplementarios si son de distinta naturaleza”.



Hipótesis $\overrightarrow{FA} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AE}$.

$\angle a$ y $\angle b$ de misma naturaleza y $\angle a$ y $\angle c$ de distinta naturaleza.

Tesis: a) $\angle a \cong \angle b$. b) $m \angle a + m \angle c = 180^\circ$.

Demostración a)

- 1) Se considera $\angle d$ como ángulo auxiliar.
- 2) De hipótesis: $m \angle a + m \angle d = 90^\circ$ y $m \angle b + m \angle d = 90^\circ$.
- 3) Luego, $\angle d$ es complemento del $\angle a$ y del $\angle b$.
- 4) Por lo tanto $\angle a \cong \angle b$. (Tesis).

Demostración b)

- 1) En la figura $m \angle d + m \angle c = 180^\circ$ (forman par lineal)
- 2) Reemplazando tesis a) en 1) resulta: $m \angle a + m \angle c = 180^\circ$ (Tesis).

Taller 1 -2

1. Averigüe si la relación de congruencia es una relación de equivalencia.
2. Sea $\overline{AB}$ un segmento dado. Demuestre que la distancia desde el punto medio del segmento a cualquier punto sobre el rayo $\overrightarrow{AB}$, es igual a la semisuma de las distancias desde este punto a cada uno de los extremos del segmento.
3. Sobre un rayo, a partir de su punto frontera A, se consideran dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de modo que $AB > AC$ y siendo M y N sus puntos medios; demuestre que $MN = \frac{1}{2}(AB - AC)$.
4. Sean A, B, C, D cuatro puntos colineales, consecutivos según el orden alfabético, tales que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Demuestre que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y que los dos segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ tienen el mismo punto medio.
5. Demuestre que las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.
6. Enuncie la propiedad recíproca y demuéstrela.
7. Sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto O se trazan los rayos $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ de modo que se forman $\angle BOC$, $\angle COD$ y $\angle DOA$ congruentes entre sí y, además $\overrightarrow{OE} \perp \overleftrightarrow{AB}$. a) Determine la razón de la medida del $\angle AOD$ con respecto a la del ángulo recto; b) Demuestre que $\overrightarrow{OE}$ es bisectriz del $\angle COD$.
8. Tres rayos que tienen el mismo punto frontera, dividen al plano según tres ángulos congruentes. Demuestre que el rayo opuesto a cada uno de los lados es la bisectriz del ángulo que forman los otros dos.
9. Demuestre que las bisectrices de dos ángulos alternos internos entre paralelas son también paralelas.
10. Demuestre que si las medidas de dos ángulos agudos son desiguales, entonces las medidas de sus complementos son también desiguales, pero de sentido contrario.
11. Decida y demuestre, si es verdadera, la siguiente aseveración: “si dos ángulos son suplementarios sus mitades son complementarios”.
12. Demuestre que las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son rayos opuestos.
13. Demuestre que el ángulo formado por la bisectriz de un ángulo con un rayo cualquiera trazado desde el vértice es congruente con la suma o la diferencia de los ángulos formados por dicho rayo con los lados del ángulo, según que el rayo sea exterior o interior al ángulo.
14. Aprovechando la relación de los ángulos correspondientes, construya por un punto P, perteneciente a uno de los lados de un ángulo, una paralela al otro lado.
15. Demuestre que si se tienen dos rectas paralelas y se construyen las bisectrices de los dos ángulos correspondientes en ellas, estas bisectrices son paralelas.
16. Demuestre que dos rectas que son perpendiculares a dos rectas que se intersecan, también se intersecan.

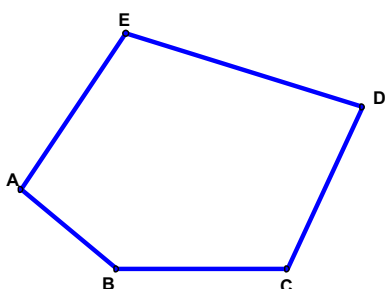
Capítulo II

Los polígonos

Generalidades sobre los polígonos

Definición: La figura en un plano, formada por la unión de n segmentos (con $n > 2$) que tengan un vértice en común, tal que ningún par de segmentos se intersequen y ningún par de segmentos con un extremo común pertenezcan a la misma recta, es un *polígono*.

La figura formada por un polígono es convexa.



Los segmentos que forman el polígono son sus *lados*. Los extremos comunes de los lados, son sus *vértices*. En cada vértice, el ángulo que forman los rayos a los cuales pertenecen los lados del polígono es un *ángulo interior*. Al ángulo adyacente a cada ángulo interior es un *ángulo exterior*.

Los vértices que no pertenecen a un mismo lado del polígono son *vértices opuestos*. El segmento que une dos vértices opuestos es una *diagonal* del polígono. Se puede demostrar que si el polígono tiene n lados, entonces el número d de diagonales que tiene el polígono es $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

Si se construye un polígono, el plano que lo contiene se divide en tres conjuntos de puntos: los puntos del polígono propiamente tal; los puntos que están en el interior del polígono, que son sus *puntos interiores*; los *puntos exteriores* al polígono, que son los puntos que no pertenecen ni al polígono ni a su interior.

Definición: La figura geométrica formada por la unión de los puntos del polígono y los de su interior, es la *región poligonal* o *superficie del polígono*.

Definición: El número real que corresponde a la medida de la superficie, es el *área* del polígono.

Definición: La suma de las medidas de los lados es el *perímetro* del polígono.

Se clasifican los polígonos según el número de lados:

Triángulo: polígono de 3 lados. Cuadrilátero: polígono de cuatro lados.

Pentágono: polígono de 5 lados. Hexágono: polígono de seis lados.

Heptágono: polígono de siete lados. Octógono u octágono: polígono de 8 lados.

Eneágono o nonágono: polígono de 9 lados. Decágono: polígono de 10 lados.

Dodecágono: polígono de 12 lados. Pentadecágono: polígono de 15 lados.

Icoságono: polígono de 20 lados.

Definición: Si un polígono tiene todos sus lados congruentes es un *polígono equilátero*.

Definición: Si un polígono tiene todos sus ángulos interiores congruentes es un *polígono equiángulo*.

Definición: Si un polígono es a la vez equilátero y equiángulo es un *polígono regular*. En caso contrario es *polígono irregular*.

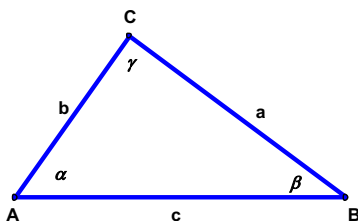
El triángulo.

Un triángulo es un polígono de tres lados.

Definición: Si A, B y C son tres puntos no colineales, la unión de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama *triángulo*.

Definición: Un punto está en el interior de un triángulo si está en el *interior* de cada uno de sus ángulos interiores. Será *exterior* al triángulo si no está ni en el triángulo ni el interior de él.

Sus elementos fundamentales son los mismos de cualquier polígono.



Se pueden designar los vértices y ángulos del triángulo de cualquier manera. Pero generalmente se designan los elementos del triángulo como aparecen en la figura, para

simplificar el enunciado de las propiedades y la nominación de los elementos característicos. Los vértices se designan con las letras A, B y C y sus ángulos respectivos α, β y γ . Las medidas de los lados opuestos a los vértices A, B y C son respectivamente a, b y c.

Cada uno de los lados puede ser *la base* del triángulo.

Si un lado no contiene a un vértice o no forma un ángulo del triángulo, es el *lado opuesto* a dicho ángulo o al vértice al que no pertenece al lado. Lo mismo se designa *ángulo opuesto* a un lado.

Definiciones: Si un triángulo tiene dos lados congruentes, es *triángulo isósceles*.

Si el triángulo tiene sus tres lados congruentes, es un *triángulo equilátero*. Un triángulo equilátero es isósceles.

Un triángulo para el cual ningún par de lados son congruentes es *triángulo escaleno*.

Definiciones: Si en un triángulo los tres ángulos son agudos, es *triángulo acutángulo*.

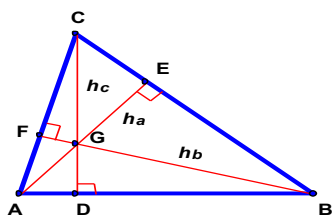
Si en un triángulo uno de sus ángulos es obtuso, es *triángulo obtusángulo*.

Si en un triángulo uno de sus ángulos es recto, es *triángulo rectángulo*. El lado opuesto al ángulo recto es *la hipotenusa*. Los otros dos lados son *los catetos*.

Elementos singulares o característicos de los triángulos

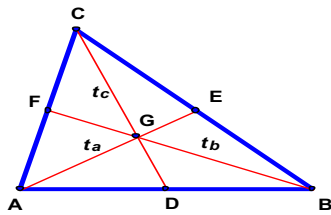
Además de los elementos que tiene el triángulo, como cualquier polígono, se definen los siguientes elementos que son propios de los triángulos.

Definición: El segmento construido desde uno de los vértices de un triángulo y perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto, es una *altura del triángulo*.



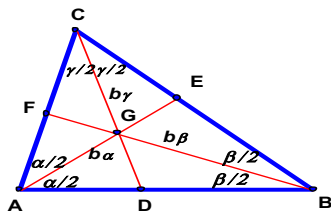
En la figura están construidas las tres alturas del $\triangle ABC$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{DC}$. La magnitud de la altura construida desde el vértice A hasta el lado a, AE, será h_a que se lee h sub a. Lo mismo $BF = h_b$ y $CD = h_c$.

Definición: El segmento que tiene como extremos un vértice de un triángulo y el punto medio del lado opuesto, es una *median*. En la figura han sido construidas la tres medianas



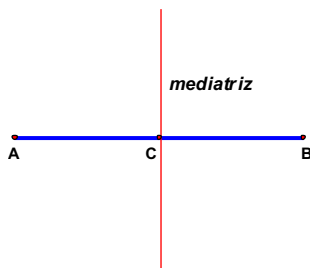
del $\triangle ABC$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{DC}$. La magnitud de la mediana construida desde el vértice A hasta el punto medio del lado a, AE será t_a que se lee t sub a. Lo mismo $BF = t_b$ y $CD = t_c$.

Definición: Un segmento que tiene como extremos un vértice de un triángulo y el punto de intersección de la bisectriz del ángulo interior del triángulo en dicho vértice, con el lado opuesto, es una *bisectriz del ángulo interior del triángulo*.

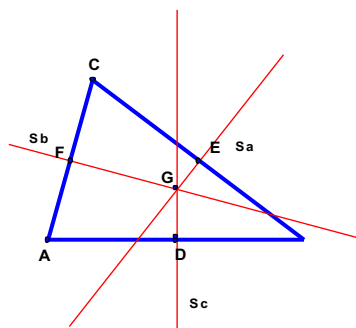


En la figura han sido construidas la tres bisectrices de los ángulos interiores del $\triangle ABC$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{DC}$. La magnitud de la bisectriz construida desde el vértice del ángulo α hasta el lado a, AE será b_α que se lee b sub α . Lo mismo $BF = b_\beta$ y $CD = b_\gamma$.

Definición: La recta perpendicular construida en el punto medio de un segmento, es la *mediatriz* del segmento.



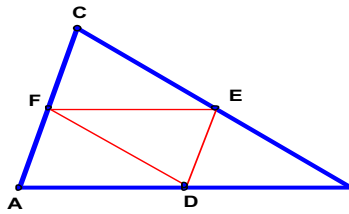
Definición: Una mediatriz correspondiente a un lado de un triángulo, es una *mediatriz del triángulo*.



En la figura han sido construidas la tres mediatrices del $\triangle ABC$. Los puntos E, F y D son los puntos medios de los lados a, b y c del triángulo y s_a , s_b y s_c son sus mediatrices

Observación: se puede observar en las respectivas construcciones, que cada uno de estos cuatro elementos de los triángulos se intersectan en un mismo punto. Más adelante, estas propiedades se demostrarán.

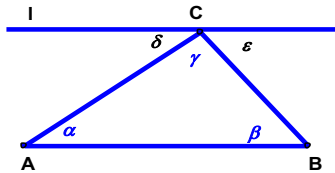
Definición: Un segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados de un triángulo, es un *segmento medio del triángulo*.



En la figura han sido contruidos los tres segmentos medios del $\triangle ABC$: $\overline{FD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$.

Relaciones angulares en el triángulo

Teorema “La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° ”.



Hipótesis α, β, γ son las medidas de los ángulos interiores del $\triangle ABC$.

Tesis: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Demostración

- 1) Se construye por el vértice C la recta $l \parallel \overline{AB}$. Se forman los ángulos de medidas δ y ε
- 2) Resulta.: $\alpha = \delta$ y $\beta = \varepsilon$ ($\angle$ s alternos internos entre $\parallel$ s).
- 3) Pero $\delta + \gamma + \varepsilon = 180^\circ$ (forman par lineal)
- 4) Reemplazando 2) en 3) resulta: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Corolarios. 1. La medida de cada ángulo interior de un triángulo es igual a 180° menos la suma de las medidas de los otros dos.

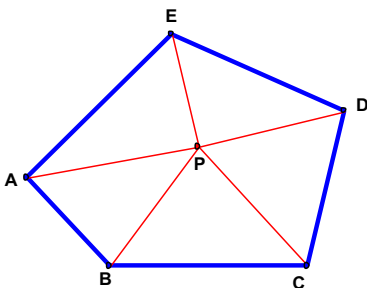
2. La suma de las medidas de dos ángulos interiores de un triángulo es 180° menos la medida del tercer ángulo.

3. Un triángulo siempre tiene a lo menos dos ángulos agudos.

4. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

5. Un triángulo no puede tener más que un ángulo recto o un ángulo obtuso.

Utilizando el teorema demostrado permite enunciar el teorema referente a la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono cualquiera. “La suma S de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $S = 180(n-2)$ ”.



Demostración

Se construye el punto P en el interior del polígono de n lados. Se une el punto P con los vértices formando n triángulos.

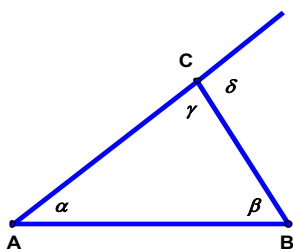
La suma S de las medidas de los ángulos interiores del polígono será $180 \cdot n$ menos la

suma de las medidas de los ángulos en el punto P, que es 360° (una circunferencia).

Por lo tanto $S = 180 \cdot n - 360 = 180(n - 2)$.

Corolario: En un polígono regular de n lados, la medida de cada ángulo interior α es, $\alpha = \frac{180(n-2)}{n}$.

Teorema “La medida de cada ángulo exterior de un triángulo, es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él”.



Hipótesis δ es la medida del ángulo exterior del $\triangle ABC$; α y β las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.

Tesis: $\delta = \alpha + \beta$

Demostración

- 1) $\delta + \gamma = 180^\circ$ (forman par lineal)
- 2) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (suma medidas ángulos interiores)
- 3) De 1) y 2): $\delta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$ (propiedad transitiva =).
- 4) Por lo tanto: $\delta = \alpha + \beta$ (propiedad uniforme =).

Corolario: La medida de un ángulo exterior de un triángulo es siempre mayor que la medida de cada ángulo exterior no adyacente a él.

Se pueden demostrar los siguientes teoremas: “La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es 360° ”

“La suma de las medidas de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360° ”.

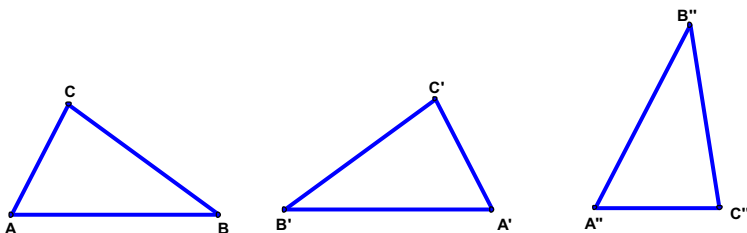
Corolario: Ningún polígono convexo puede tener más de tres ángulos agudos.

Relación de congruencia en los polígonos

Se ha definido anteriormente la relación de congruencia con respecto a los segmentos y a los ángulos. El término congruente o congruencia proviene del latín, que significa concordar o coincidir.

Definición: Si dos polígonos tienen sus lados y ángulos respectivamente congruentes, entonces son **polígonos congruentes**. Las figuras congruentes tienen la misma forma y el mismo tamaño.

La figura corresponde a la representación de tres triángulos congruentes.



Como los lados y ángulos de dos triángulos congruentes, son respectivamente congruentes, puede pensarse que las tres figuras se superponen completamente.

La palabra *respectivamente* u *ordenadamente*, es indispensable, ya que la ubicación de los vértices de los ángulos y lados congruentes es fundamental para establecer la relación de congruencia. Estos elementos serán los *elementos homólogos* de los polígonos congruentes

En la figura, los vértices correspondientes son $A \leftrightarrow A' \leftrightarrow A''$; $B \leftrightarrow B' \leftrightarrow B''$;

$C \leftrightarrow C' \leftrightarrow C''$. Lo mismo sucede con los lados $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{A'B'} \leftrightarrow \overline{A''B''}$ y los ángulos: $\angle A \leftrightarrow \angle A' \leftrightarrow \angle A''$; $\angle B \leftrightarrow \angle B' \leftrightarrow \angle B''$; $\angle C \leftrightarrow \angle C' \leftrightarrow \angle C''$.

Por lo tanto, la relación de congruencia entre los triángulos es:

$\triangle ABC \leftrightarrow \triangle A'B'C' \leftrightarrow \triangle A''B''C''$. Esto se anotará de la siguiente manera:

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \cong \triangle A''B''C''$.

Por supuesto, se puede afirmar que los elementos homólogos en triángulos congruentes, son congruentes.

Se ha explicado en forma intuitiva la relación de congruencia.

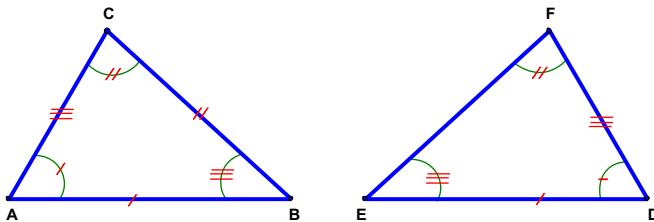
La relación de congruencia en los triángulos

Definición: Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia entre los vértices de dos triángulos. Si los pares de lados correspondientes y los pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la relación se llama una *congruencia entre los dos triángulos*.

Esta relación se anota $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, la que define las siguientes congruencias:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ o $AB = DE$; $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ o $BC = EF$; $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ o $AC = DF$; $\angle A \cong \angle D$ o $m\angle A = m\angle D$; $\angle B \cong \angle E$ o $m\angle B = m\angle E$; $\angle C \cong \angle F$ o .

A veces, es conveniente indicar las congruencias en la forma que se observa en la siguiente figura.



Definición: En un triángulo, un *lado está comprendido entre los ángulos* cuyos vértices son los extremos del lado y un *ángulo está comprendido entre los lados*, que corresponden a los lados del ángulo.

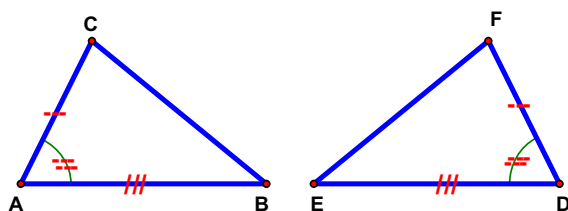
Se puede demostrar que la congruencia de triángulos es una relación de equivalencia.

Para demostrar una congruencia entre triángulos es necesario demostrar que sus lados y ángulos homólogos son congruentes. Sin embargo es posible formalizar la existencia de ciertos criterios que nos permitan demostrar la existencia de la relación de congruencia entre triángulos.

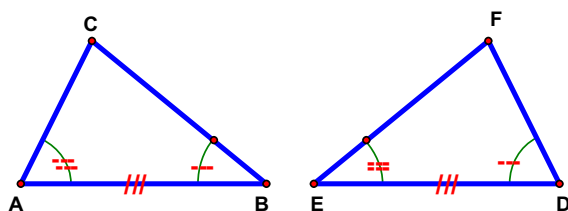
Para esto se enunciarán los axiomas de la congruencia de triángulos.

Usaremos la notaciones LAL (lado-ángulo-lado), ALA (ángulo-lado-ángulo), LLL (lado-lado-lado) y LLA (lado-lado-ángulo)

Axioma 21 (*LAL*) Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, entonces los triángulos son congruentes.

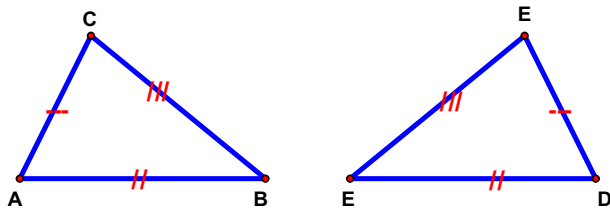


Axioma 22 (*ALA*) Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, entonces los triángulos son congruentes.

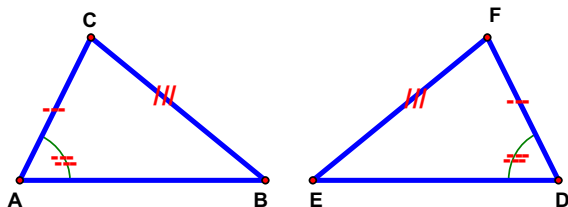


Observación: El axioma *ALA* también se cumple si los triángulos tienen un lado y dos ángulos cualesquiera congruentes, ya que los terceros ángulos también serán congruentes.

Axioma 23 (*LLL*) Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes sus tres lados, entonces los triángulos son congruentes



Axioma 23 (LLA) Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo opuesto a los de mayor medida de ellos, entonces los triángulos son congruentes.



Observación: Los axiomas de congruencia de triángulos enunciados nos permiten, afirmar, que para demostrar que dos triángulos son congruentes basta demostrar que tienen tres de sus respectivos elementos relacionados según uno de los criterios establecidos, siempre que uno de esos elementos sea un lado.

Corolario de la congruencia de triángulos: En triángulos congruentes, los elementos homólogos son congruentes.

Se puede también enunciar de esta manera: *En triángulos congruentes, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y a ángulos congruentes, se oponen lados congruentes*”.

Los postulados de la congruencia de triángulos permiten demostrar o congruencia de segmentos o congruencia de ángulos.

Se pueden demostrar los siguientes teoremas:

“Si dos triángulos rectángulos tienen sus catetos respectivamente congruentes, entonces son congruentes”.

“Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y uno de sus ángulos agudos respectivamente congruentes, son congruentes”.

“Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y uno de los catetos congruentes, son congruentes”.

“Si dos triángulos rectángulos tienen un cateto y un ángulo respectivamente congruentes, son congruentes”.

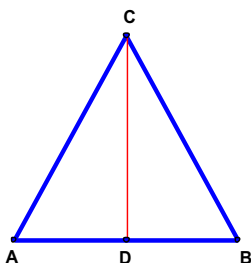
“Si un triángulo es equilátero, la medida de cada uno de sus ángulos es 60° ”.

“Si en un triángulo rectángulo la medida de uno de sus ángulos agudos es 30° , entonces la medida del lado opuesto a dicho ángulo es igual a la mitad de la medida de la hipotenusa”.

Propiedades de un triángulo isósceles

Con el fin de facilitar el lenguaje geométrico, en un triángulo isósceles se llamarán: *lados*, los lados que tiene medidas iguales; *base*, el lado desigual; *vértice*, el vértice opuesto a la base; *ángulo del vértice*, el ángulo opuesto a la base; *ángulos basales*, los ángulos adyacentes a la base.

Teorema “En un triángulo isósceles, los ángulos basales son congruentes”.



Hipótesis $\triangle ABC$ es isósceles. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$,

Tesis: $\angle CAB \cong \angle CBA$.

Demostración.

1) Se construye $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ (D punto medio de $\overline{AB}$).

2) $D \leftrightarrow C$

3) En $\triangle ADC$ y $\triangle BDC$ se tiene: $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (lado común),

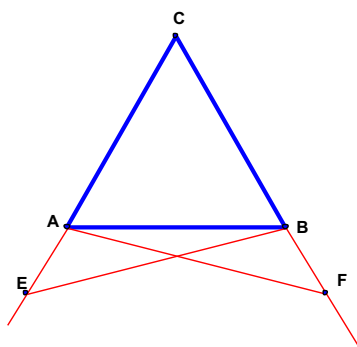
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (hipótesis) y $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ (de 1))

2) Por lo tanto $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ (LLL).

3) Luego $\angle CAB \cong \angle CBA$. (ángulos opuestos a lados $\cong$). (Tesis)

Corolarios: Si dos triángulos isósceles tienen un lado y un ángulo respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Teorema (recíproco) “Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, entonces es un triángulo isósceles”



Hipótesis $\angle CAB \cong \angle CBA$.

Tesis: $\triangle ABC$ es isósceles ($\overline{AC} \cong \overline{BC}$).

Demostración

1) En $\overrightarrow{CA}$ y en $\overrightarrow{CB}$ se construyen los puntos

E y F tales que $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ ($AE = BF$).

2) $A \leftrightarrow F$ y $B \leftrightarrow E$.

3) En $\triangle ABE$ y $\triangle ABF$ se tiene:

$\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (lado común); $\angle BAE \cong \angle ABF$

(= suplemento) y $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ (de 1)).

4) Por lo tanto: $\triangle ABE \cong \triangle ABF$ (LAL).

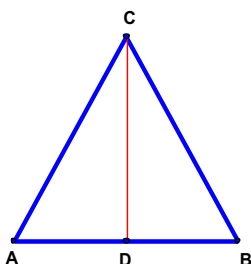
5) Luego $\overline{EB} \cong \overline{FA}$ (lados opuestos a lados $\cong$) y $\angle AEB \cong \angle BFA$ (ángulos opuestos a lados $\cong$).

6) En $\triangle CBE$ y $\triangle CAF$ se tiene: $\angle C \cong \angle C$ ($\angle$ común); $\overline{EB} \cong \overline{FA}$ y $\angle AEB \cong \angle BFA$ (de 5)).

7) Luego, $\triangle CBE \cong \triangle CAF$ (ALA) y por lo tanto $\overline{CE} \cong \overline{CF}$ ($CE = CF$).

8) $7) - 2)$: $CE - EA = CF - FE$, esto es, según la figura: $AC = BC$ o $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (Tesis).

Teorema “En un triángulo isósceles, el segmento que une el vértice con el punto medio de la base, es perpendicular a la base.



Hipótesis $DA = DB$; $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Tesis: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

Demostración:

1) En la figura $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ (LLL).

Por lo tanto $\angle ADC \cong \angle BDC$. (ángulos opuestos a lados $\cong$).

2) $m\angle ADC + m\angle BDC = 180^\circ$ (forman par lineal).

3) De 1) y 2) : $m\angle ADC = m\angle BDC = 90^\circ$.

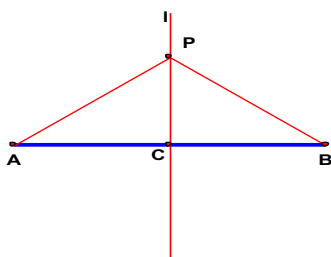
4) Por lo tanto $\overline{AB} \perp \overline{DC}$ (definición de $\perp$). (Tesis)

Se pueden demostrar los siguientes teoremas “En un triángulo isósceles, el segmento que une el vértice con el punto medio de la base, biseca al ángulo del vértice”.

“En un triángulo isósceles, el segmento perpendicular construido desde el vértice a la base, biseca el ángulo del vértice y dimidia a la base”.

“En un triángulo isósceles, el segmento que biseca al ángulo del vértice, dimidia a la base y es perpendicular a ella”.

Teorema “Cualquier punto que equidista de los extremos de un segmento dado, pertenece a su mediatriz”.



Hipótesis $\overline{AB}$ segmento dado y la recta l su mediatriz.

($CA = CB$ y $l \perp \overline{AB}$). P punto cualquiera de l .

Tesis: $PA = PB$.

Demostración

1) $A \leftrightarrow P \leftrightarrow B$.

2) En $\triangle ACP$ y $\triangle BCP$ se tiene:

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (Hipótesis)

3) $\angle ACP \cong \angle BCP$ (hipótesis, 90°) y $\overline{CP} \cong \overline{CP}$ (lado común).

4) Por lo tanto $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ (LAL).

5) Luego $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ (lados opuestos a $\angle s \cong$). Por lo tanto $PA = PB$ (Tesis).

Teorema (recíproco) “Si cualquier punto equidista de los extremos de un segmento dado, entonces pertenece a su mediatriz”.

En el dibujo del teorema anterior, se tiene:

Hipótesis $\overline{AB}$ segmento dado, y P punto tal que $PA = PB$.

Tesis: El punto P pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$.

Demostración.

1) $A \leftrightarrow P \leftrightarrow B$.

2) En $\triangle ACP$ y $\triangle BCP$ se tiene: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ (hipótesis) y $\overline{CP} \cong \overline{CP}$ (lado común). $\angle PAC \cong \angle PBC$ (Ángulos basales $\triangle$ isósceles).

3) Por lo tanto $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ (LAL).

4) Luego $\angle ACP \cong \angle BCP$ y $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (Corolario $\cong$).

6) Pero $\angle ACP$ y $\angle BCP$ forman un par lineal, luego son congruentes.

7) Por lo tanto $m \angle ACP = m \angle BCP = 90^\circ$ y $\overline{CP} \perp \overline{AB}$ (Definición de $\perp$).

8) De 4) y 7) se concluye que $\overline{CP}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ (Tesis).

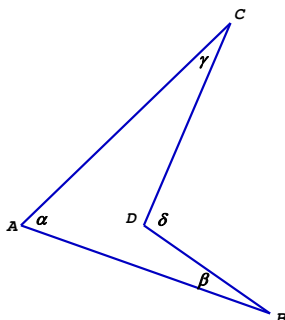
Se puede demostrar el siguiente teorema: “Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo, equidista de los lados del ángulo”.

También es válido el recíproco.

Taller 2-1

1. En un triángulo ABC se conoce el ángulo α y la diferencia $\beta - \gamma = \delta$. Haga la resolución gráfica de β y γ .
2. Dado un triángulo rectángulo y con un de sus ángulos agudos conocidos. Determinar la medida de cada uno de los ángulos formados al dibujar la altura correspondiente al vértice del ángulo recto.
3. Dadas dos rectas paralelas cortadas por una tercera recta, trazar las bisectrices de dos ángulos internos del mismo lado de la recta secante. Determine la medida del ángulo formado por estas bisectrices.
4. Calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores de un pentadecágono.
5. Determine el polígono en el cual la suma de las medidas de los ángulos interiores es 2330° .
6. Las medidas de 5 ángulos interiores de un polígono regular suman 270° . Determine qué clase de polígono es.
7. Se dibujan los rayos opuestos correspondientes a la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Determine la suma de las medidas de los ángulos exteriores que se formaron.
8. Demuestre que la bisectriz de uno de los ángulos exteriores en el vértice de un triángulo isósceles, es paralela a la recta que contiene a la base.
9. Demuestre que si la suma de las medidas de dos ángulos exteriores de un triángulo es igual a 270° , entonces el triángulo es rectángulo.
10. Demostrar que en la figura, la medida del ángulo δ es igual a la suma

$$\alpha + \beta + \gamma.$$



11. Demuestre que en un cuadrilátero la suma de las medidas de dos ángulos interiores es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos exteriores no adyacentes.
12. Sobre los lados de un triángulo equilátero ABC se consideran tres puntos D, E y F de modo que sean $\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$. Demuestre que también el triángulo DEF es equilátero.
13. Se traza $\overline{AD}$ bisectriz del ángulo en A en un triángulo ABC cualquiera, Por un punto M cualquiera del lado $\overline{AC}$, se traza la recta paralela a $\overline{AD}$ de modo que corte al rayo BA en el punto P. Demuestre que el triángulo AMP es isósceles.
14. Se da el triángulo ABC de modo que se cumple que $\alpha = 2\beta$. Se traza sucesivamente $\overline{AD}$ bisectriz del ángulo α , la recta DE paralela a la recta AB, la recta EF paralela a la recta ADF y la recta FG paralela a la recta DE. Determine a) los ángulos congruentes con β . b) los triángulos isósceles formados y cuáles los pares de segmentos congruentes. c) los rayos que son bisectrices de algunos ángulos de la figura.
15. Demuestre que el ángulo externo a uno de los vértices de la base de un triángulo isósceles es siempre obtuso.
16. Si las bisectrices de un cuadrilátero cualquiera no se intersecan en un mismo punto, entonces forman un cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son suplementarios.

17. Demuestre que en un triángulo, la medida del ángulo formado por la bisectriz de un ángulo exterior con el rayo correspondiente al lado opuesto, es la semidiferencia de las medidas de los otros dos ángulos del triángulo.
18. Demuestre que la medida del ángulo obtuso formado por dos bisectrices de un triángulo es la mitad de la medida del tercer ángulo del triángulo aumentada en 90° .
19. Se da el triángulo ABC rectángulo en B. Se une el vértice B con un punto D de la hipotenusa de modo $\angle DBC \cong \angle DCB$. Demuestre que se obtiene $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{DC}$.
20. Demuestre que dos triángulos que tienen una altura y dos ángulos respectivamente congruentes, son congruentes.

Lugares Geométricos

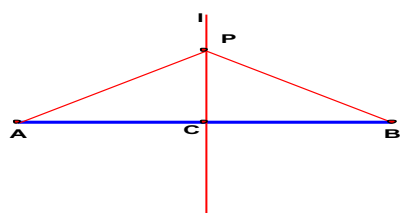
Aplicando el concepto de congruencia y los teoremas demostrados, se puede efectuar construcciones geométricas, de modo que se puedan ubicar puntos que cumplan con ciertas características bien determinadas.

En forma intuitiva, se puede observar, que los puntos de la figura de una circunferencia, están a una distancia constante con respecto a su centro. Esta es una propiedad común solo de los puntos de ella y sólo los de ella. Esta idea de *todos y solo estos puntos* constituye la definición de *lugar geométrico*.

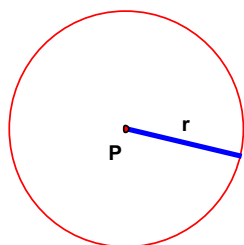
Definición: *Lugar geométrico* (L.G.) es un conjunto de puntos de una figura geométrica cuyos puntos y, exclusivamente ellos, cumplen con una condición o tienen una determinada propiedad.

Los lugares geométricos se utilizan para construir un punto o conjuntos de puntos que cumplan dos condiciones. Para determinar estos puntos se construyen los Ls.Gs. correspondientes y, la intersección de estas figuras, son los puntos buscados. El enunciado de un L.G. lo constituye el nombre de la figura y la propiedad que tienen los puntos que lo forman.

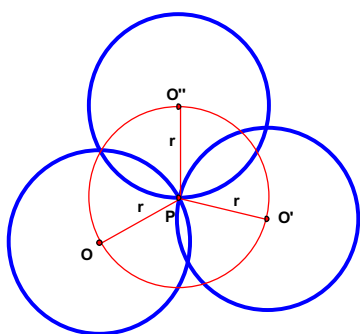
Enunciado y representación de los Ls.Gs.:



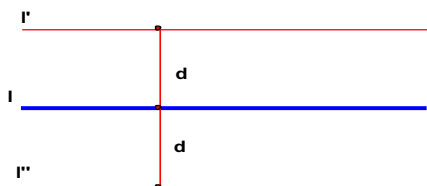
1º La mediatriz de un segmento dado o correspondiente a dos puntos dados, es el L.G. de todos los puntos de un plano que equidistan de los extremos del segmento o de los puntos dados.



2º La circunferencia con centro en un punto dado P y de radio r , es el L.G. de todos los puntos de un plano que tienen la distancia dada r (equidistan) desde el punto P .

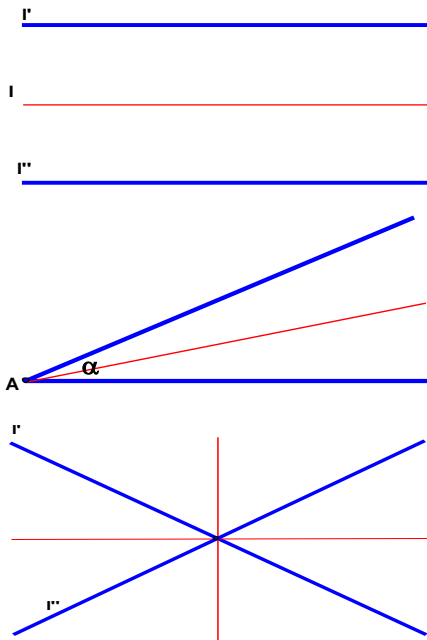


3º La circunferencia con centro en un punto dado P y de radio r , es el L.G. de los centros de todas las circunferencias de radio r y que se intersecan en el punto P (pasan por el punto P).



4º Las rectas paralelas construidas a ambos lados de una recta dada l a una distancia dada d , es el L.G. de todos los puntos del plano que están a la distancia d , desde la recta l .

5º La paralela media construida entre dos rectas paralelas dadas l' y l'' , es el L.G. de todos los puntos del plano que equidistan de las rectas paralelas dadas



6º La bisectriz de un ángulo dado es el L.G. de todos los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

7º Las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas dadas que se intersecan, es el L.G. de los puntos que equidistan de las dos rectas dadas.

Taller 2-2

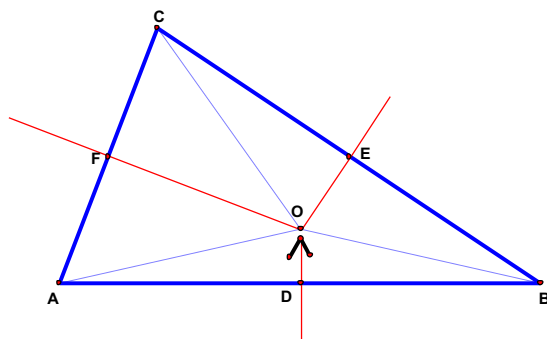
1. Determine los puntos que tienen una distancia dada d , a un punto dado P y que tengan una distancia también dada r a una recta dada l .
2. Determine los puntos que tienen una distancia dada d , a un punto dado P y que sean equidistantes de dos rectas paralelas dadas.
3. Determine los puntos que tienen una distancia dada d , a un punto dado P y que equidisten de dos rectas que se cortan, l y l' .
4. Determine los puntos que tienen las distancias dada d y r de dos puntos dados A y B .
5. Dadas dos rectas paralelas l y l' y una tercera recta l'' , determine los puntos que equidisten de las paralelas y que tengan una distancia también dada d a la recta l'' .
6. Determine los puntos que tienen una distancia dada d , a un punto dado P y que tengan una distancia también distancias iguales a dos puntos dados, A y B .
7. Determine los puntos que tienen una distancia dada d , a una recta dada l y que sean equidistantes a dos rectas secantes l' y l'' .
8. Dados dos segmentos AB y ED construir sobre ellos dos triángulos isósceles de manera que tengan el vértice común el vértice C .
9. Determine los puntos que sean equidistantes de dos puntos dados, A y B y que sean también equidistantes de dos rectas paralelas, l y l' .
10. Determine los puntos que sean equidistantes de dos puntos dados, A y B y que tengan una distancia dada d de una recta dada.
11. Determine los puntos que sean equidistantes de dos puntos dados, A y B y que sean equidistantes de dos rectas que se intersecan.
12. Determine los puntos que sean equidistantes de dos puntos dados, A y B y que sean equidistantes de los vértices C y D de un triángulo dado.
13. Determine los puntos equidistantes de dos rectas paralelas dadas l y l' y de una tercera recta que las interseque.
14. Sean los puntos A , B , C , determine un punto equidistante de los tres puntos dados.
15. Determine los puntos equidistantes de dos rectas que se intersecan l y l' y que sean equidistantes de dos rectas que forman un ángulo.
16. Determine un punto equidistante de dos lados de un triángulo que se encuentre sobre el tercer lado.
17. Se quiere construir un supermercado equidistante de tres ciudades, no situadas en línea recta. Haga el modelo geométrico adecuado, que determine el lugar preciso en que debe estar el centro comercial.
18. Construya una circunferencia cuyo centro se encuentre sobre una recta dada l y que pase por dos puntos dados A y B .
19. Determine sobre una recta dada l un punto que tenga una distancia dada d de otra recta dada l' .
20. Determine un punto que tenga las distancias dadas d y r desde dos rectas dadas l y l' que se intersecan.

Propiedades de los puntos singulares del triángulo

Se sabe que si dos rectas tienen un punto en común, *se intersectan en el punto*.

Cuando se analizaron los elementos del triángulo, se definieron las alturas, las medianas, las mediatrices y las bisectrices del mismo. Estos elementos característicos del triángulo, tienen la propiedad de intersectarse en un mismo punto, llamados puntos singulares de triángulo. Estas propiedades se demuestran en los siguientes teoremas.

Teorema “*Las tres mediatrices de un triángulo, se intersectan en un único punto, el cual equidista de los vértices del triángulo*”.



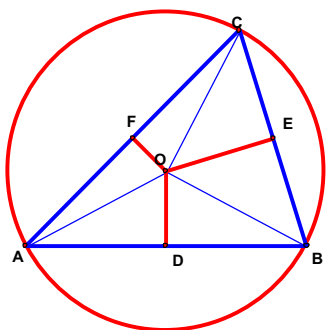
Hipótesis $\overleftrightarrow{DO}, \overleftrightarrow{EO}, \overleftrightarrow{FO}$ son mediatrices del $\triangle ABC$.

Tesis: a) $\overleftrightarrow{DO}, \overleftrightarrow{EO}, \overleftrightarrow{FO}$ se intersectan en el punto O.
b) $AO = BO = CO$.

Demostración

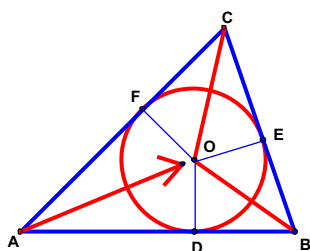
- 1) Las mediatrices $\overleftrightarrow{EO}, \overleftrightarrow{FO}$ se intersectan en un punto ($\perp$ a segmentos adyacentes). Sea O este punto.
- 2) Luego $AO = CO$ (propiedad de mediatriz de un segmento)
- 3) Por otra parte $CO = BO$ (id.)
- 4) De 2) y 3), $AO = BO$ (Propiedad transitiva =).
- 5) Por lo tanto, el punto O pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$ (un punto que equidista de los extremos de un segmento, pertenece a su mediatriz).
- 6) Luego, el punto O pertenece a la mediatriz $\overleftrightarrow{DO}$ (Tesis).

Corolario: El punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por sus tres vértices y que es la *circunferencia circunscrita* del triángulo.



Este punto recibe el nombre de circuncentro. En el caso de un triángulo acutángulo, este punto se encuentra en el interior del triángulo; si el triángulo es obtusángulo, en el exterior y, si es rectángulo, es el punto medio de la hipotenusa.

Teorema “*Las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo, se intersectan en un único punto, el cual equidista de los lados del triángulo*”.



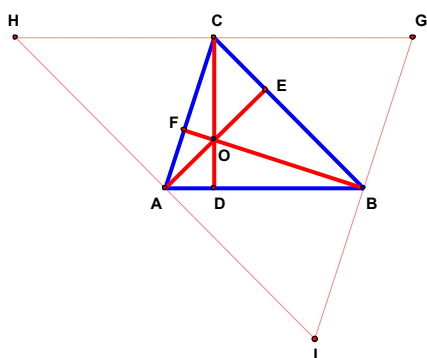
Hipótesis $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{CO}$ son
bisectrices del $\triangle ABC$.
 $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{AC}$.

Tesis: a) $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{CO}$ se
intersecan en el punto O.
b) $DO = EO = FO$.

Demostración

- 1) Las bisectrices $\overrightarrow{BO}$ y $\overrightarrow{CO}$ se intersecan en el punto O.
- 2) Luego, $DO = EO = FO$ (L.G. de la bisectriz de un ángulo).
- 3) Por lo tanto el punto O equidista de $\overrightarrow{AC}$ y de $\overrightarrow{AB}$.
- 4) Luego $\overrightarrow{AO}$ es bisectriz del ángulo α .
- 5) Por lo tanto, las tres bisectrices del $\triangle ABC$ se intersecan en el mismo punto O (Tesis).

Teorema “Las tres alturas de un triángulo se intersecan en un mismo punto”.



Hipótesis $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{BF}$ son
alturas del $\triangle ABC$.

Tesis: $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{BF}$ se
intersecan en un mismo punto
O,

Demostración.

- 1) Se construyen $\overrightarrow{HI} \parallel \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{GI} \parallel \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{HG} \parallel \overrightarrow{AB}$.
- 2) El cuadrilátero AIBC es un # y por lo tanto $\overrightarrow{IB} \cong \overrightarrow{AC}$ (lados opuestos en el #).
- 3) Análogamente $\overrightarrow{GB} \cong \overrightarrow{AC}$ en el # ABGC.
- 4) Luego, de 2) y 3): $\overrightarrow{IB} \cong \overrightarrow{BG}$.
- 5) Por un procedimiento análogo se demuestra que $\overrightarrow{HA} \cong \overrightarrow{AI}$ y que $\overrightarrow{HC} \cong \overrightarrow{GI}$.
- 6) De 1) resulta $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{IG}$ y $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{HG}$: Por lo tanto $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BF}$ son las alturas del $\triangle HIG$. Y las tres alturas de un triángulo se intersecan en un mismo punto. (Tesis).

Teorema “Las tres medianas de un triángulo concurren en un mismo punto, de modo que la distancia desde dicho punto al punto medio del lado mide la mitad de la distancia desde el punto al vértice respectivo”.

Hipótesis $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ son medianas del $\triangle ABC$.

Tesis: a) Tesis: $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ se intersecan en un mismo punto O,

$$b) \quad OD = \frac{OC}{2} \quad ; \quad OE = \frac{OA}{2} \quad ; \quad OF = \frac{OB}{2}.$$

Demostración.

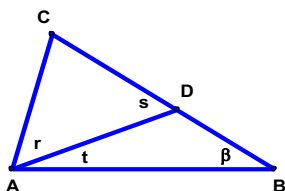
- 1) Se construyen G y H puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ respectivamente.
- 2) $F \leftrightarrow E$, $G \leftrightarrow F$, $H \leftrightarrow G$ y $H \leftrightarrow E$.
- 3) En $\triangle ABC$ $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$ y $FE = \frac{AB}{2}$ (Propiedad segmento medio).
- 4) En $\triangle ABO$ $\overline{GH} \parallel \overline{AB}$ y $GH = \frac{AB}{2}$ (Propiedad segmento medio).
- 5) De 3) y 4) el cuadrilátero GHEF es un # (Tiene un par de lados congruentes y //s).
- 6) Por lo tanto $GO = OE$ y $HO = OF$ (Propiedad de las diagonales de un #).
- 7) De 1) y 6): $OD = \frac{OC}{2}$; $OE = \frac{OA}{2}$; $OF = \frac{OB}{2}$ (Tesis b).
- 8) Además, si dos medianas del triángulo cumplen la relación 7), entonces la tercera mediana deberá contener el punto de intersección de las otras dos.

Relación de desigualdad entre los elementos de un triángulo.

Las propiedades que se analizarán a continuación, están relacionadas con las medidas de los segmentos y de los ángulos. Por lo tanto, las propiedades de la desigualdad de lados y ángulos serán las mismas de la relación de orden del conjunto numérico de los números reales.

A continuación se demuestran estas propiedades.

Teorema “Si en un triángulo, dos lados son de distintas medidas, la medida del ángulo opuesto al lado de medida mayor, es mayor que el opuesto al lado de menor medida”.



Hipótesis En $BC > AC$ en $\triangle ABC$

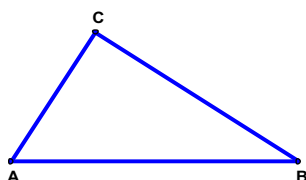
Tesis: $m \angle CAB > m \angle ABC$.

Demostración

1 Se construye $\otimes(C, AC) \cap \overline{CB} = \{D\}$

- 2) $A \leftrightarrow D$ y resulta $\triangle ADC$ isósceles. Por lo tanto $m \angle CAD = m \angle CDA$ ($\angle$ s basales).
- 3) Pero $m \angle CDA > m \angle CBA$ ($\angle$ exterior del $\triangle ABD$).
- 4) De 1) y 3) $m \angle CAB > m \angle ABC$ (Tesis).

Teorema (Recíproco) “Si en un triángulo, dos ángulo son de distintas medidas, la medida del lado opuesto al ángulo de medida mayor, es mayor que el opuesto al ángulo de menor medida”.



Hipótesis $m \angle CAB > m \angle ABC$. en $\triangle ABC$

Tesis: $BC > AC$

Demostración

1) Hay tres posibilidades para las medidas BC y AC:

$BC > AC$ o $BC = AC$ o $BC < AC$: (Prop. de tricotomía).

2) Si $BC = AC$, entonces el $\triangle$ es isósceles y $m \angle CAB = m \angle ABC$ ($\angle$ s basales).

Contradice hipótesis.

3) Si $BC < AC$, por teorema anterior: $m \angle CAB < m \angle ABC$. Contradice hipótesis.

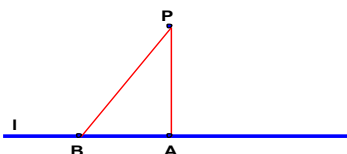
4) Por lo tanto $BC > AC$. (Tesis).

Corolarios:

1. En un triángulo rectángulo la medida de la hipotenusa es mayor que la medida de cada cateto.

2. En un triángulo obtusángulo, el lado de mayor medida es el opuesto al ángulo obtuso.

Teorema “Si desde un punto dado, situado fuera de una recta, se construye un segmento perpendicular a la recta, la medida de este segmento es menor que la de cualquier otro segmento que tiene como extremos el punto dado y otro punto cualquier de la recta”.



Hipótesis Sea la recta dada l y P punto dado.

$\overline{PA} \perp l$. B punto de l .

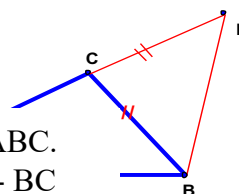
Tesis: $PA < PB$.

Demostración

En la figura El $\triangle BAP$ es rectángulo en P. Por lo tanto $AP > PB$ (Un cateto es menor que la hipotenusa) (Tesis).

Definición: La medida del segmento perpendicular construido desde un punto dado P a una recta dada l , es la *distancia desde el punto a la recta*.

Teorema “En un triángulo cualquiera, la medida de uno de sus lados es menor que la suma de las



Hipótesis $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BC}$ lados del $\triangle ABC$.

Tesis: a) $AB < AC + CB$. b) $AC > AB - BC$

medidas de los otros dos lado:

Demostración:

1) Se construye $\otimes(C, CB) \cap \overrightarrow{AC} = \{D\}$

2) $B \leftrightarrow D$ y se forma el $\triangle BCD$ isósceles.

3) Luego $\angle CBD \cong \angle BDC$ ($\angle$ s basales).

4) Por lo tanto $m \angle ABD > m \angle ADB$.

5) De 4) en el $\triangle ABD$ se cumple $AB < AD$ (ángulo opuesto a lado de menor medida).

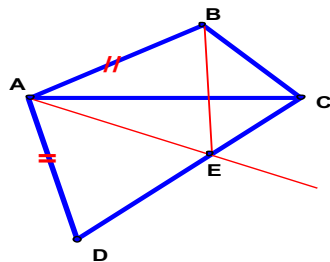
6) Pero $AD = AC + CD$

7) Reemplazando 1) en 6) y luego en 5) queda $AB < AC + CB$ (Tesis a)

8) Para la tesis b) basta despejar AC en 7) y queda $AC > AB - BC$.

En los teoremas anteriores se demuestran las propiedades de las desigualdades en un mismo triángulo. Para triángulos diferentes, se cumple el siguiente teorema:

Teorema (de la charnela) “Si dos triángulos, tienen dos de sus lados respectivamente congruentes y los ángulos comprendidos entre ellos desiguales, entonces al ángulo de mayor medida entre ellos, se opone el lado de mayor medida”.



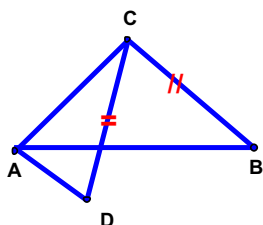
Hipótesis $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $m \angle DAC > m \angle CAB$.

Tesis: $DC > BC$.

Demostración

- 1) Se construye $\overrightarrow{AE}$ bisectriz del $\angle DAB$.
- 2) $E \leftrightarrow B$.
- 3) En $\triangle DAE$ y $\triangle EAB$ se tiene: $\overline{DA} \cong \overline{AB}$ (hipótesis), $\angle DAE \cong \angle BAE$ (de 1) y $\overline{AE} \cong \overline{AE}$ (lado común).
- 4) Por lo tanto $\triangle DAE \cong \triangle EAB$ (LAL).
- 5) Luego: $\overline{DE} \cong \overline{EB}$ (lados opuestos a $\angle s \cong s$).
- 6) En $\triangle EBC$: $BE + EC > BC$ (Teorema suma de lados del $\triangle$).
- 7) Reemplazando 6) en 7) resulta: $DE + EC > BC$. Esto es $DC > BC$ (Tesis).

Teorema (recíproco) “Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente congruentes y el tercero desigual, entonces el ángulo que se opone al mayor de estos lados, es el de mayor medida”.



Hipótesis $\overline{CD} \cong \overline{BC}$; $AB > AD$,

Tesis: $m \angle ACB > m \angle ACD$.

Demostración

- 1) Si $m \angle ACB \cong m \angle ACD$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle ADB$ (LAL) y $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; absurdo

ya que contradice la hipótesis.

- 2) Si $m \angle ACB < m \angle ACD$, entonces $AB < AD$ (teorema directo), absurdo, ya que contradice la hipótesis.
- 3) Por lo tanto, $m \angle ACB > m \angle ACD$ (Tesis).

Taller 2-3

1. Si P es un punto en el interior del triángulo ABC, demuestre que la suma de las distancias desde P a cada uno de los vértices, es menor que el perímetro del triángulo.
2. Sea M un punto del lado BC del triángulo ABC. Se une el punto M al vértice A. Demuestre que se cumple la relación:
$$AM < \frac{AB + AC + BC}{2}.$$
3. En un triángulo ABC, $BA = a$ cm, $BC = b$ cm. ¿Entre qué valores puede variar el tercer lado AC?
4. Demuestre que si dos triángulos isósceles que tienen la base y un lado respectivamente congruentes, entonces son congruentes.
5. Demuestre que dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes un lado, un ángulo adyacente y la bisectriz de este ángulo.
6. Demuestre que si dos triángulos son congruentes, entonces también son congruentes sus respectivas: a) alturas, b) bisectrices, c) medianas.
7. Demuestre que dos vértices de un triángulo son equidistantes de la mediana que parte desde el tercer vértice.
8. En un triángulo isósceles de base AB se traza la altura $\overline{CD}$. Determinar la medida del ángulo que forma el rayo $\overrightarrow{CD}$ con cada uno de los lados del triángulo.
9. Demuestre que un triángulo que tiene dos alturas congruentes es isósceles.
10. Si en un triángulo isósceles la altura trazada desde el vértice tiene longitud igual a la mitad de la base, determine qué clase de triángulo isósceles es.
11. En un triángulo ABC se traza la bisectriz $\overline{AD}$ del ángulo en A. Desde un punto arbitrario M de $\overline{AC}$, se traza una recta paralela a $\overline{AD}$ que corta al rayo BA en P. Comprobar que el triángulo AMP es isósceles.
12. En un triángulo equilátero ABC se determinan distancias iguales desde los vértices sobre las rectas que contienen a los lados. Demuestre que uniendo los puntos obtenidos de esa manera, se forma un nuevo triángulo equilátero.
13. Demuestre que en un triángulo la suma de las medidas de las tres alturas es menor que su perímetro y mayor que su semiperímetro.
14. Demuestre que si la medida del ángulo del vértice de un triángulo isósceles es la mitad de la medida de cada uno de los ángulos basales, la bisectriz de uno de los ángulos basales divide al triángulo dado en dos triángulos isósceles.
15. Demuestre que dos alturas de un triángulo acutángulo forman al intersectarse un ángulo obtuso que es el suplemento del ángulo del vértice que no corresponde a las alturas.
16. Demuestre que si un punto P se encuentra en el interior de un triángulo ABC, entonces se cumple la siguiente relación: $PB + PC < AB + AC$.

Construcción de figuras geométricas planas

La construcción de figuras planas o resolución de problemas geométricos, consiste en hacer el dibujo de una o de varias figuras geométricas que permitirá establecer relaciones entre ellas, aplicando las definiciones y propiedades (teoremas) demostrados.

Las figuras pueden ser cualesquiera, compuestas por los elementos geométricos conocidos, pero generalmente se reduce a construir puntos con determinadas condiciones, que al unirlos formarán las figuras pertinentes.

Si la construcción tiene un conjunto finito de soluciones está *determinado*. Por ejemplo, construir un triángulo equilátero conociendo la medida de su lado. En caso contrario está *indeterminado*. Por ejemplo, construir un triángulo conociendo la medida de uno de sus lados y la de un ángulo adyacente al dicho lado.

La cantidad de datos necesarios para realizar la construcción depende de cada figura.

Etapas a seguir en una construcción geométrica:

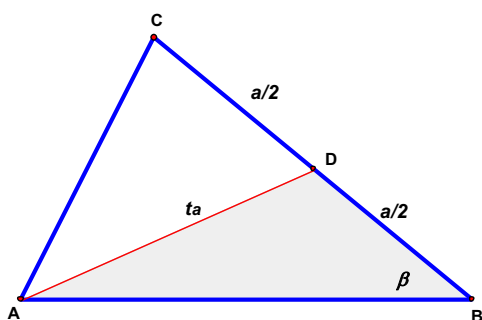
1. *El Análisis*: En esta etapa se supone el problema resuelto. Se estudian las relaciones entre los datos geométricos dados, de modo que permitan la construcción de una *figura auxiliar*, que será la base para llegar a la solución pedida. Se debe tener cuidado que las proposiciones deducidas las unas de las otras sean recíprocas desde el punto de vista lógico, sin que se omitan o pierdan soluciones o de introducir soluciones extrañas al enunciado propuesto. Se agrega una síntesis, en la cual se indica las construcciones a efectuar (lugares geométricos) para llegar al resultado pedido.
2. *La construcción*: En esta etapa se aplican las relaciones deducidas en el análisis y mediante los procedimientos geométricos conocidos (construcciones), se llega a la figura geométrica que cumpla con las condiciones pedidas.
3. *La demostración*: En esta etapa, basándose en las condiciones del problema (datos) y en teoremas ya demostrados, se deduce que la figura obtenida en la construcción, contienen los elementos solicitados.
4. *La discusión*: En esta etapa se estudian los distintos casos que pueden presentarse cuando ciertos datos varían, de modo que se obtenga una o varias soluciones para la construcción propuesta.

Construcción de triángulos

Cualquier triángulo, queda determinado por tres datos (elementos), segmentos o ángulos, independientes, uno de ellos, por lo menos, debe ser un segmento. Debe recordarse cuál es la denominación usada para cada uno de los elementos del triángulo.

A continuación se presenta un ejemplo de construcción con cada una de las etapas.

“Construir un triángulo dados: a , t_a y β . (a es la medida del lado $\overline{BC}$, la mediana t_a y la medida del ángulo β).



Análisis

Sea $\triangle ABC$ el pedido. En él:

$BC = a$; $\angle ABC = \beta$ y $AD = t_a$.

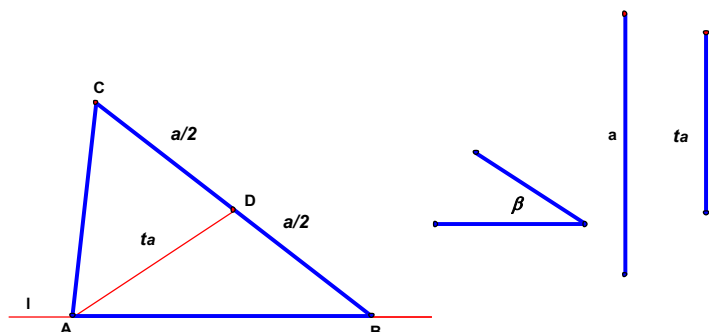
$\triangle$ auxiliar ABD determinado por:

$BD = a/2$; $\angle ABC = \beta$ y $AD = t_a$

Con el triángulo auxiliar se conocen los vértices A y B.

Lugares geométricos para C: 1° $\overrightarrow{BD}$; 2° $\otimes(B, a)$.

Construcción



1. Se construye la recta l y en ella el punto B.
2. Se construye el $\angle\beta$ en B sobre l .
3. $\otimes(B, a/2)$, se encuentra el punto D sobre $\overrightarrow{BD}$.
4. $\otimes(B, ta) \cap l = \{A\}$
5. $\otimes(B, a) \cap \overrightarrow{BD} = \{C\}$.
6. $C \leftrightarrow A$ y se obtiene el $\triangle ABC$, que es el triángulo pedido.

Demostración

1. $\angle ABC \cong \angle\beta$ por construcción.
2. $BC = a$ por construcción.
3. $DA = ta$ por construcción.

Discusión

1. Si $ta > a/2$, el problema tiene siempre solución única.
2. Si $ta = a/2$, el $\triangle ABD$ es isósceles y habrá una solución, siempre que el $\angle\beta$ sea agudo.
3. Si el $\angle\beta$ es recto u obtuso, el problema no tiene solución.
4. Si se construye $\overline{DE} \perp \overline{AB}$, entonces: a. si $ta > DE$, se encontrarán dos soluciones, ya que la $\otimes(D, ta)$ corta al lado del $\angle\beta$ en dos puntos.. b. Si $ta = DE$, se encontrará una solución. c. Si $ta < DE$, no habrá solución. (En casos, como éste, se dirá que los datos son incompatibles).

Taller 2-4

Construir un triángulo dado:

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------|-----------------------|----------------------|
| 1. h_x, α, β | 2. h_c, h_a, a | 3. α, h_c, p | 4. b, h_c, p |
| 5. h_c, b, t_b | 6. b, α, h_b | 7. a, h_c, b_γ | 8. h_c, γ, p |
| 9. h_c, p, ta | 10. a, b_β, β | 11. a, h_c, u | 12. p, u, h_c |
| 13. $p, h_c, \alpha - \beta$ | 14. α, β, u | 15. t_c, h_c, q | 16. a, α, h_c |

Los cuadriláteros

El polígono de cuatro lados, es un *cuadrilátero*.

Los cuadriláteros se distinguen según la cantidad de pares de lados paralelos que tienen. Si tienen dos pares de lados paralelos, son *paralelogramos*. Si tienen un solo par de lados paralelos, son *trapezios*. Si no tienen pares de lados paralelos, son *trapezoides*.

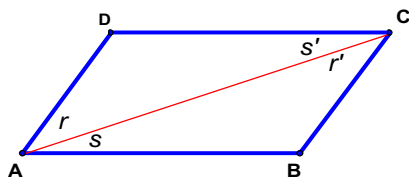
Los siguientes cuadriláteros son paralelogramos: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.

Definiciones: Si las medidas de los lados de un paralelogramo son iguales, es un *cuadrilátero equilátero*. Si las medidas de los ángulos interiores de un paralelogramo son iguales, es un paralelogramo equiángulo. El paralelogramo equilátero en el cual las medidas de cada uno de sus ángulos es de 90° es un *cuadrado*; en caso contrario es un *rombo*. Si las medidas de los cuatro ángulos del paralelogramo es 90° , es un *rectángulo*. En caso contrario es un *romboide*.

En un paralelogramo, cada uno de los lados paralelos son las *bases*. La medida del segmento perpendicular construido entre las bases, es la *altura* del paralelogramo. Los lados paralelos, son sus *lados opuestos*. En caso contrario, serán *lados contiguos o adyacentes*. Si dos ángulos interiores tienen sus vértices sobre un mismo lado (vértices adyacentes), son *ángulos contiguos o adyacentes al lado*. En caso contrario serán *ángulos opuestos* (vértices opuestos). El segmento que tiene como extremos dos vértices opuestos del paralelogramo, es una *diagonal*.

Aplicando los criterios de la congruencia de triángulos, se demuestran las propiedades que se cumplen en los paralelogramos (#s).

Teorema “En todos los paralelogramos, una diagonal lo divide en dos triángulos congruentes”.



Hipótesis ABCD es #. $\overline{AC}$ diagonal.

Tesis: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

Demostración

- 1) En $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ se tiene: $\angle s \cong \angle s'$ ($\angle$ s alternos internos entre //s);
 $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado común); $\angle r' \cong \angle r$ ($\angle$ s alternos internos entre //s).
- 2) Por lo tanto $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ALA).

Se pueden demostrar también las siguientes propiedades:

Teorema “En todo paralelogramo los lados opuestos son congruentes”.

Teorema “En todo paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes”.

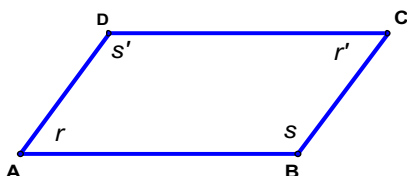
Corolarios: 1. En todo paralelogramo los ángulos adyacentes son suplementarios. 2: Si en un paralelogramo la medida de un ángulo es de 90° , entonces es un rectángulo.

Teorema “En todo paralelogramo las diagonales se dimidian”.

Estos cuatro teoremas corresponden a las *propiedades generales de los paralelogramos*, es decir, propiedades que se cumplen en todos ellos.

A continuación se enuncian las propiedades recíprocas.

Teorema “Un cuadrilátero que tiene los dos pares de ángulos opuestos congruentes, es un paralelogramo”.



Hipótesis ABCD cuadrilátero.

$$\angle r \cong \angle r' \text{ y } \angle s \cong \angle s'.$$

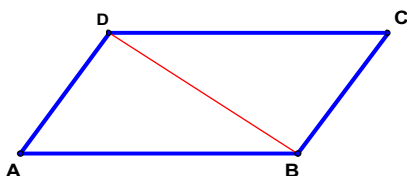
Tesis: ABCD es #.

Demostración

- 1) $m \angle r + m \angle r' + m \angle s + m \angle s' = 360^\circ$ (suma de medidas $\angle$ s interiores de un polígono).
- 2) Reemplazando la hipótesis: $2(m \angle r' + m \angle s') = 2(m \angle r + m \angle s) = 360^\circ$ y por lo tanto, $m \angle r' + m \angle s' = m \angle r + m \angle s = 180^\circ$.
- 3) Pero $\angle r'$ y $\angle s'$ y $\angle r$ y $\angle s$ son internos del mismo lado con respecto a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y además son suplementarios.
- 4) Por lo tanto, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (Propiedad recíproca del paralelismo).
- 5) Análogamente se demuestra que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.
- 6) Luego, de 4) y 5): el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Se puede demostrar el siguiente teorema: “Un cuadrilátero que tiene los dos pares de lados opuestos congruentes, es un paralelogramo”.

Teorema “Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos congruentes y paralelos, es un paralelogramo”.



Hipótesis ABCD es un cuadrilátero

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}; \overline{AB} \parallel \overline{CD}.$$

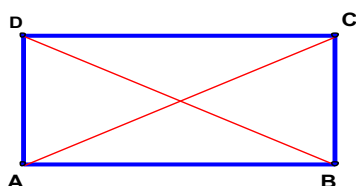
Tesis: ABCD es #.

Demostración

- 1) $B \leftrightarrow D$.
- 2) En $\triangle ABD$ y $\triangle CBD$ se tiene: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (hipótesis), $\angle ABD \cong \angle CDB$ (alternos internos entre $\parallel$ s) y $\overline{DB} \cong \overline{DB}$ (lado común).
- 3) Por lo tanto $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (LAL). Luego $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\angle ADB \cong \angle DBC$ (corolario de la congruencia de $\triangle$ s).
- 4) De 3) y propiedad recíproca del paralelismo $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$.
- 5) De Hipótesis y 4): El cuadrilátero ABCD es # (Tesis).

Se puede demostrar el siguiente teorema “Si en un cuadrilátero las diagonales se miden, entonces es un paralelogramo”.

Teorema “Las diagonales de un paralelogramo rectangular (cuadrado y rectángulo), las diagonales son congruentes”.



Hipótesis ABCD es un rectángulo.

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales.

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Demostración

- 1) En $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ se tiene: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (lados opuestos en #); $\angle ABC \cong \angle CDA$ (90° por hipótesis) y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (lados opuestos en #); luego $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (LAL).
- 2) Por lo tanto: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (lados opuestos a $\angle$ s homólogos en $\triangle$ s $\cong$ s). (Tesis).

Se puede demostrar que “Las diagonales de un paralelogramo equilátero (cuadrado y rombo), se intersectan perpendicularmente y bisecan los ángulos de los vértices”.

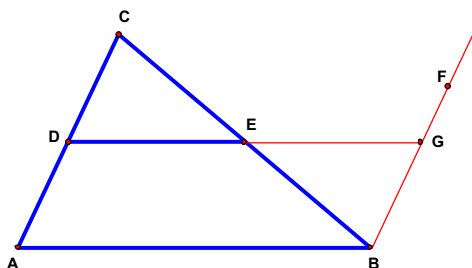
Estos dos últimos teoremas corresponden a las *propiedades particulares de los paralelogramos*.

Se puede demostrar el siguiente teorema “Todo cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes, es un paralelogramo rectangular”.

Propiedades de los segmentos medios de un triángulo

Si un segmento tiene como extremos los puntos medios de los lados de un triángulo, es un *segmento medio* de él. En un triángulo se pueden construir tres segmentos medios.

Teorema “Un segmento medio de un triángulo es paralelo al lado opuesto a él”.



Hipótesis $\overline{DE}$ segmento medio del $\triangle ABC$.

Tesis: $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

Demostración.

1) Se construye $\overline{DE}$ y luego, $\overline{BG} \parallel \overline{BC}$.

2) $\overline{DE} \cap \overline{BG} = \{ G \}$.

3) En $\triangle DEC$ y $\triangle GEB$ se tiene: $\overline{EC} \cong \overline{EB}$ (hipótesis); $\angle DEC \cong \angle BEG$ (opuestos por el vértice) y $\angle DCE \cong \angle EBG$ (alternos internos entre $\parallel$ s).

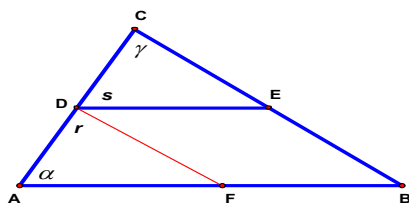
4) Por lo tanto $\triangle DEC \cong \triangle GEB$ (ALA). Luego $\overline{DC} \cong \overline{BG}$ (lados opuestos a $\angle s \cong s$).

5) De hipótesis y 4): $\overline{DA} \cong \overline{BG}$.

6) Por lo tanto el cuadrilátero ABGD tiene un par de lados congruentes y paralelos, luego es un #.

7) Luego $\overline{AB} \parallel \overline{DG}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ (Tesis).

Teorema “La medida de un segmento medio de un triángulo es igual a la mitad de la medida del lado opuesto a él”.



Hipótesis $\overline{DE}$ mediana del $\triangle ABC$.

Tesis: $DE = \frac{1}{2} AB$.

Demostración.

1) Se construye $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$.

2) En $\triangle DEC$ y $\triangle AFD$ se tiene: $\angle \gamma \cong \angle r$ (correspondientes entre $\parallel$ s); $\overline{CD} \cong \overline{DA}$ (por hipótesis) y $\angle s \cong \angle \alpha$ (correspondientes entre $\parallel$ s).

3) Por lo tanto $\triangle DEC \cong \triangle AFD$ (ALA). Luego $\overline{DF} \cong \overline{CE}$ y $\overline{DE} \cong \overline{AF}$ (elementos homólogos en $\triangle s \cong s$).

4) De 3) e hipótesis resulta: $\overline{DF} \cong \overline{BE}$.

5) El cuadrilátero FBED es paralelogramo por tener un par de lados congruentes y paralelos. Por lo tanto: $\overline{FB} \cong \overline{DE}$ (lados opuestos en #).

6) De 5) y 3) se tiene $AF = FB = DE$ y por lo tanto, $DE = \frac{1}{2} AB$ (Tesis).

Teorema “Si por el punto medio de los lados de un triángulo se construye una recta paralela a uno de sus lados, esta paralela dimidia al tercer lado”.

La figura es la del teorema anterior

Hipótesis $\overline{AD} \cong \overline{DC}$; $\overrightarrow{DE} \parallel \overline{AB}$ y $\overrightarrow{DE} \cap \overline{CB} = \{E\}$

Tesis $\overline{BE} \cong \overline{EC}$

Demostración

- 1) Se construye $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$.
- 2) Resulta $\triangle DEC \cong \triangle AFD$ (ALA) y se concluye como en el teorema anterior, que $\overline{BE} \cong \overline{EC}$ (Tesis).

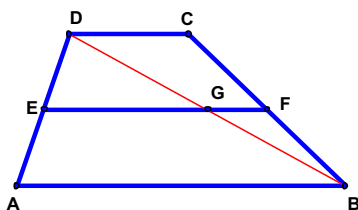
Propiedades de los trapecios

Un cuadrilátero que tiene un solo par de lados paralelos es un *trapecio*.

Los lados paralelos son las *bases* y el segmento perpendicular entre ellas es la *altura*. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos, es la *mediana del trapecio*.

Si los lados no paralelos son congruentes, es *trapecio isósceles*, en caso contrario es *trapecio escaleno*. Si uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases, es *trapecio rectángulo*.

Teorema “Si por el punto medio de los lados de uno de los lados no paralelos de un trapecio se construye una recta paralela a las bases, esta recta dimidia al lado opuesto”.



Hipótesis $\overline{AE} \cong \overline{ED}$, $\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overrightarrow{EF} \cap \overline{BC} = \{F\}$.

Tesis: $\overline{CF} \cong \overline{FB}$.

Demostración

- 1) $D \leftrightarrow B$ y $\overline{EF} \cap \overline{DB} = \{G\}$.
- 2) En $\triangle ABD$, E punto medio de $\overline{AD}$ $\overline{EG} \parallel \overline{AB}$ (hipótesis). Por lo tanto $\overline{DG} \cong \overline{GB}$ (teorema)
- 3) En $\triangle CDB$, G punto medio de $\overline{DB}$ (de 2) y $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ (hipótesis). Por lo tanto $\overline{CF} \cong \overline{FB}$ (Tesis).

Se puede demostrar el teorema recíproco *La mediana de un trapecio es paralela a sus bases*”.

Teorema “La medida del segmento medio de un trapecio es igual a la semi suma de las medidas de sus bases”.

En la figura anterior.

Hipótesis $\overline{EG}$ mediana del trapecio ABCD.

Tesis: $EG = \frac{1}{2}(AB + CD)$

Demostración

- 1) $\overline{EG}$ es segmento medio del $\triangle ABD$ y por lo tanto $EG = \frac{1}{2}AB$.

2) Análogamente, $\overline{FG}$ es segmento medio del $\triangle CDB$ y por lo tanto

$$FG = \frac{1}{2} CD.$$

3) Sumando 1) y 2) se obtiene $EG + FG = \frac{1}{2} (AB + CD)$. Esto es:

$$EG = \frac{1}{2} (AB + CD) \text{ (Tesis).}$$

Se pueden demostrar las siguientes propiedades:

Teorema “*Los ángulos basales de un trapecio isósceles son congruentes*”.

Teorema “*Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes*”.

Taller 2-5

1. Demuestre que si se construyen las bisectrices de dos ángulos opuestos en un paralelogramo escaleno, resulta un nuevo paralelogramo
2. Demuestre que en un triángulo rectángulo, la medida de la mediana correspondiente a la hipotenusa, es igual a la de la hipotenusa.
3. En un triángulo ABC se dibuja la transversal media $\overline{AD}$. Se determina sobre $\overline{AD}$ un punto E de modo $DE = AD$. Se une E con el vértice B. Demuestre que $\overline{BE} \cong \overline{AC}$.
4. Demuestre que las bisectrices de los ángulos interiores de un romboide, al intersectarse, forman un rectángulo.
5. Demuestre que la figura formada al unir los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero con los puntos medios de las diagonales, es un paralelogramo.
6. Demuestre que los segmentos formados al unir los puntos medios de dos lados opuestos de un paralelogramo con los extremos de una de las diagonales, dividen a la otra diagonal en tres segmentos congruentes.
7. Demuestre que en un cuadrilátero cualquiera. Los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos, se dimidian.
8. Demuestre que los puntos de intersección de las bisectrices de los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero cualquiera, forman un nuevo cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son suplementarios.
9. Demuestre que al unir los puntos medio de los tres lados de un triángulo, se obtienen cuatro triángulos congruentes entre sí.
10. Si desde un punto arbitrario de la base de un triángulo isósceles, se construyen los segmentos perpendiculares a los lados, demuestre que la suma de las medidas de estos segmentos es igual a la medida de una de las alturas correspondiente a los lados del triángulo.
11. Si desde un punto interior de un triángulo equilátero se construyen los segmentos perpendiculares a los lados del triángulo, demuestre que la suma de las medidas de estos segmentos, es igual a la medida de una de las alturas del triángulo.
12. Demuestre que la suma de las medidas de los segmentos paralelos contruidos desde un punto de la base de un triángulo isósceles a los lados, es igual a la medida de uno de los lados.
13. Demuestre que si se unen los puntos medios de los lados contiguos de un trapecio isósceles, resulta un rombo.
14. Demuestre que si la medida de una de las bases de un trapecio isósceles es igual a la medida de uno de los lados no paralelos, las diagonales son bisectrices de los ángulos basales adyacentes a la otra base.
15. Demuestre que la medida del segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio, es igual a la semidiferencia de las medidas de las bases.

Capítulo III

La circunferencia y el círculo

Comenzaremos recordando algunas definiciones ya estudiadas.

Definición: El conjunto de puntos del plano que se encuentran a una distancia dada r con respecto a un punto dado P , es la circunferencia con centro en el punto P y de *radio* r .

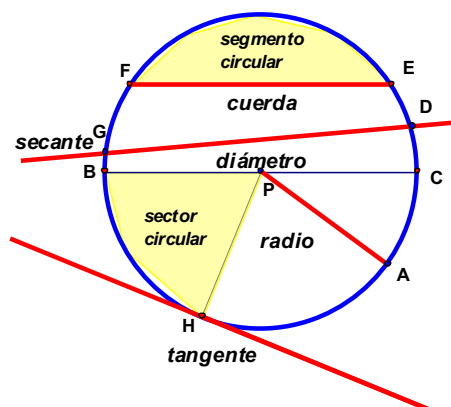
Se puede también definir la circunferencia, como el lugar geométrico de los puntos del plano, que equidistan de un punto fijo P . La distancia de un punto de la circunferencia es igual a la medida del radio ($d = r$).

La circunferencia, como toda línea cerrada, divide al plano en dos partes: una limitada y constituida por sus *puntos interiores* y la otra, ilimitada constituida por los *puntos exteriores*.

La distancia desde un punto interior al centro de la circunferencia es menor que la medida del radio ($d < r$)

La distancia desde un punto exterior al centro de la circunferencia es mayor que la medida del radio ($d > r$).

La figura geométrica formada por la unión de los conjuntos de puntos de la circunferencia y de los puntos interiores, es el *círculo* correspondiente a la circunferencia. El centro y radio del círculo son los mismos de la circunferencia. También se puede decir que la región del plano limitada por la circunferencia es la *región circular*.



En la figura se presenta los elementos de una circunferencia.

El segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y cualquier punto de ella, es un *radio*.

El segmento cuyos extremos son cualquier par de puntos de la circunferencia, es una *cuerda* del círculo.

La cuerda que pasa por el centro de una circunferencia, es un *diámetro* o *cuerda máxima*. Su medida es el doble de la del radio

La recta que interseca a la circunferencia en dos puntos, es una *secante* a ella.

La recta que interseca a la circunferencia en un solo punto, es una *tangente* de ella. El punto de intersección es el *punto de tangencia*.

La recta que no interseca a la circunferencia, es una *recta externa* a ella.

El conjunto de puntos de una circunferencia comprendido entre dos puntos de ella, es un *arco de circunferencia*.

El conjunto de puntos de la región circular comprendida entre dos rayos y el arco correspondiente, es un *sector circular*.

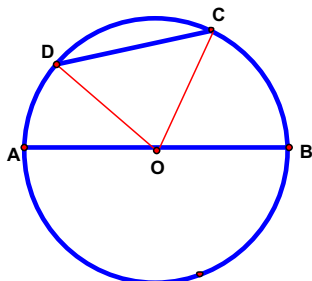
El conjunto de puntos de la región circular comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente, es un *segmento circular*.

El ángulo cuyos lados corresponden a dos radios de una circunferencia y su vértice está en el centro de ella, es un *ángulo del centro* o *ángulo central* del círculo.

A cada ángulo del centro de una circunferencia se le puede hacer corresponder biunívocamente un arco de la circunferencia, y se dirá que el *ángulo comprende al arco* o el *ángulo extiende al arco*. Si

el ángulo del centro forma un par lineal, el arco correspondiente es una *semicircunferencia*. La medida de un ángulo del centro es la medida, en grados, correspondiente al arco que comprenden sus lados. Si las medidas de los radios de dos circunferencias son iguales, entonces las *circunferencias son congruentes*. Igualmente el enunciado recíproco es válido: Si dos circunferencias son congruentes, entonces sus radios son congruentes.

Teorema “En una circunferencia, la medida de un diámetro es mayor que la medida de cualquier cuerda de ella”.



Hipótesis $\overline{AB}$ diámetro y $\overline{DC}$ cuerda de la circunferencia de centro O.

Tesis: $AB > CD$.

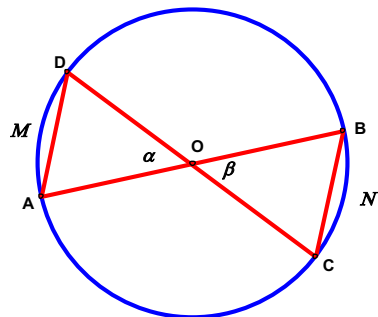
Demostración

- 1) $D \leftrightarrow O \leftrightarrow C$.
- 2) En el $\triangle DOC$ se cumple: $DO + OC > DC$.
- 3) Pero $\overline{DO}$ y $\overline{CO}$ son rayos de la circunferencia.

- 4) Reemplazando en 2): $OD + CO = AB$, resulta $AB > CD$ (Tesis).

Relaciones entre cuerdas y arcos en el círculo.

Teorema “En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, a ángulos del centro congruentes les corresponden arcos y cuerdas congruentes”.



Hipótesis Sea la circunferencia con centro en el punto O y $\alpha \cong \beta$.

Tesis: a) arco $AMD \cong$ arco CNB

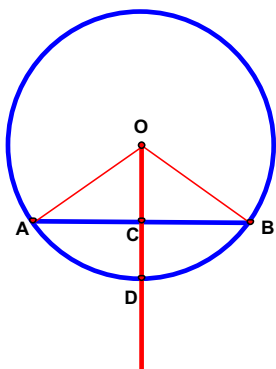
b) $\overline{AD} \cong \overline{CB}$.

Demostración.

- 1) Los ángulos α y β pueden considerarse como en la figura. Como son congruentes, sus medidas son iguales y por lo tanto las medidas, en grados de arco AMD y arco CNB son iguales y por lo tanto arco $AMD \cong$ arco CNB (Tesis a)).
- 2) En $\triangle AOD$ y $\triangle BOC$ se tiene: $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (radios); $\alpha \cong \beta$ (hipótesis) y $\overline{OD} \cong \overline{OC}$ (radios).
- 3) Por lo tanto, $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ (LAL). Luego $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ (corolario de la congruencia). (Tesis b).

Corolario: En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, a ángulo del centro de mayor medida le corresponde arco o cuerda de mayor medida. El enunciado recíproco, también es válido.

Teorema “La recta perpendicular construida desde el centro de una circunferencia a una cuerda de ella: 1. Es mediatriz de la cuerda. 2. Es bisectriz del ángulo del centro que corresponde al arco de la cuerda. 3. Dimidia el arco correspondiente a la cuerda”.



Hipótesis $\overline{AB}$ cuerda de circunferencia de centro

O. $\overrightarrow{OD} \perp \overline{AB}$

Tesis: 1. $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ 2. $\angle AOC \cong \angle COB$

3. arco AD $\cong$ arco DB

Demostración.

1) $A \leftrightarrow O \leftrightarrow B$.

2) En $\triangle AOC$ y $\triangle BOC$ se tiene:

$\overline{AO} \cong \overline{BO}$ (radios) . $\angle OCA \cong \angle OCB$ (hipótesis)

y $\overline{OC} \cong \overline{OC}$ (lado común).

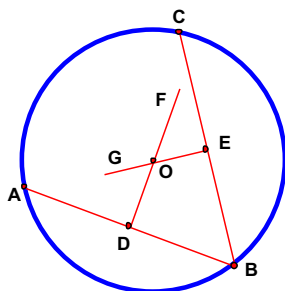
3) Por lo tanto $\triangle AOC \cong \triangle BOC$ (LAL) y $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ (corolario congruencia), (Tesis1.)

4) Por la misma razón: $\angle AOC \cong \angle COB$ (Tesis2.).

5) De 4) arco AD $\cong$ arco DB, por oponerse a ángulos congruentes (Tesis3.).

Corolario: En una circunferencia, el centro de la circunferencia pertenece a la mediatriz de cualquier cuerda.

Construcción fundamental: Construir la circunferencia que pasa por tres puntos no colineales dados.



Construcción.

1) A, B y C son los puntos dados.

2) $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$

3) $\overrightarrow{DF}$ mediatriz de $\overline{AB}$ y $\overrightarrow{EG}$ mediatriz de $\overline{BC}$

4) $\overrightarrow{DF} \cap \overrightarrow{EG} = \{O\}$, centro de la $\otimes$ pedida.

Demostración. Por teorema de las mediatrices de las cuerdas.

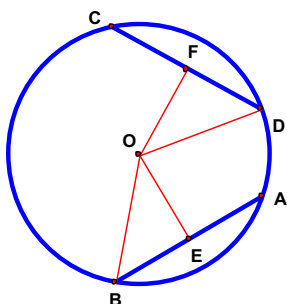
Observación: Hacer la discusión para los siguientes casos: 1. Si los puntos están en línea recta. 2. Dos de los puntos coinciden 3. Los tres puntos coinciden.

Corolarios:

- Tres puntos colineales determinan sólo una única circunferencia.
- Dos circunferencias distintas no pueden intersectarse en más de dos puntos.
- Una recta y una circunferencia pueden intersectarse a lo más en dos *puntos*.

Las relaciones entre las cuerdas y sus distancias al centro de la circunferencia son las siguientes:

Teorema “En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, dos cuerdas congruentes equidistan de su centro”.



Hipótesis $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ cuerdas de circunferencia de

centro O. $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OF} \perp \overline{CD}$.

Tesis: $\overline{OE} \cong \overline{OF}$.

Demostración

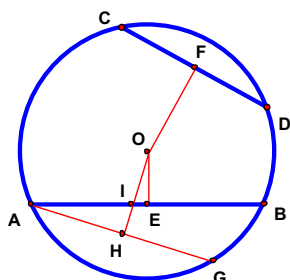
1) $B \leftrightarrow O \leftrightarrow D$.

2) En el $\triangle BEO$ y $\triangle DFO$ se tiene:

$\overline{BO} \cong \overline{DO}$ (radios); $\angle B \cong \angle D$ y $\overline{BE} \cong \overline{DF}$ (Hipótesis).

3) Por lo tanto $\triangle BEO \cong \triangle DFO$ (LLA). Luego $\overline{OE} \cong \overline{OF}$ (Tesis).

Teorema “En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, dos cuerdas desiguales, la mayor está a menor distancia del centro que la otra”.



Hipótesis $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas de circunferencia de centro O y $AB > CD$, $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OF} \perp \overline{CD}$.

Tesis: $OE < OF$

Demostración

1) Se construye $\overline{AG} \cong \overline{CD}$ y $\overline{OH} \perp \overline{AG}$.

2) Por lo tanto $\overline{OH} \cong \overline{OF}$ (teorema anterior).

3) El $\triangle IOE$ es rectángulo en E (hipótesis), por lo tanto $OE < OI$ (cateto menor que hipotenusa).

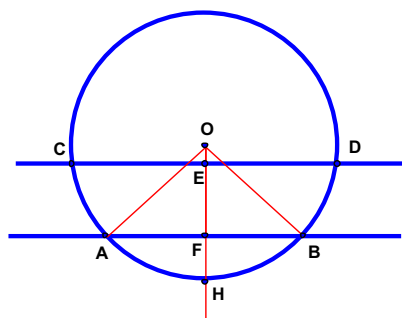
4) Pero $OI < OH$.

5) De 4) y 2): $OI < OH$.

6) De 3) y 5) se deduce $OE < OF$ (Tesis).

Observación: la magnitud m de una cuerda depende de su distancia d al centro de la circunferencia. Si $0 \leq d \leq r$, entonces $0 \leq m \leq 2r$, siendo r el radio.

Teorema “Si dos rectas secantes a una circunferencia son paralelas, entonces determinan arcos congruentes en la circunferencia”.



Hipótesis $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, secantes a la circunferencia de centro O.

Tesis: arco CA $\cong$ arco DB.

Demostración

1) Se construye $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ y $A \leftrightarrow O \leftrightarrow B$.

2) Resulta $m \text{ arco CH} = m \text{ arco DH}$ y $m \text{ arco AH} = m \text{ arco HB}$.

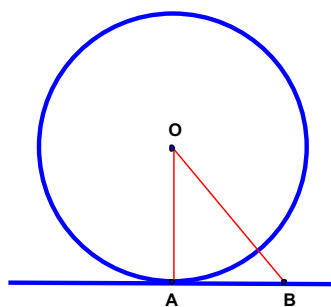
3) Restando la dos igualdades, queda:

$m \text{ arco CH} - m \text{ arco AH} = m \text{ arco DH} - m \text{ arco HB}$; esto es:

$m \text{ arco CA} = m \text{ arco DB}$ o arco CA $\cong$ arco DB (Tesis).

El teorema recíproco también es válido: “Si dos rectas al intersectar a una circunferencia determinan en ella segmentos congruentes, entonces las rectas son paralelas”.

Teorema “La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia”.



Hipótesis La recta $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente a la circunferencia de centro O en el punto A.

$\overline{OA}$ radio.

Tesis: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OA}$

Demostración 1) $O \leftrightarrow B$, siendo B un punto cualquiera de la tangente.

2) OB es mayor que el radio, por ser punto exterior de la circunferencia por lo tanto $OA < OB$.

3) Por lo tanto OA es la menor distancia desde el punto O a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tangente y luego, por definición $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OA}$ (Tesis).

El teorema recíproco también es verdadero: “La recta perpendicular a un radio en su extremo que está sobre la circunferencia, es tangente a ella”.

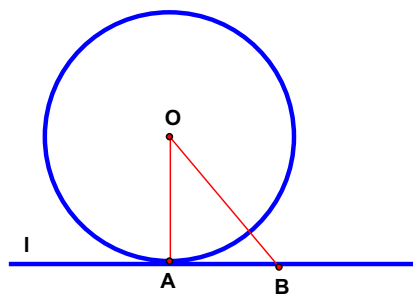
Posiciones relativas de una recta y de una circunferencia

Se estudia la posición mutua entre una circunferencia C y una recta l, situadas en un mismo plano, considerando las posibles relaciones entre las longitudes r del radio y la distancia h desde el centro O de la circunferencia a la recta y dos puntos dados, A y B, de la recta.

Teorema “1) Si $h > r$, entonces todos los puntos de la recta son exteriores al círculo C.

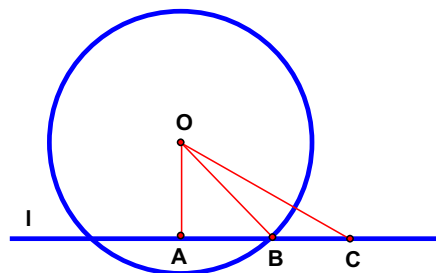
2) Si $h = r$, entonces $C \cap l = \{H\}$, y cualquier otro punto de l es exterior al círculo.

3) Si $h < r$, entonces $C \cap l = \{A, B\}$.



1) Es obvia la demostración.

2) Sea $OA = r$, A punto exterior al círculo, tal que $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ y también B un punto cualquiera de la recta l. Ya que $\overline{OB}$ es oblicuo, es mayor que el segmento $\overline{OA}$, por lo tanto que r . Entonces, B es exterior al círculo. Por lo tanto la recta l y la circunferencia C tienen solo un punto común.



3) Sea $OA < r$, A punto interior en el círculo tal que $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ y también B punto cualquiera de la recta l tal que $OB = r$: Se tiene $OB > OA$ ya que $\overline{OB}$ es segmento oblicuo; por lo tanto, menor que r. Por lo tanto, el punto B podría encontrarse sobre la circunferencia y la recta l tanto a la derecha o a la izquierda del punto A. Entonces la intersección de ambas consiste en dos puntos distintos.

Según el teorema anterior, se puede decir que la recta l es exterior a la circunferencia C en A y B, es tangente a la circunferencia C en A.

afirmar: 1) la recta l es exterior a la circunferencia C. 2) la recta l es tangente a la circunferencia C en el punto A.

que se llama *punto de tangencia o de contacto*. 3) la recta l es *secante* a la circunferencia C .

Corolario. “Cualquier recta que pasa por un punto interior en el círculo es secante con la circunferencia”.

Corolario. “La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia”. Recíprocamente, “la recta perpendicular a un radio de una circunferencia en su extremo, es tangente a la circunferencia”.

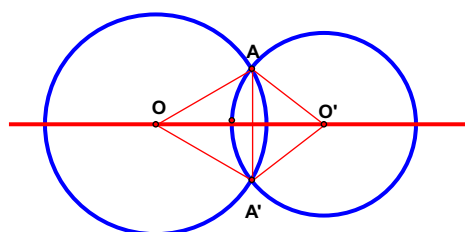
Posiciones relativas de dos circunferencias coplanarias

Dos circunferencias que pertenecen a un mismo plano no pueden tener más de dos puntos en común. Puede darse el caso que no tengan puntos en común, o sólo uno. Se presentan a continuación en forma intuitiva cinco casos que se pueden considerar. Estos casos dependen de la posición de los centros y de las longitudes de los radios de las dos circunferencias.

Se enuncia la siguiente definición para simplificar la comprensión de los teoremas referidos al tema, Definición. Dos circunferencias de distintos radios son:

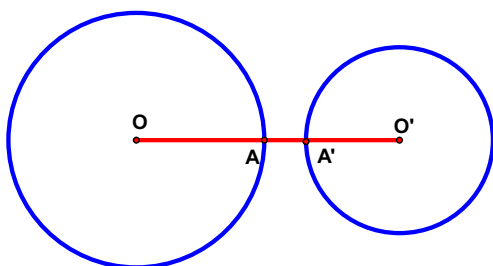
- 1) *externas*, si todos los puntos de una circunferencia son exteriores de la otra y viceversa;
- 2) *tangentes exteriores*, si tienen un punto de contacto en común y todos los demás son respectivamente exteriores;
- 3) *secantes*, si tienen dos puntos comunes;
- 4) *tangentes interiores*, si tienen un punto común y todos los otros puntos de la circunferencia de menor radio son exteriores con respecto a la otra circunferencia ;
- 5) *una interior a la otra*, si todos los puntos de la circunferencia de radio menor son interiores con respecto a la otra circunferencia.

Complementando esta definición, se puede agregar lo siguiente:



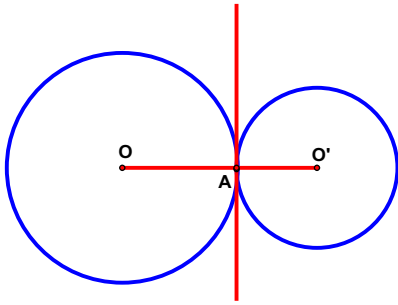
- a) Cuando dos circunferencias tienen en común un punto A que no pertenece a la recta que contiene a los centros, también es común el punto A' , simétrico del punto A respecto a dicha recta, que es el centro de simetría de ambas circunferencias.

- b) Si dos circunferencias tienen un solo punto común, éste debe pertenecer a la recta que contiene a los centros y, además, debe ser el extremo común de dos diámetros.
- c) Si dos circunferencias tienen dos puntos en común, éstos no están en la recta de los centros, ya que de lo contrario, en las dos circunferencias los diámetros coincidirían.



Teorema “ 1) Si dos circunferencias son exteriores una de la otra, la distancia entre los centros es mayor que la suma de las medidas de los radios.

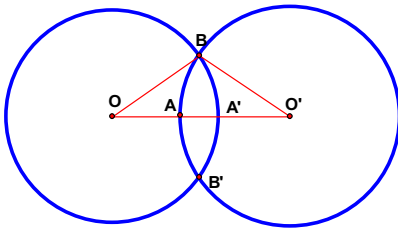
C, C' externas $\Rightarrow OO' > r + r'$.



2) Si dos circunferencias son tangentes exteriores, la distancia entre sus centros es igual que la suma de las medidas de sus radios.

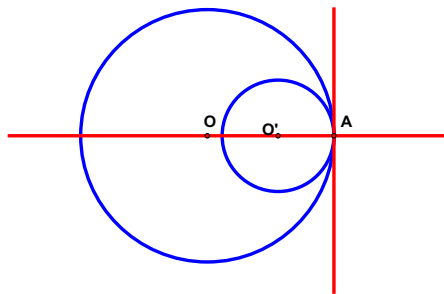
C, C' tangentes exteriores $\Rightarrow OO' = r + r'$.

La recta $l \perp \overline{OO'}$ que pasa por el punto A, resulta tangente a ambas circunferencias y se llama *recta tangente común*.



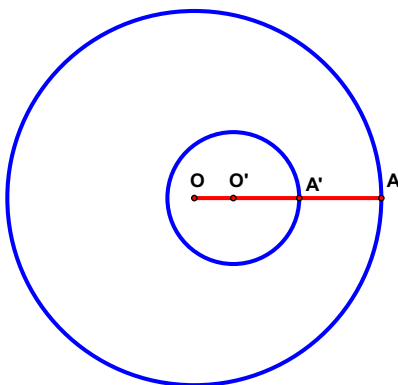
3) Si dos circunferencias son secantes, la distancia entre sus centros es menor que la suma de las medidas de sus radios y mayor que su diferencia.

C, C' secantes $\Rightarrow r - r' < OO' < r + r'$.



4) Si dos circunferencias son tangentes interiores, la distancia entre sus centros es igual a la diferencia de las medidas de sus radios.

C, C' tangentes interiores $\Rightarrow OO' = r - r'$.



5) Si dos circunferencias son interiores una con respecto a la otra, la distancia entre sus centros es menor que la diferencia de las medidas de sus radios.

C, C' interiores $\Rightarrow OO' < r + r'$. En caso que esta diferencia es nula, las circunferencias son concéntricas.

Observación: Si los radios de dos circunferencias son congruentes, los dos últimos casos no se verifican, ya que dos circunferencias congruentes en un mismo plano pueden ser solo exteriores o tangentes exteriores o secantes.

Relaciones angulares en el círculo

Un *ángulo en un círculo es convexo* si su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas (*ángulo inscrito*) o una cuerda y una tangente (*ángulo semi inscrito*) o una cuerda y una secante que interseca a la circunferencia en uno de los extremos de la cuerda (*ángulo ex inscrito*). Si dos cuerdas de un círculo se intersecan, forman cuatro *ángulos interiores*. Si dos rectas secantes se intersecan en un punto exterior de la circunferencia, forman un *ángulo exterior*.

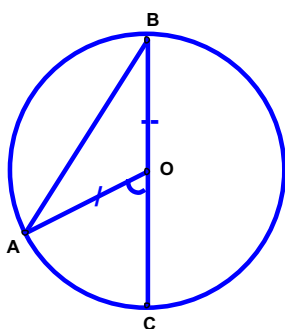
Un ángulo en un círculo *comprende un arco* de ella y *a cada arco le corresponde un ángulo en el círculo*.

Recordemos que la medida de un ángulo del centro, corresponde a la medida, en grados, del arco que le corresponde en la circunferencia.

Teorema “La medida de un ángulo inscrito, en un círculo, es igual a la mitad de la del ángulo del centro que le corresponde el mismo arco”.

Distinguiremos tres casos:

1er caso) El centro de la circunferencia pertenece a uno de los la dos del ángulo.



Hipótesis En la circunferencia de centro O, $\angle ABC$ inscrito y $\angle AOC$ del centro, que comprenden el mismo arco AC.

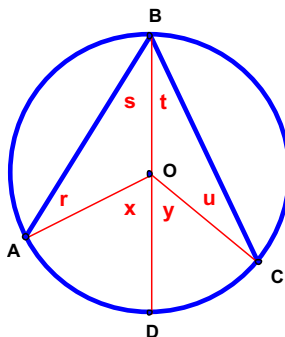
Tesis: $m \angle ABC = \frac{1}{2} m \angle AOC$.

Demostración

- 1) El $\triangle AOC$ es isósceles, ya que $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ (radios). Por lo tanto $\angle ABO \cong \angle BAO$ (ángulos basales).
- 2) Además, $m \angle AOC = m \angle ABO + m \angle BAO$ (ángulo exterior del triángulo).

3) Reemplazando 1) en 2) queda: $m \angle AOC = 2m \angle ABO = 2m \angle ABC$ y por lo tanto, $m \angle ABC = \frac{1}{2} m \angle AOC$ (Tesis).

2º caso) El centro de la circunferencia está en el interior del ángulo.



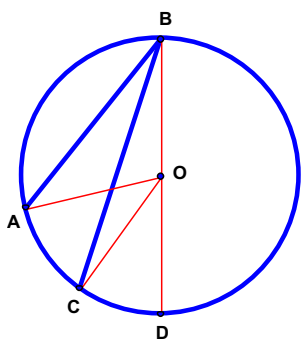
Hipótesis En la circunferencia de centro O, $\angle ABC$ inscrito y $\angle AOC$ del centro, que comprenden el mismo arco AC.

Tesis: $m \angle ABC = \frac{1}{2} m \angle AOC$.

Demostración

- 1) Se construye $\overline{BO}$ y $A \leftrightarrow O \leftrightarrow C$.
- 2) Por el 1er caso: $m \angle x = m \angle r + m \angle s$ y $m \angle y = m \angle t + m \angle u$.
- 3) Por lo tanto $2m \angle s = m \angle x$ y $2m \angle t = m \angle y$.
- 4) Sumado queda $2(m \angle s + m \angle t) = m \angle x + m \angle y$.
- 5) Pero en la figura $m \angle s + m \angle t = m \angle ABC$ y $m \angle x + m \angle y = m \angle AOC$.
- 6) Reemplazando 5) en 4) queda: $2(m \angle s + m \angle t) = m \angle x + m \angle y$ (Tesis).

3er caso) El centro de la circunferencia está en el exterior del ángulo.



Hipótesis En la circunferencia de centro O, $\angle ABC$ inscrito y $\angle AOC$ del centro, que comprenden el mismo arco AC.

Tesis: $m \angle ABC = \frac{1}{2} m \angle AOC$.

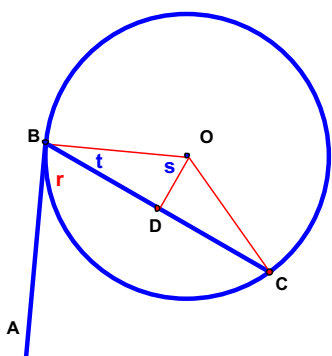
Demostración

- 1) Se construye $\overrightarrow{BO}$ y $A \leftrightarrow O \leftrightarrow C$.
- 2) $m \angle ABC = m \angle ABD + m \angle CBD$ (axioma de suma de ángulos).
- 3) Pero por 1er caso: $m \angle ABD = \frac{1}{2} m \text{ arco } AD$ y $m \angle CBD = \frac{1}{2} m \text{ arco } CD$.
- 4) Reemplazando 3) en 2): $m \angle ABC = \frac{1}{2} (m \text{ arco } AD + m \text{ arco } CD)$.
- 5) Pero en la figura: $m \text{ arco } AD + m \text{ arco } CD = m \text{ arco } AC$.
- 6) Reemplazando 5) en 4) queda: $m \angle ABC = \frac{1}{2} m \text{ arco } AC$.
- 7) Pero $m \angle AOC = m \text{ arco } AC$, por lo tanto reemplazando en 6) queda: $m \angle ABC = \frac{1}{2} m \angle AOC$. (Tesis).

Corolarios:

1. En una misma circunferencia, todos los ángulos inscritos que comprenden un mismo arco, son congruentes.
2. Si dos o más ángulos inscritos en un círculo o en círculos de mismo radio comprenden arcos congruentes, son congruentes.
3. Si un ángulo está inscrito en un semi círculo, es recto.
4. La bisectriz de un ángulo inscrito interseca a la circunferencia en el punto medio del arco comprendido.
5. Recíproco: El segmento que une el vértice de un ángulo inscrito con el punto medio del arco comprendido, es bisectriz del ángulo.

Teorema “La medida de un ángulo semi inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro correspondiente al arco que comprende”.



Hipótesis $\angle ABC$ semi inscrito en círculo de centro O.

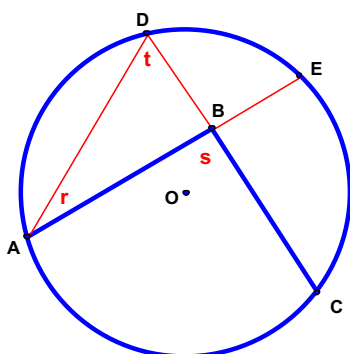
Tesis: $m \angle ABC = \frac{1}{2} m \angle BOC$.

Demostración

- 1). $B \leftrightarrow O \leftrightarrow C$ y se construye $\overline{OD} \perp \overline{BC}$.
- 2) Resulta $m \angle r + m \angle t = 90^\circ$ (Propiedad de la tangente).
- 3) $m \angle s + m \angle t = 90^\circ$ (de 1.)
- 4) De 2) y 3) $\angle r \cong \angle s$ (tienen mismo complemento).
- 5) Pero por propiedad del Δ isósceles, $\overline{OD}$ es bisectriz del $\angle BOC$.

6) De 4) y 5) se deduce que $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\angle BOC$ (Tesis).

Teorema “La medida de un ángulo interior en un círculo es la semi suma de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados”.



Hipótesis $\angle ABC$ es interior en el círculo de centro O.

Tesis: $m\angle ABC = \frac{1}{2}(m \text{ arco} AC + m \text{ arco} DE)$.

Demostración

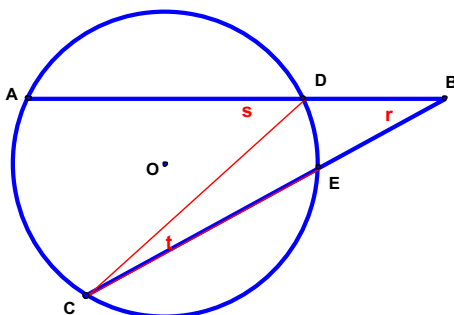
1) Se construyen $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$, siendo D y E puntos de la circunferencia y $A \leftrightarrow D$.

2) En el $\triangle ABD$, $m\angle s = m\angle t + m\angle r$ ($\angle$ exterior del $\triangle$).

3) Pero $m\angle t = \frac{1}{2}m \text{ arco} AC$ y $m\angle r = \frac{1}{2}m \text{ arco} DE$ ($\angle$ s inscritos).

4) Reemplazando 3) en 2), queda: $m\angle ABC = \frac{1}{2}(m \text{ arco} AC + m \text{ arco} DE)$ (Tesis).

Teorema “La medida de un ángulo exterior en un círculo es la semi diferencia de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados”.



Hipótesis $\angle ABC$ es exterior en el círculo de centro O.

Tesis:

$m\angle ABC = \frac{1}{2}(m \text{ arco} AC - m \text{ arco} DE)$.

Demostración

1) $A \leftrightarrow D$

2) En el $\triangle ABD$ $m\angle s = m\angle r + m\angle t$ ($\angle$ exterior del $\triangle$).

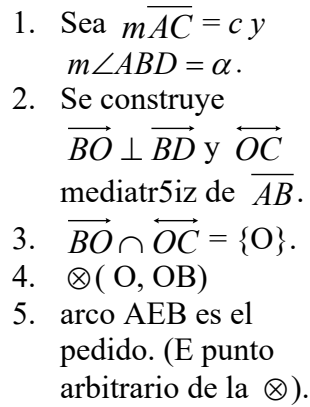
3) Por lo tanto $m\angle r = m\angle s - m\angle t$.

4) Pero $m\angle s = \frac{1}{2}m \text{ arco} AC$ y $m\angle t = \frac{1}{2}m \text{ arco} DE$ ($\angle$ s inscritos).

5) Reemplazando 4) en 3) resulta: $m\angle ABC = \frac{1}{2}(m \text{ arco} AC - m \text{ arco} DE)$ (Tesis).

Definición: Arco capaz de un ángulo es el arco de una circunferencia en el cual se puede inscribir dicho ángulo.

Construcción: Conociendo el ángulo α y un segmento de medida c , construir el arco capaz de α sobre el segmento c como cuerda.



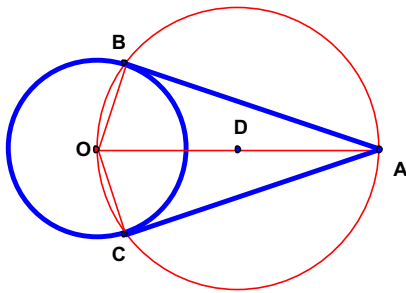
2. $\angle AEB \cong \angle ABD$ ($\angle$ inscrito y semi inscrito en arco AB).

4. Como E es un punto arbitrario del arco AEB, la congruencia se cumple para

Se puede enunciar la siguiente propiedad: El L.G. de los terceros vértices de un triángulo del que se conocen las medidas de un lado y del ángulo opuesto, es el arco capaz de dicho ángulo construido sobre el lado conocido como cuerda.

1. En la figura los cuatro ángulos son inscritos.

64



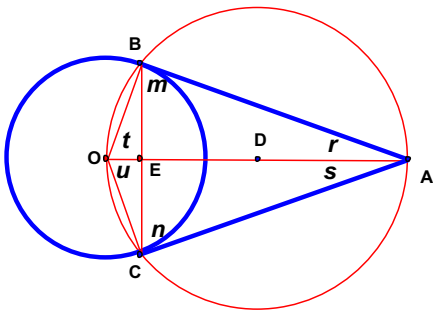
Solución

1. $O \leftrightarrow A$ y se construye $\overline{OD} \cong \overline{DA}$.
2. $\otimes(D, OA)$
3. $\otimes(D, OA) \cap \otimes(O) = \{B, C\}$.
4. $C \leftrightarrow A \leftrightarrow B$
5. $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son los segmentos tangentes pedidos.

Demostración:

1. $C \leftrightarrow O \leftrightarrow B$.
2. $m \angle OCA = m \angle OBA = 90^\circ$ (inscritos en un medio círculo).
3. Por lo tanto $\overline{OC} \perp \overline{CA}$ y $\overline{OB} \perp \overline{BA}$. Luego: $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son tangentes a la circunferencia (propiedad de la tangente).

Teorema “Los segmentos tangentes a una circunferencia contruidos desde un punto en el exterior de ella, son congruentes”.



Hipótesis $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son tangentes a la circunferencia de centro O.

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$.

Demostración

- 1) $C \leftrightarrow O \leftrightarrow B$
- 2) En $\triangle OAC$ y $\triangle OAB$ se tiene:

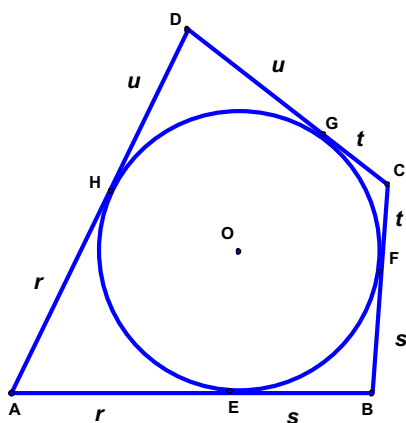
$\overline{OA} \cong \overline{OA}$ (es lado común); $\overline{CO} \cong \overline{BO}$ (radios) y $\angle OCA \cong \angle OBA (90^\circ, \text{inscritos en medio círculo})$.

- 4) Por lo tanto, $\triangle OAC \cong \triangle OAB$ (LLA).
- 5) Luego $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, por ser elementos homólogos en $\triangle$ s congruentes (Tesis)

Corolarios: Si desde un punto exterior a una circunferencia se construyen los dos segmentos tangentes a ella:

- 1) La recta que une el punto exterior con el centro de la circunferencia es bisectriz del ángulo exterior formado por los segmentos tangentes y del ángulo del centro respectivo.
- 2) Esta recta también es mediatriz del segmento que une los puntos de tangencia.

Teorema “Si un cuadrilátero es circunscrito a una circunferencia, entonces las sumas de las medidas de dos lados opuestos son iguales”.



Hipótesis ABCD es un cuadrilátero circunscrito en circunferencia de centro O. E, F, G, H son los puntos de tangencia.

Tesis: $AB + CD = BC + AD$.

Demostración

1) Aplicando el teorema de los segmentos tangentes, se designan

r, s, t, u las medidas de las distancias desde los vértices a los puntos de tangencia.

3) $AB + CD = r + s + t + u.$

4) $BC + AD = s + t + r + u.$

5) De 3) y 4) se obtiene: $AB + CD = BC + AD$ (Tesis).

Se puede demostrar el teorema recíproco: “Si en un cuadrilátero la suma de las medidas de dos lados opuestos son iguales, entonces el cuadrilátero es inscriptible a una circunferencia.

Taller 3-1

- Desde un punto A exterior a un círculo se construyen los segmentos tangentes AB y AC. Verifique que se cumple la siguiente relación: $m \angle CAB = 2m \angle OCB$.
- Desde un punto A exterior al círculo con centro en O, se construye un segmento AB tangente y sobre el segmento AO, a partir de A se hace $AC = AB$. Se construye el rayo BC que interseca a la circunferencia en el punto E. Pruebe que $\overline{EO} \perp \overline{OA}$.
- Considerando las propiedades del ángulo inscrito, demuestre que: 1) En un triángulo rectángulo, la medida de la mediana que corresponde al vértice del ángulo recto es igual a la mitad de la medida de la hipotenusa. 2) Si la medida de la mediana correspondiente a un lado de un triángulo es igual a la mitad de la medida de dicho lado, entonces el triángulo es rectángulo.
- Dada un círculo y un punto P exterior a él, construya desde P un segmento tangente PA y un segmento secante PB. Una el punto de tangencia A con los extremos B y C de la cuerda intersecada por la circunferencia y el segmento secante. Si se traza la bisectriz del $\angle CAB$, de modo que corte al segmento secante en D. Demuestre que $PD = PA$.
- Dada una cuerda AB en un círculo, construya una tangente a él en A. Demuestre que el punto medio del arco comprendido por la cuerda, equidista de ésta y de la recta tangente.
- Demuestre que en un triángulo ABC, rectángulo en C, CH es la medida de la altura. Demuestre que el punto H, el vértice C y los puntos medios de los tres lados, pertenecen a la misma circunferencia.
- Desde un punto M situado sobre una circunferencia, dibuje una cuerda MN y un segmento tangente MT tal que $MT = MN$. Dibuje el rayo TN que corta a la circunferencia en A. Demuestre que el triángulo MTA es isósceles.
- En un triángulo ABC, inscrito en un círculo, la medida de $\alpha = 60^\circ$ y la de $\beta = 50^\circ$. Dibuje las tres bisectrices de los ángulos del triángulo hasta que intersequen la circunferencia en los puntos M, N y P. Una estos puntos y determine las medidas de los ángulos interiores del triángulo MNP resultante.
- Dados tres puntos A, B y C en el mismo plano, determine un cuarto punto Q tal que unido con los tres anteriores, los segmentos QA, QB y QC formen dos ángulos dados.

10. Construir un triángulo rectángulo dados p y q .
11. Construir un triángulo dados: a) c, t_c, γ . b) p, q, γ .
12. Demuestre que todo paralelogramo circunscrito a un círculo es equilátero.
13. Demuestre que en un cuadrilátero inscrito que tiene dos lados paralelos, los otros dos son congruentes.
14. En un cuadrilátero inscrito se tiene la relación $\alpha : \beta : \lambda = 5 : 6 : 7$. Determine la medida de cada ángulo del cuadrilátero.

Capítulo IV

GEOMETRÍA DE LAS PROPORCIONES

Después de haber estudiado las propiedades generales de la Geometría axiomática en el plano y haber profundizado los conceptos de paralelismo y congruencia, en este segundo curso profundizaremos otro de los grandes pilares de esta ciencia: el concepto de la *Semejanza o Similitud* y sus diferentes aplicaciones. Además estudiaremos la diferentes *Transformaciones de las figuras en el plano*.

Para comenzar nuestro estudio, primero recordaremos algunas propiedades de las razones y proporciones.

Razones y proporciones

Sabemos que las diferentes medidas usadas en geometría, longitudes, medidas de ángulos..., no son más que números reales, con todas sus propiedades y operaciones que se pueden efectuar con ellas. Las diferentes medidas están relacionadas con una comparación de un sistema de coordenadas basadas en cierta unidad elegida arbitrariamente.

Dos medidas se dicen que son *homogéneas*, si están en el mismo sistema de coordenadas o sea, están expresadas en las mismas unidades.

Definición: *razón es la comparación de dos medidas o cantidades homogéneas mediante un cociente.*

Una razón se escribe m / n o $m : n$ y se lee m es a n . El valor m recibe el nombre de *antecedente* y n es el *consecuente*. Si se anota $m : n = k / \text{constante}$), entonces se obtiene $m = k * n$.

Definición: *proporción es la igualdad de dos razones.*

Una proporción se escribe $m / n = p / q$ o $m : n = p : q$ y se lee m es a n como p es a q .

Las cantidades m y q se llaman *extremos de la proporción*; p y n son los *medios*.

Una proporción cuyos términos son todos diferentes se dice que es *discontinua*. Si

$A : B = C : D$, es discontinua, se dice que D es *cuarta proporcional entre A,B,C*.

Una proporción que tiene repetidos los medios o los extremos, se dice que es *continua*. Los términos repetidos se llaman *media proporcional o media geométrica entre los otros dos*. Si $A : B = B : D$, se dice que B es *media proporcional geométrica entre A y D*. Además se dice que C es *tercera proporcional entre A y B*.

A las proporciones formadas por medidas se les puede aplicar las propiedades demostradas en la teoría de las proporciones aritméticas.

Propiedades

Si A, B, C, D son medidas homogéneas y $A : B = C : D$ y $m, n \in R_0$

- 1) $A \cong B \Rightarrow C \cong D$ y $A \geq B \Rightarrow C \geq D$
- 2) $m A : m B = n C : n D$
- 3) $m A : n B = m C : n D$
- 4) $C : D = A : B$ (*permutar*)
- 5) $B : A = D : C$ (*Invertir*)
- 6) $D : C = B : A$ (*alternar los medios*); $D : B = C : A$ (*alternar los extremos*)
- 7) $(A + B) : B = (C + D) : D$ o $A : (A + B) = C : (C + D)$ (*Componer*)
- 8) Si $A > B$ y $C > D$, entonces $(A - B) : B = (C - D) : D$ o $A : (A - B) = C : (C - D)$ (*descomponer*)
- 9) $(A + B) : (A - B) = (C + D) : (C - D)$ o viceversa (*componer y descomponer*)
- 10) *Propiedad fundamental de las proporciones* $A * D = B * C$. “En una proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos”.
- 11) En una serie de proporciones (serie de dos o más razones iguales), la suma de los antecedentes de las razones es a la suma de los consecuentes como un antecedente cualquiera es a su respectivo consecuente. Si se cumple que $A : B = C : D = E : F \dots = k$ (constante), entonces resulta: $(A + C + E \dots) : (B + D + F) = A : B = \dots = k$

Segmentos proporcionales

Se considera la *razón entre dos segmentos* a la razón que existe entre las medidas homogéneas de ellos. “Dos segmentos son proporcionales a otros dos, cuando la razón que existe entre las medidas de los dos primeros es igual a la razón de las medidas de los otros dos”.

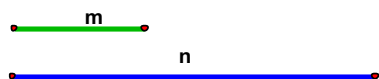
División de un segmento en una razón dada División armónica

Recordemos cómo se encuentra el máximo común divisor (m.c.d.) entre dos números: se divide el mayor por el menor.

Si el residuo de esta división es cero, el número menor es el m.c.d. entre ellos.

Si existe residuo, se divide el divisor por cada residuo tantas veces hasta que el residuo sea cero y el último divisor empleado es el m.c.d.

Sean m y n las medidas de dos segmentos (figura).

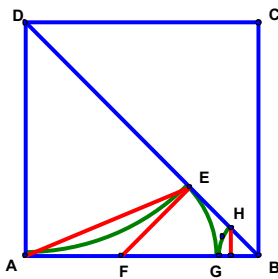


Para encontrar la máxima común medida entre ellos, se emplea un procedimiento análogo al presentado anteriormente.

La medida menor m , se copia sobre el segmento de medida n tanta veces como sea posible. Se procede de misma la manera con el segmento restante sobre el segmento de medida m sucesivamente, hasta que no quede segmento restante. La medida del último segmento obtenido es la *medida común*. Se supone que los segmentos tienen común medida. En este caso se dice que los *segmentos son conmensurables*.

Si esta común medida no existe, se dice que los *segmentos son inconmensurables*.

Citemos, por ejemplo, la relación entre la medida del lado de un cuadrado y la de su diagonal (figura).



$$DB - DA = EB$$

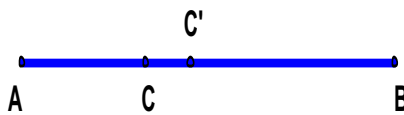
DA cabe una vez en DB y sobra EB.

Se traza $\overline{EF} \perp \overline{EB}$. Entonces $EF = HE = AF$.

EB cabe dos veces en AB y sobra GB.

Se traza $\overline{GH} \perp \overline{GB}$. Entonces $GH = HE = GB$. etc.

Teorema “En un segmento $\overline{AB}$ existe un solo punto en su interior cuyas distancias a los extremos del segmento están en una razón dada”.



Hipótesis. Sea $\overline{AB}$ el trazo y $C \in \overline{AB}$.

$$CA : CB = m : n.$$

Tesis. El punto C es único

Demostración. 1. Supongamos que existe otro punto $C' \in \overline{AB}$ tal que $C'A : C'B = m : n$.

2. De 1. , Hipótesis y propiedad transitiva de la igualdad:

$$CA : CB = C'A : C'B.$$

3. $(CA + CB) : CB = (C'A + C'B) : C'B$ (componiendo).

4. Pero $AC + CB = AB = AC' + C'B$ (definición estar entre).

5. Reemplazando 4. en 3. : $AB : CB = AB : C'B$.

6. Por lo tanto $CB = C'B$ (proporción de antecedentes iguales).

7. Luego C y C' es el mismo punto. (Tesis).

Se puede demostrar el siguiente teorema “En un segmento $\overline{AB}$ existe un solo punto en su exterior cuyas distancias a los extremos del segmento están en una razón dada”.

Corolario: Dados dos puntos A y B sobre una recta, existen en esta recta dos puntos y solo dos, que dividen al segmento $\overline{AB}$ en una razón dada.

Definición: Dados cuatro puntos sobre una recta de modo que dos de ellos dividan interior y exteriormente al segmento formado por los otros dos, estos cuatro puntos son *puntos armónicos*.

Definición: *Dividir armónicamente* un segmento, es dividir interior y exteriormente al segmento en una razón dada.

Para dejar establecido que un segmento $\overline{AB}$ queda dividido armónicamente por dos puntos C y D (figura), basta probar que se cumple la proporción $CB : CA = DA : DB$. La proporción resultante es una *proporción armónica*.



Los puntos A y B son *puntos conjugados armónicos* con respecto a los puntos C y D, y recíprocamente.

Entre las dos combinaciones de puntos se forma un *juego armónico*.

Taller 4-1

1. Un punto D está situado sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $AB = 72$ cm y $DA : DB = 7 : 3$. Determine las medidas DA y DB.
2. El punto C divide interiormente a $\overline{AB}$ de medida $AB = 24$ cm, en la razón $CA : CB = 2 : 5$. Determine las medidas CA y CB.
3. Un punto N divide interiormente a $\overline{AB}$ en la razón $NA : NB = 5 : 9$. La distancia desde N al punto medio de $\overline{AB}$ es de 56 cm. Determine las medidas NA, NB, y AB.
4. Un punto M divide exteriormente a $\overline{CD}$ en la razón $MC : MD = 5 : 9$. La distancia desde M al punto medio de $\overline{CD}$ es de 84 cm. Determine las medidas MC y MD.

Teorema general de Thales - Aplicaciones.

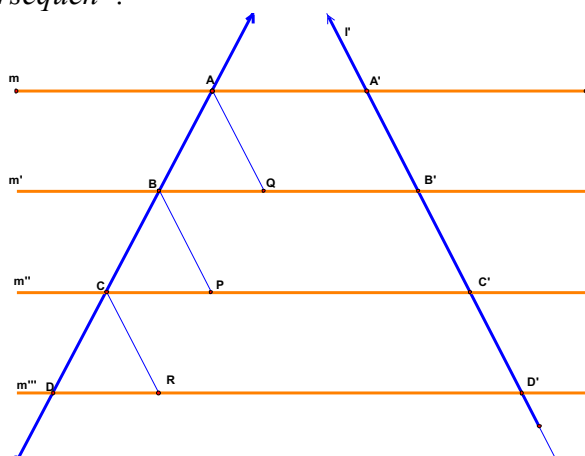
Thales de Mileto Nació: alrededor del año 640 AC en Mileto, Asia Menor (ahora Turquía). Falleció: alrededor 560 AC en Mileto, Asia Menor (ahora Turquía). Thales era un hombre esencialmente práctico: comerciante, hábil en ingeniería, astrónomo, geómetra, estadista. Se le incluye por tradición entre los *Siete Sabios*.

Como comerciante se cuenta de él que un año, previniendo una gran producción de aceitunas, monopolizó todos los lagares para hacer el aceite, con lo cual obtuvo una espléndida ganancia. Como lo que ahora llamaríamos ingeniero, estuvo dirigiendo obras hidráulicas y se dice que desvió el curso del río Halis mediante la construcción de diques.

Como astrónomo fue más célebre, predijo el eclipse total de sol visible en Asia Menor, como asimismo se cree que descubrió la constelación de la Osa Menor y que consideraba a la Luna 700 veces menor que el sol. También se cree que conoció la carrera del sol de un trópico a otro. Explicó los eclipses de sol y de luna. Finalmente creía que el año tenía 365 días. Estudió en Egipto, llevó los conocimientos geométricos a Grecia, fundó la Escuela Iónica, la primera escuela filosófica griega que proporcionó los fundamentos de la geometría. A Thales se le atribuyen 5 teoremas de la geometría elemental:

- 1.-Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales
- 2.-Un círculo es bisecado por algún diámetro
- 3.-Los ángulos entre dos líneas rectas que se cortan son iguales
- 4.-Dos triángulos son congruentes si ellos tienen dos ángulos y un lado igual.
- 5.-Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto

Teorema (Lema) “Si un conjunto de rectas paralelas determinan segmentos congruentes sobre una recta dada, entonces también determinan segmentos congruentes en cualquier otra recta a la que también intersequen”.



Hipótesis. $m \parallel m' \parallel m'' \parallel m'''$

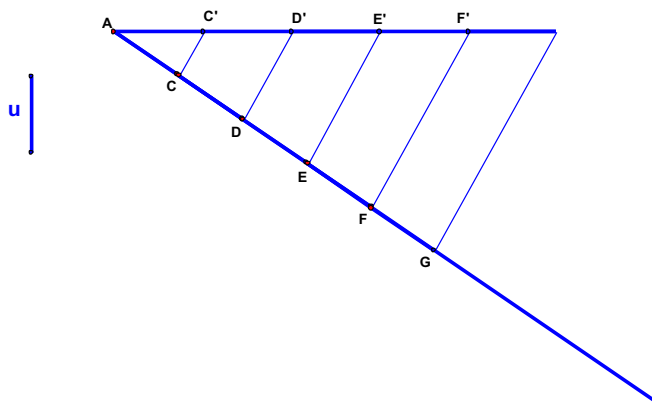
$AB = BC = CD$

Tesis. $A'B' = B'C' = C'D'$

Demostración.

1. Se construyen $\overline{AO} \parallel \overline{BP} \parallel \overline{CR} \parallel l'$
2. Se tiene que el cuadrilátero $OB'A'A$ es un paralelogramo (2 pares de lados $\parallel$ s) y por lo tanto $\overline{AO} \cong \overline{A'B'}$ (lados opuestos en #).
3. En los Δ s BOA y CPB se tiene: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (por hipótesis)
 $\angle ABO \cong \angle BCP$ (ángulos correspondientes entre $\parallel$ s)
 $\angle BAO \cong \angle CBP$ id.
4. De 3. se deduce que $\Delta BOA \cong \Delta CPB$ (ALA de congruencia) y por lo tanto $\overline{AO} \cong \overline{BP}$.
5. Análogamente se demuestra que $\overline{BP} \cong \overline{CR}$.
6. De 2., 4. y 5. se deduce que $A'B' = B'C' = C'D'$. (Tesis).

Problema: Se puede aplicar este teorema para dividir un segmento dado $\overline{AB}$ en n partes congruentes. Por ejemplo en 5 partes.



Solución

1. Sea $\overline{AB}$ el segmento dado.
2. En el vértice A se construye $\overrightarrow{AF}$. En el se construyen 5 segmentos consecutivos de medida arbitraria u.
3. El punto G, el último punto obtenido en $\overrightarrow{AF}$ se une con el vértice B y se obtiene $\overline{GB}$.
4. Por cada uno de los otros puntos, se construyen $\overline{FF'} \parallel \overline{EE'} \parallel \overline{DD'} \parallel \overline{CC'}$.
5. Los puntos C', D', E' y D' en $\overline{AB}$ son los puntos que lo dividen en 5 partes congruentes.

Basándose en el teorema precedente se puede demostrar el *Teorema General de Thales*: “Si un conjunto de rectas paralelas intersecan a otras dos rectas dadas, determinan sobre ellas segmentos proporcionales”.

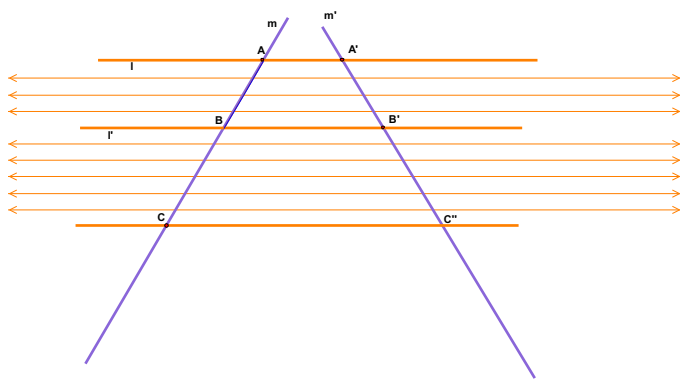
Hipótesis.

$m \parallel m' \parallel m'' \parallel m'''$

Tesis. $AB : BC = A'B' : B'C'$

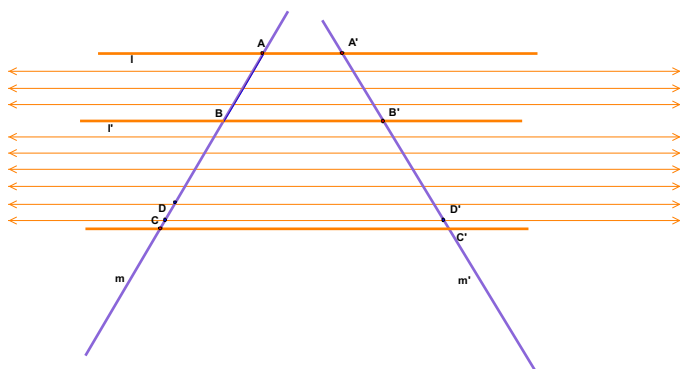
Demostración. Parte A)

- 1) Los segmentos tienen una común medida, o sea son conmensurables.
- 2) Entonces por los puntos de división se construyen rectas paralelas a la recta $\overleftrightarrow{AA'}$.



- 2) Los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ quedarán divididos en el mismo número de partes que $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ (Teorema anterior).
- 3) Por lo tanto: $AB : BC = A'B' : B'C'$.

Parte B) 1) Los segmentos no tienen una común medida, o sea son inconmensurables.



- 2) Se considera una medida δ que está contenido m veces en AB y n veces en BC quedando un resto DC menor que δ .
- 3) Se tiene que $AB : BD = A'B' : B'D'$.
- 4) Si se considera una medida δ' cada vez más pequeña que δ , en el límite se tendrá que $AB : BC = A'B' : B'C'$.

4) De 3) y 4) se concluye que $A'B' : B'D' = A'B' : B'C'$. Luego $B'D' = B'C'$. Lo que quiere decir que en el límite la razón de proporcionalidad se mantiene. (tesis).

Forma general del teorema de Thales.

Componiendo la proporción $AB : BC = A'B' : B'C'$ del teorema anterior se tiene:

$(AB + BC) : AB = (A'B' + B'C') : A'B'$. En la figura $(AB + BC) = AC$ y

$(A'B' + B'C') = A'C'$. Por lo tanto $AC : AB = A'C' : A'B'$. Análogamente se pueden demostrar las siguientes proporciones.

Resumen de las diversas formas del Teorema de Thales:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} ; \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} ; \frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{C'B'} ; \dots etc.$$

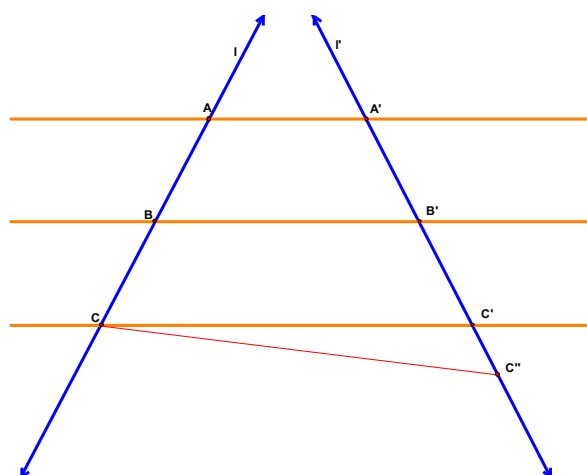
$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'} ; \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} ; \frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'} ; \dots etc.$$

Considerando el conjunto de razones anteriores, se puede generalizar el Teorema de Thales con el siguiente enunciado: “Si un conjunto de rectas paralelas intersecan a otras dos rectas dadas, dos segmentos determinados sobre una de las rectas son proporcionales a los dos segmentos correspondientes en la otra recta”.

Teorema (recíproco del teorema de Thales “Si en dos rectas dada l y l' se consideran dos conjuntos de puntos ordenados, $L = \{A, B, C, \dots\}$ y $L' = \{A', B', C', \dots\}$ en cada una de ellas tales que:

- 1) los segmentos que tienen por extremos los puntos correspondientes son proporcionales
- 2) las rectas $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$.

Entonces, son paralelas todas las otras rectas construidas por cada par de puntos correspondientes.



Hipótesis. $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{BB'}$
 $AB : A'B' = BC : B'C'$

Tesis. $\overrightarrow{CC'} \parallel \overrightarrow{BB'}$

Demostración.

1) Si es falso que

$\overrightarrow{CC'} \parallel \overrightarrow{BB'}$,

entonces se construye

$\overrightarrow{CC''} \parallel \overrightarrow{BB'}$.

2) Por lo tanto $AB : A'B' =$

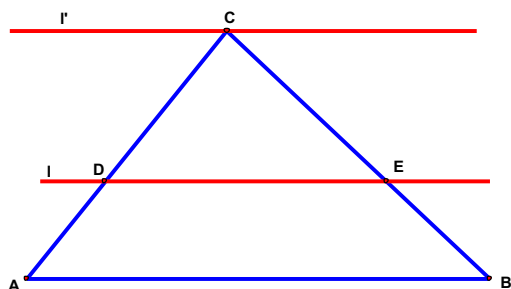
$= BC : B'C''$

(por Teorema de Thales).

3) De 2) e Hipótesis: $BC : B'C' = BC : B'C''$ y por lo tanto $BC' = BC''$ (propiedad de las proporciones)

4) Por lo tanto los puntos C' y C'' coinciden en l'' y $\overrightarrow{CC'} \parallel \overrightarrow{BB'}$ (tesis).

Corolario del Teorema de Thales: “Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, y que interseca a los otros dos lados o a sus rayos opuestos, determina sobre ellos Segmentos proporcionales”.



Demostración:

Si se da el $\triangle ABC$ con la recta $l \parallel \overline{AB}$

y se construye una recta $l' \parallel l$ el el

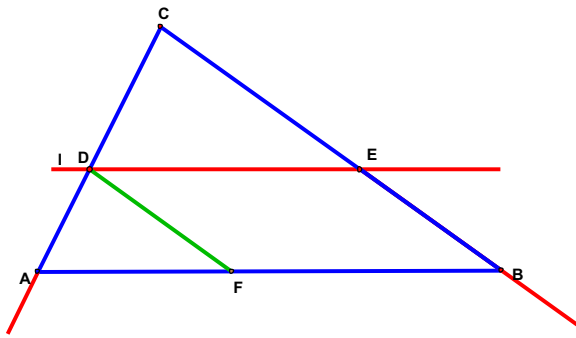
vértice c , se puede aplicar el Teorema

de Thales y resulta: $CD : DA = CE :$

EB . (Tesis).

∠ Se puede demostrar el recíproco del corolario anterior: “Si una recta determina sobre dos de los lados de un triángulo segmentos proporcionales, entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo”.

Teorema “Si los lados de un ángulo (o los rayos opuestos a sus lados) se intersecan por rectas paralelas, los segmentos de estas paralelas comprendidos entre los lados del ángulo (o de sus rayos opuestos), son entre sí como las medidas de los segmentos cuyos extremos son el vértice del ángulo y los puntos de intersección de las paralelas con los lados del ángulo (o sus rayos opuestos)”.



Hipótesis: En $\angle ACB$,

$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

Tesis: $DE : AB = DC : AC = CE : CB$.

Demostración:

1) Se construye $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$.

2) Entonces en $\angle BAC$:

$FB : AB = DC : AC$

(Teorema de Thales)

4) Pero $FB = DE$ (lados opuestos de un paralelogramo).

5) Reemplazando en 2): $DE : BA = DC : CA$.

6) Análogamente se demuestra que $DE : CE : CB$.

7) De 5) y 6) se deduce la tesis.

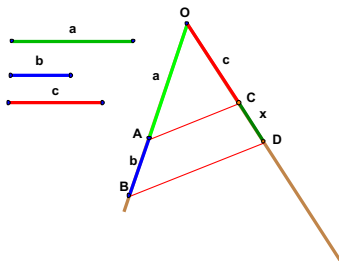
Problema. Construir la cuarta proporcional geométrica (4ª p.g.) entre los segmentos de medidas a , b y c .

Solución:

Sea x la medida del segmento 4ª p.g. Entonces debe cumplirse la proporción:

$a : b = c : x$. Hay varias combinaciones posibles según Teorema de Thales, luego existen varias construcciones.

1ª Solución



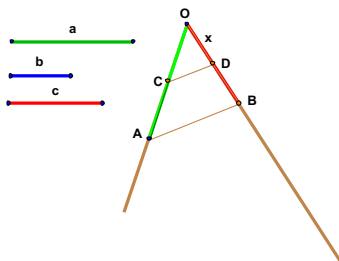
Se construye $\angle O$ arbitrario y $AO = a$,

$AB = b$, $OC = c$.

$A \leftrightarrow C$ y se construye $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$.

$CD = x$ 4ª p.g.

2ª Solución



Se construye $\angle O$ arbitrario y $OA = a$,

$OC = b$, $OB = c$.

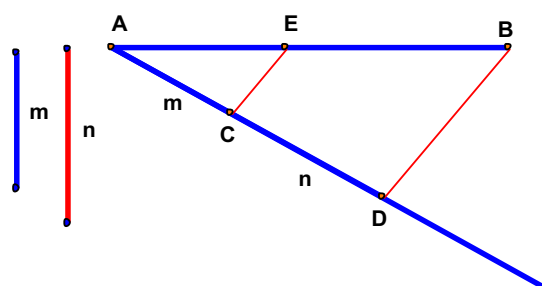
$A \leftrightarrow B$ y se construye $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.

$OD = x$ 4ª p.g.

Se pueden encontrar tres soluciones más.

Problema. Dividir interiormente un segmento dado en la razón $m : n$.

Solución.



1. Sea $\overline{AB}$ el segmento dado y los segmentos de medidas m y n .

2. Se construye $\angle A$ arbitrario.

3. $\otimes(A, m) \dots C$

4. $\otimes(C, n) \dots D$

5. $C \leftrightarrow E$ y se construye $\overline{DB} \parallel \overline{CE}$

6. Se tiene $AE : EB = m : n$.

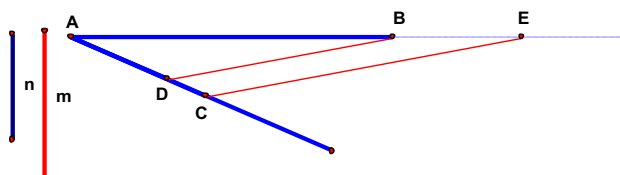
(Teor. Thales)

Problema. Dividir exteriormente un segmento

Solución

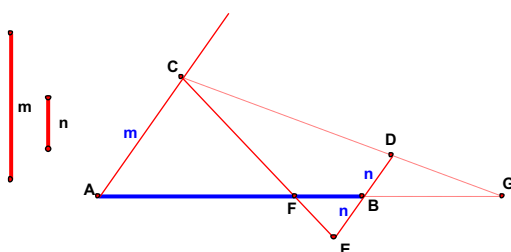
1. Sea $\overline{AB}$ el segmento dado y los segmentos de medidas m y n .

2. Se construye $\angle A$ arbitrario.



5. $D \leftrightarrow B$ y se construye $\overline{CE} \parallel \overline{DB}$
6. Se tiene $AE : EB = m : n$. (Teor. Thales).

Problema. Dividir armónicamente un segmento dado en la razón $m : n$.

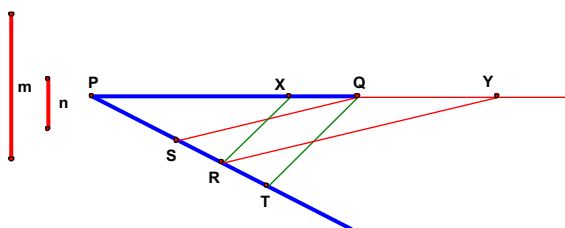


1. Sea $\overline{AB}$ el segmento dado y los segmentos de medidas m y n .
2. Se construye $\overrightarrow{AC}$ arbitrario y $\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{AC}$.
3. $\otimes(A, m) \cap \overrightarrow{AC} = \{C\}$

4. $\otimes(B, n) \cap \overrightarrow{BD} = \{D, E\}$
5. $E \leftrightarrow C \leftrightarrow D$
6. $\overline{AB} \cap \overline{CE} = \{F\}$ y $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{G\}$. F y G son los puntos de división armónica de $\overline{AB}$.

Demostración: Se considera el $\angle AFC$ y sus rayos opuestos y se aplica el teorema de los segmentos paralelos entre los lados de un ángulo.

Analice el dibujo siguiente, el cual presenta una segunda solución al problema anterior.



$\overline{PQ}$ segmento dado.
 $PR = m$; $RS = RT = n$.
 $\overline{SQ} \parallel \overline{RY}$; $\overline{RX} \parallel \overline{RY}$.

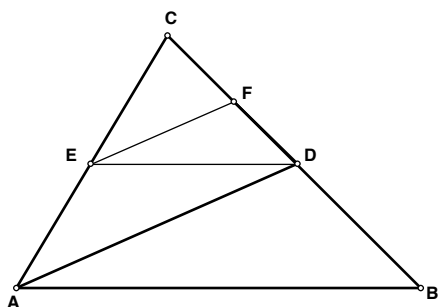
Se puede demostrar que $\overline{XY}$ resulta dividido armónicamente por los puntos P y Q .

Taller 4-2

1. Un punto M divide exteriormente a un segmento CD en la razón $MC : MD = 5 : 9$. Su distancia al punto medio del segmento es 28 cm. Determine las medidas MC y MD .
2. Dividir un segmento en partes proporcionales a las longitudes dadas m , n , y p .
3. La suma de las medidas de dos trazos es S . Si dichas medidas están en la razón $3 : 4$; construya dichos segmentos.
4. Dado un trazo de medida a , prolongarlo en una magnitud x de modo que se cumpla la siguiente relación: $a : x = m : n$, siendo m y n las medidas de dos segmentos conocidos.
5. Dado un trazo de medida a , prolongarlo en una magnitud x de modo que se cumplan las siguientes relaciones: a) $(a + x) : a = m : n$ b) $(a + x) : x = m : n$, siendo m y n las medidas de dos segmentos conocidos.

6. Cuatro rectas paralelas determinan sobre una recta segmentos de 3 cm, 5 cm, y 8 cm. Determine las longitudes que determinarán sobre un segmento de 64 cm de longitud el cuál es intersecado por las rectas paralelas.
7. Las medidas de dos lados de un triángulo son $AB = 24$ cm y $AC = 32$ cm. Sobre el segmento AB se dibuja $AD = 13$ cm. Determine la medida AE que habrá que considerar sobre AC para que $\overline{DE}$ sea paralelo a $\overline{BC}$.
8. En un trapecio $ABCD$ de base mayor $\overline{AB}$, se considera sobre el lado $\overline{AD}$ un punto M , tal que $AM = \frac{2}{3} AD$. Y sobre $\overline{BC}$, un punto N tal que $BN = \frac{2}{3} NC$. ¿Qué puede deducir de $\overline{MN}$? Además, si $AD = m$ cm y $BC = n$. Calcule las medidas AM y BN .
9. Dos segmentos están en la razón $m : n$ y su diferencia es un segmento de medida d . Construir dichos trazos (m y n son segmentos conocidos).
10. Por un punto P en el interior de un ángulo A , dibuje una recta que interseque a los lados del ángulo en los puntos B y C de manera que se verifique que: 1º: $AB : AC = m : n$. y 2º $PB : PC = m : n$.
11. Construir un triángulo dados: $a : b = m : n$, a , h_a .
12. Construir un triángulo dados: $a : b = m : n$, h_c , p .

13. Resolver gráficamente la ecuación $4x = 15$ y luego medir la longitud de x .
- 14.



Dado el triángulo ABC de la figura, se une un punto arbitrario D del lado $\overline{CB}$ con el vértice A . Luego se traza el segmento $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$. Pruebe que se verifica la siguiente relación:

$$CB : CD = CD : CF.$$

Indique el nombre que recibe CD en la anterior proporción

Circunferencia de Apolonio

Apolonio de Perga . Nació Alrededor del 262 A.C. en Perga, Grecia Ionia (ahora Turquía) Falleció : Alrededor del 190 A.C en Alejandría, Egipto.

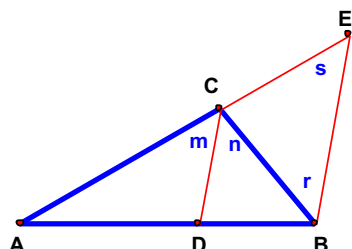
Fue conocido como "El gran geómetra", su famoso libro "Secciones Cónicas" introdujo los términos: parábola, elipse e hipérbola espiral.

Apolonio de Perga estudió en Alejandría y luego visitó Pérgamo en donde han sido construidas una biblioteca y una universidad semejantes a la de Alejandría.

Mientras, Apolonio, "El gran geómetra", estuvo en Pergamo escribió la primera edición de su famoso libro "Secciones Cónicas". que consta de 8 libros. Los libros del 1 al 4 no contienen material original pero introducen las propiedades básicas de cónicas que fueron conocidas por Euclides, Aristóteles y

otros. Los libros del 5 al 7 son originales; en estos discute y muestra como muchas de las cónicas pueden ser dibujadas desde un punto. El da proposiciones determinando el centro de curvatura lo cual conduce inmediatamente a la ecuación cartesiana del desarrollo de la evolución. El fue también un importante fundador de la astronomía matemática griega, la cual usó modelos geométricos para explicar la teoría planetaria.

Teorema “La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide interiormente al lado opuesto al ángulo en la razón de los otros dos lados.



Hipótesis. $CD = b_\gamma$ en el $\triangle ABC$,

Tesis: $DA : DB = CA : CB$.

Demostración.

1) Se construye $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BE} \parallel \overrightarrow{CD}$.

$$2) \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BE} = \{E\}$$

$$3) \angle n \cong \angle r \quad (\angle s \text{ alt. int. entre } //s)$$

$$4) \angle m \cong \angle s \quad (\angle s \text{ corresp. entre } //s)$$

$$5) \angle m \cong \angle n \quad (\text{Hipótesis})$$

$$6) \text{ De 3), 4) y 5) } \angle r \cong \angle s \text{ y por lo tanto el } \triangle BCD \text{ es isósceles y } BC = CE.$$

$$7) \text{ En el } \triangle ABD: AD : DB = AC : CE \quad (\text{Teorema de Thales})$$

$$8) \text{ Reemplazando 6) en 7) resulta: } AD : DB = AC : CB \quad (\text{Tesis}).$$

Teorema (recíproco) “Si un punto divide interiormente a un lado de un triángulo en la razón de los otros dos lados, entonces este punto pertenece a la bisectriz del ángulo interior opuesto.

Considerando la figura anterior.

Hipótesis En el $\triangle ABC$, $DA : DB = CA : CB$.

Tesis: $CD = b_\gamma$

Demostración.

1) Se construye $\overrightarrow{AC}$ y $CE = CB$.

2) $C \leftrightarrow D$ y $B \leftrightarrow E$.

3) Reemplazando 1) en hipótesis se obtiene: $DA : DB = CA : CE$.

4) De 3) y recíproco de Teor. de Thales: $\overline{DC} \parallel \overline{BE}$.

5) Pero $\angle r \cong \angle s$ ($\angle s$ basales $\triangle$ isosceles).

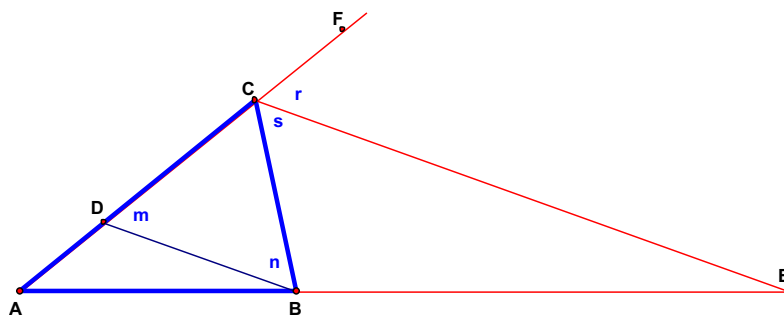
6) $\angle n \cong \angle r$ ($\angle s$ alt. int. entre $//s$)

7) $\angle m \cong \angle s$ ($\angle s$ corresp. entre $//s$)

8) De 5), 6) y 7): $\angle m \cong \angle n$.

9) Por lo tanto: $CD = b_\gamma$ (Tesis).

Teorema “La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, divide exteriormente al lado opuesto en la razón de los otros dos lados”.



Hipótesis. En el $\triangle ABC$, $\overrightarrow{CE}$ Bisectriz del $\angle BCF$ exterior. $\angle s \cong \angle r$.

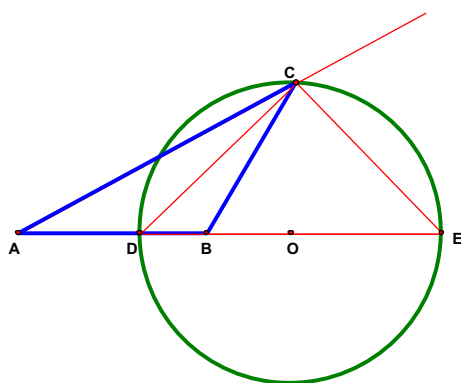
Tesis: $AE : BE = CA : CB$.

Demostración.

- 1) Se construye $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$
- 2) $\angle n \cong \angle s$ ($\angle s$ alt. int. entre $//s$)
- 3) $\angle m \cong \angle r$ ($\angle s$ corresp. entre $//s$) $\angle n \cong \angle r$ ($\angle s$ alt. int. entre $//s$)
- 4) De hipótesis, 2) y 3): $\angle m \cong \angle n$
- 5) Luego $\triangle BDC$ es isósceles y $\overline{DC} \cong \overline{BC}$.
- 6) En el $\triangle AEC$ y 1): $AE : BE = CA : DC$.
- 7) Reemplazando 5) en 6): $AE : BE = CA : CB$. (Tesis).

Se puede demostrar el teorema recíproco “Si un punto divide exteriormente a uno de los lados exteriores de un triángulo, entonces este punto pertenece a la bisectriz de ángulo exterior opuesto a dicho lado”.

Corolarios. 1) “En un triángulo la bisectriz de un ángulo interior y



la del respectivo ángulo exterior dividen armónicamente al lado opuesto a ellos en la razón de los otros dos lados”.

(En la figura, D y E son dichos puntos).

Los puntos A, D, B y E son puntos conjugados armónicos.

- 2) “El $\triangle DCE$ es rectángulo en C”.
- 3) “Cuando en un triángulo se conoce un lado y la razón de los otros, el L.G. del tercer vértice del triángulo es la circunferencia que tiene por diámetro el segmento determinado por los puntos que dividen armónicamente al lado conocido”.

Dicha circunferencia es la circunferencia de Apolonio.

Definición. La **circunferencia de Apolonio** es el L.G. de todos los puntos cuyas distancia a dos puntos dados, están en una razón dada $m : n$.

Otra definición: “La circunferencia de apolonio es el L.G. de los terceros vértices de todos los triángulos de los cuales se conoce uno de los lados y la razón en que están los otros dos”.

Circunferencia de Apolonio con respecto a $\overline{AB}$ y de razón $m : n$.
C es un punto cualquiera de ella.

Demostración.

- 1) Se construye $\overrightarrow{BF} \parallel \overrightarrow{AC}$
- 2) $\overrightarrow{BF} \cap \overrightarrow{CD} = \{F\}$ y
 $\overrightarrow{BF} \cap \overrightarrow{CE} = \{G\}.$

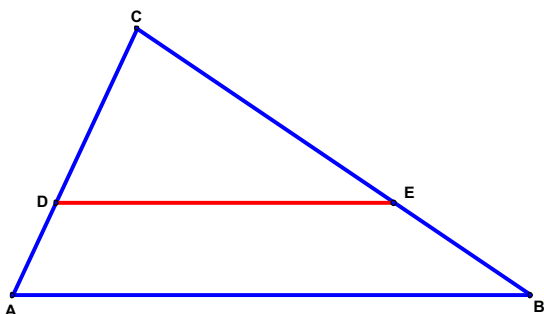
- 3) En el $\angle ADC$ y 1) y teorema del segmento $//$: $DA : DB = AC : FB = m : n$.
- 4) En el $\angle AEC$ y 1) y teorema: del segmento $//$ $EA : EB = AC : BG = m : n$.
- 5) De 3) y 4): $AC : FB = AC : BG$. Por lo tanto $FB = BG$.
- 6) Pero el $\triangle FCG$ es rectángulo en C y $\overline{CB}$ es transversal de gravedad, por lo tanto $CB = BF = BG$ (propiedad del $\triangle$ rectángulo).
- 7) Reemplazando 6) en 3) resulta $DA : DB = AC : CB$. (Tesis).

En general, se dice que dos figuras en el plano son semejantes cuando sus lados son respectivamente proporcionales y sus ángulos son respectivamente (ordenadamente) congruentes.

Definición: Dos triángulos que tienen los tres ángulos respectivamente congruentes y sus lados proporcionales se dice que son *semejantes*.

En los triángulos semejantes, los *elementos homólogos* o *correspondientes* son los vértices de los ángulos congruentes y los lados opuestos a los ángulos congruentes.

Teorema (Particular de Thales) *“Dado un triángulo y una recta paralela a uno de sus lados, ésta paralela determina un nuevo triángulo semejante con el triángulo dado”.*



Hipótesis. $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{AB}$

Tesis: $\triangle DEC \approx \triangle ABC$.

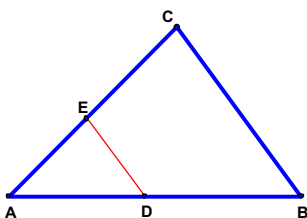
Demostración.

- 1) En $\triangle DEC$ y $\triangle ABC$ se tiene:
 - $\angle C \cong \angle C$ (común)
 - $\angle D \cong \angle A$ (alternos int. Entre //s).
 - $\angle E \cong \angle B$ id.
- 2) Además $DE : AB = CD : CA = CE : CB$ (tor. Segmentos //s).
- 3) De 1), 3) y definición de semejanza de triángulos $\triangle DEC \approx \triangle ABC$ (Tesis).

Para comprobar que dos triángulos son semejantes no es necesario verificar todas las condiciones dadas en la definición, ya que algunas de ellas serán consecuencia de otras.

Para esto se demuestran los cuatro *teoremas o criterios de la congruencia de triángulos*.

Teorema (AA). *Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes”.*

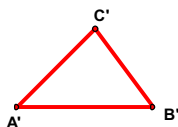


Hipótesis. $\angle A \cong \angle A'$;

$\angle B \cong \angle B'$.

Tesis: $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$.

Demostración.



1. Por teorema de los ángulos interiores del $\triangle$, $\angle C \cong \angle C'$.
2. $\otimes(A, A'B') \cap \overline{AB} = \{D\}$.
3. Se construye $\angle D \cong \angle B' \cong \angle B$.
4. De Hipótesis, 2) y 3): $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (ALA). Luego: $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$ y $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.
5. De 3) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y por teorema de Tales: $AD : AB = AE : AC = DE : BC$.
6. Reemplazando 2), 4) en 5) se obtiene: $A'B' : AB = A'C' : AC = B'C' : BC$.
7. De Hipótesis, 1) y 6) y definición de $\triangle$ s semejantes:
 $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$. (Tesis).

Se pueden demostrar los siguientes teoremas:

Teorema (LAL) *“Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes”.*

Teorema (LLL) *“Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales”.*

Teorema (LLA) *“Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y los ángulos opuestos, a los de mayor medida de estos lados, congruentes”.*

Se puede observar que a cada criterio de semejanza de triángulos le corresponde un criterio de congruencia, el cual se aplica en la demostración de cada uno de ellos.

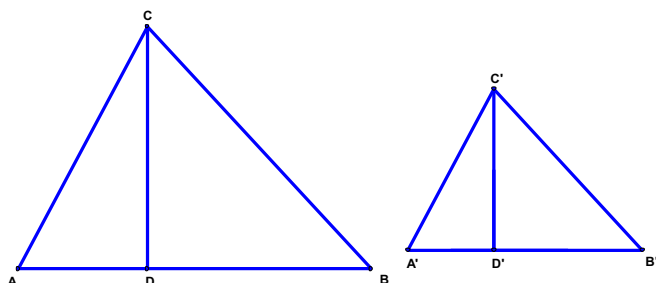
Los teoremas de congruencia de triángulos se emplean para la demostración de congruencias de segmentos o de ángulos. Los de semejanza se emplearán para la demostración de congruencia de ángulos, proporcionalidad de segmentos o el paralelismo entre elementos lineales. Generalmente estas demostraciones se deducen aplicando el siguiente corolario: *“En triángulos semejantes: a*

“ángulos congruentes se oponen lados proporcionales y a lados proporcionales se oponen ángulos congruentes”.

Además quedan de mostradas las siguientes propiedades:

1. Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
2. Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen congruentes los ángulos de la base o el ángulo del vértice.
3. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen uno de los ángulos agudos congruentes o cuando los catetos de uno de ellos son proporcionales a los del otro.

Teorema “En triángulos semejantes, las alturas homólogas son entre sí como dos lados homólogos”.



Hipótesis.

$$\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'.$$

$$CD = h_c ; C'D' = h_{c'}.$$

Tesis:

$$CD : C'D' = AC : A'C' =$$

$$CB : C'B' = AB : A'B'.$$

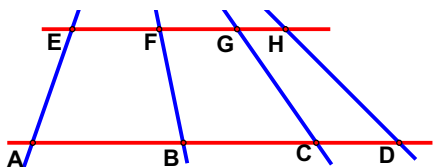
1. En $\triangle ADC$ y $\triangle A'D'C'$ se tiene $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle D \cong \angle D'$ (hipótesis)
- 2) Luego: $\triangle ADC \approx \triangle A'D'C'$ (AA) y $CD : AC = C'D' : A'C'$ o sea $CD : C'D' = AC : A'C'$.
- 3) Pero, por hipótesis, la razón entre los lados homólogos de los triángulos es constante. Por lo tanto, $CD : C'D' = AC : A'C' = CB : C'B' = AB : A'B'$ (Tesis).

Se puede demostrar, en general, el siguiente teorema: “En triángulos semejantes dos segmentos homólogos (alturas, transversales de gravedad, bisectrices) son entre sí como dos lados homólogos cualesquiera”. Esto quiere decir que la razón de semejanza de los triángulos, permanece constante para cualquier par de elementos homólogos de ellos.

Teorema “Si un haz de rayos se interseca por dos rectas paralelas, los segmentos de las rectas determinados por los rayos son proporcionales”.

Hipótesis $\overleftrightarrow{EH} \parallel \overleftrightarrow{AD}$

Tesis: $AB : EF = BC : FG = CD : GH$.



Demostración:

1) En $\triangle ABO$ se tiene: $EF : AB = OF : OB$.

2) En $\triangle BCO$ se tiene: $FG : BC = OF : OB$.

(teorema segmentos //s).

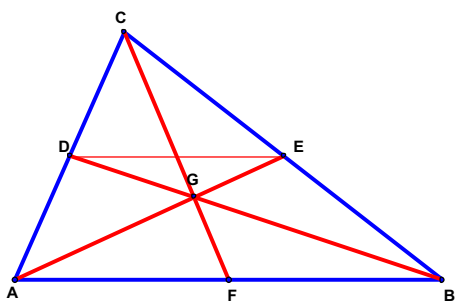
3) En $\triangle CDO$ se tiene: $GH : CD = OG : OC$. (id).

4) En $\triangle BCO$ se tiene: $OG : OC = OF : OB$ (teorema de Thales).

5) De 1), 2), 3), 4) y la propiedad de series de razones: $AB : EF = BC : FG = CD : GH$ (Tesis).

Este teorema permite otra forma de dividir un segmento dado en una razón dada.

Teorema “Las transversales de gravedad de un triángulo, se intersecan en un punto tal que divide a cada una de ella en la razón 1 : 2.



Hipótesis. $AE = t_a$; $BD = t_b$. $CF = t_c$

$$\overline{AE} \cap \overline{BD} = \{G\}.$$

Tesis: $GE : GA = GD : GB = 1 : 2$ y $G \in \overline{CF}$.

Demostración.

- 1) $D \leftrightarrow E$, entonces $\overline{DE}$ mediana del triángulo.
- 2) De 1) $DE = \frac{1}{2} AB$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

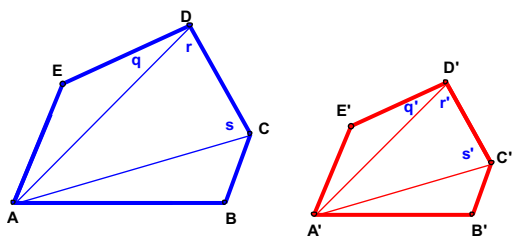
$$AD : AH = DE : HI$$

- 3) $\triangle DEG \approx \triangle BAG$ (AA).
- 4) De 2), 3) y teorema. de los segmentos paralelos: $GE : GA = GD : GB = DE : AB = 1 : 2$.
- 5) Análogamente se puede demostrar que $FG : GC = 1 : 2$.
- 6) G es punto único (divide interiormente a $\overline{CF}$ en la razón 1 : 2). Por lo tanto $G \in \overline{CF}$.
- 7) De 4) y 6) se deduce la Tesis.

Polígonos semejantes

Los polígonos que tienen sus ángulos respectivamente congruentes y los lados homólogos proporcionales se llaman *polígonos semejantes*.

Teorema “*Las diagonales que no se intersecan, de dos polígonos semejantes, forman triángulos respectivamente semejantes*”.



Hipótesis. $ABCDE \approx A'B'C'D'E'$.

$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{A'D'}$, $\overline{A'C'}$ diagonales.

Tesis: $\triangle ADE \approx \triangle A'D'E'$; $\triangle ADC \approx \triangle A'D'C'$;
 $\triangle ACB \approx \triangle A'C'B'$.

Demostración.

- 1) En $\triangle ADE$ y $\triangle A'D'E'$
- 2) $\angle E \cong \angle E'$ (por Hipótesis)
y $AE : ED = A'E' : A'D'$. (id.)
- 3) Por lo tanto, $\triangle ADE \approx \triangle A'D'E'$ (LAL).
- 4) Análogamente se demuestra que $\triangle ADC \approx \triangle A'D'C'$ y $\triangle ACB \approx \triangle A'C'B'$.
- 5) De 4) y 5) Tesis.

Se puede demostrar el siguiente Corolario: “*En polígonos semejantes, dos diagonales homólogas son entre sí como las medidas de dos lados homólogos*”, como también, el siguiente teorema (recíproco) “*Dos polígonos compuestos del mismo número de polígonos semejante,, situados en forma consecutivas, son semejantes*”.

Teorema “Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como las medidas de dos lados homólogos o como las de dos segmentos homólogos”.

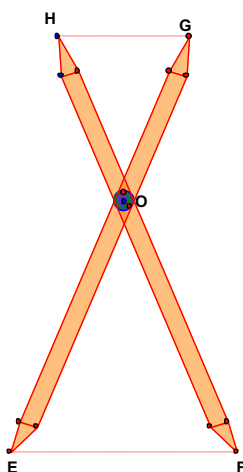
Hipótesis. $ABCD \approx A'C'B'D'$. Las medidas de los lados homólogos son respectivamente a, b, c, d y a', b', c', d' .

Tesis: $(a + b + c + d) : (a' + b' + c' + d') = a : a'$

Demostración. 1) De hipótesis: $a : a' = b : b' = c : c' = d : d'$.

2) Por lo tanto: $(a + b + c + d) : (a' + b' + c' + d') = a : a'$
(propiedad de una serie de razones). Por lo tanto Tesis.

Se puede demostrar el siguiente teorema “Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes”. Además los segmentos homólogos de estos polígonos son entre sí como sus lados homólogos..



En la figura se muestra *El compás de reducción* que es una herramienta que permite la reducción o ampliación de las figuras.

Se compone de dos brazos de iguales medidas, los cuales son reglas graduadas. Ambos brazos pueden girar en torno del punto O.

En el dibujo del compás se cumple que $\triangle OHG \approx \triangle OFE$ (AA) y por el teorema de los segmentos paralelos que $HG : EF = OH : OF =$

$OG : OE = k$ (constante). La razón k es graduable a voluntad.

Otra forma de reducción o de ampliación es el *método de los cuadrados*. Consiste en cuadricular el dibujo de un objeto

cualquiera, que se quiera ampliar o reducir. Se confecciona otra cuadrícula con los lados de los cuadrados que tengan la proporción deseada con respecto a la del dibujo dado y en cada uno de los nuevos cuadrados se dibuja la figura homóloga del cuadrículado primitivo.

Homotecia

Dos polígonos semejantes que tienen sus lados respectivamente paralelos se llaman *polígonos homotéticos*.

Teorema “Si se construyen las rectas que unen los vértices homólogos de polígonos homotéticos, entonces estas rectas se intersecan en un mismo punto”.

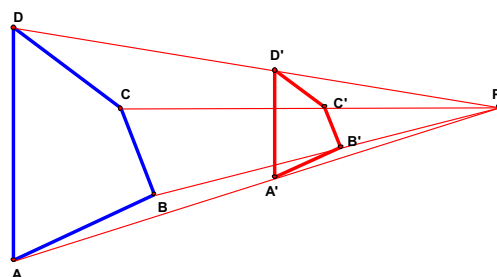
Hipótesis. $ABCD$ y $A'B'C'D'$ polígonos homotéticos.

Tesis: $\overrightarrow{AA'} \cap \overrightarrow{BB'} \cap \overrightarrow{CC'} \cap \overrightarrow{DD'} = \{P\}$.

Demostración.

1) Supongamos que $\overrightarrow{AA'} \cap \overrightarrow{CC'} = \{P'\}$

y $\overrightarrow{AA'} \cap \overrightarrow{BB'} = \{P\}$ con $P' \neq P$.



2) Por hipótesis 1) y teorema de los segmentos proporcionales se obtiene:

$$PB : PB' = AB : A'B' \text{ y } P'B : P'B' = BC : B'C'.$$

3) Por hipótesis: $AB : A'B' = BC : B'C'$.

4) De 2) y 3): $PB : PB' = P'B : P'B'$.

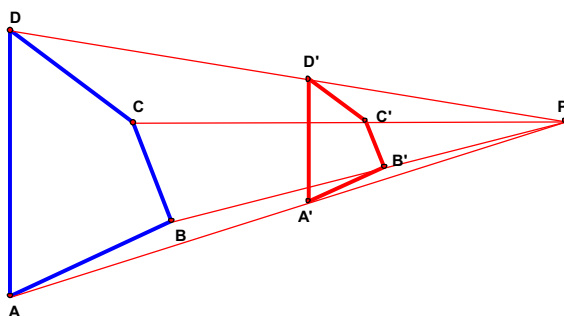
5) Luego los puntos P y P' dividen exteriormente a $\overline{BB'}$ en la misma razón y, por lo tanto, P y P' son el mismo punto. Luego se cumple la tesis.

Definición: El punto en donde se intersecan las rectas construidas al unir los vértices homólogos de polígonos homotéticos, es el *centro de homotecia o de similitud*.

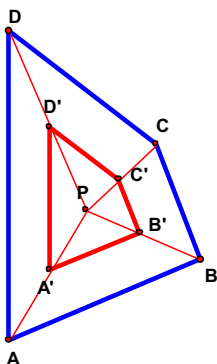
Construcción. Dado un polígono, construir un polígono semejante a él.

Solución. Se considera un punto cualquiera como centro de homotecia para el polígono dado y se construye el polígono pedido.

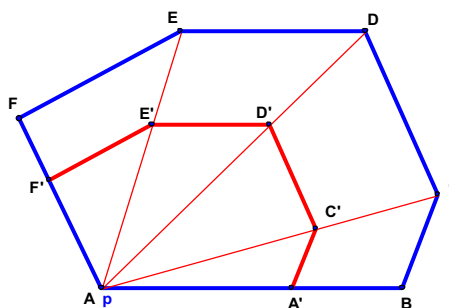
Caso A) El centro de homotecia está en el exterior del polígono dado.



Caso B) El centro de homotecia está en el interior del polígono dado.



Caso C) El centro de homotecia está en uno de los vértices del polígono dado.



Taller 4-3

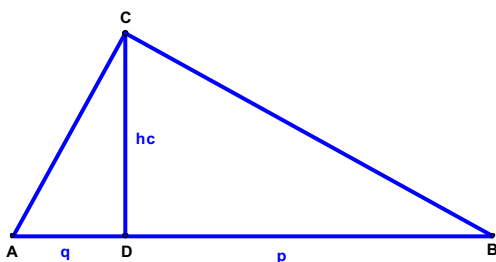
1. Las medidas de los lados del triángulo son respectivamente a, b y c. Se traza un segmento de medida d paralelo al lado de medida c . Determine las medidas de los segmentos determinados por este segmento paralelo sobre los otros lados.
2. Determine la medida de la altura del triángulo mayor obtenido al dibujar los rayos correspondientes a los lados no paralelos de un trapecio si las medidas de sus bases son 27 y 36 metros y la medida de su altura es 15 metros.
3. La bisectriz $\overrightarrow{AD}$ del ángulo en el vértice A del triángulo ABC interseca en el punto E a la circunferencia circunscrita al triángulo. Demuestre que $(BE)^2 = AE \times DE$.
4. En el rectángulo ABCD, AB es el doble de la medida AD. Se une el vértice D con el punto E que pertenece a $\overline{AB}$, tal que $AE = \frac{1}{4} AB$. La recta DE interseca en el punto O a la diagonal $\overline{AC}$. Demuestre que el ángulo AOD es recto.

5. Demuestre que en un paralelogramo, las distancias desde un punto de una de las diagonales a dos lados adyacentes son inversamente proporcionales a las medidas de estos lados.
6. Construir un triángulo dados a) α, β y t_a . b) β, γ y b_β c) $a:b = m:n$, h_a , γ .
7. Pruebe que las medidas de las alturas de un triángulo son inversamente proporcionales a los lados correspondientes.
8. Demuestre que dos triángulos que tienen dos lados perpendiculares, son semejantes.
9. Demuestre que dos triángulos que tienen las medidas de sus alturas proporcionales, son semejantes.

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

Recuerde la biografía de Euclides de la página 11.

Teorema (2º de Euclides) “La medida de la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es media proporcional geométrica entre las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa”.



Hipótesis. El $\triangle ABC$ es rectángulo en C.

$DC = h_c$; $AD = q$; $DB = p$.

Tesis: $h_c^2 = q \cdot p$.

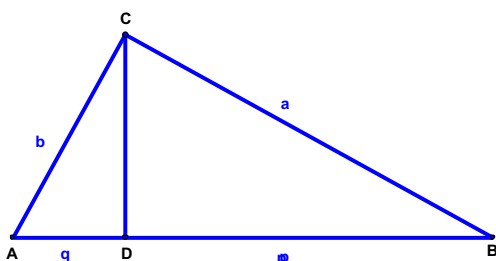
Demostración.

1) En $\triangle ADC$ y $\triangle CDB$ se tiene: $\angle A \cong \angle DCB$ (de mismo complemento) y $\angle ADC \cong \angle CDB$ (hipótesis)

2) Por lo tanto $\triangle ADC \approx \triangle CDB$ (AA).

3) Por lo tanto: $AD : DC = DC : BD$ o sea, $q : h_c = h_c : p \Rightarrow h_c^2 = q \cdot p$ (tesis).

Teorema (1º de Euclides) “La medida de un cateto de un triángulo rectángulo es media proporcional geométrica entre las medidas de la hipotenusa y de la proyección de dicho cateto sobre ella”.



Hipótesis. El $\triangle ABC$ es rectángulo en C.

$DC = h_c$; $AD = q$; $DB = p$; $AB = c$.

Tesis: $a^2 = c \cdot p$ y $b^2 = c \cdot q$.

Demostración.

1) En $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$ se tiene: $\angle A \cong \angle A$ (común) y $\angle ADC \cong \angle ACB$ (hipótesis).

2) Por lo tanto $\triangle ABC \approx \triangle ACD$ (AA).

3) Por lo tanto, $AB : AC = AC : AD$ o sea, $c : b = b : q \Rightarrow b^2 = c \cdot q$ (tesis).

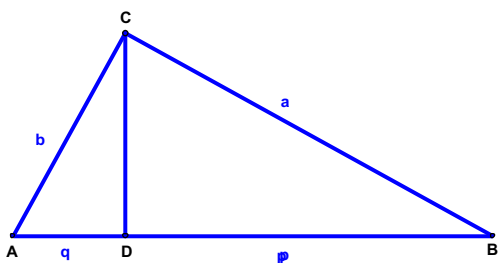
4) Análogamente se demuestra que $a^2 = c \cdot p$.

Pitágoras de Samos. Nació : alrededor del año 580 AC en Samos, Ionia. Falleció alrededor del 500 AC en Metapontum, Lucania.

Era originario de la isla de Samos, situado en el Mar Egeo., fundando en Crotona (al sur de Italia) una asociación que no tenía el carácter de una escuela filosófica sino el de una comunidad religiosa.

Por este motivo, puede decirse que las ciencias matemáticas han nacido en el mundo griego de una corporación de carácter religioso y moral. El símbolo de la Escuela de Pitágoras y por medio del cual se reconocían entre sí, era el pentágono estrellado, que ellos llamaban *pentalfa* (cinco alfas). Se debe a Pitágoras el carácter esencialmente deductivo de la Geometría y el encadenamiento lógico de sus proposiciones, cualidades que conservan hasta nuestros días.

Teorema (particular de Pitágoras) “En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos”.



Hipótesis. El $\triangle ABC$ es rectángulo en C.

$AB = c$

Tesis: $c^2 = a^2 + b^2$.

Demostración.

1) $a^2 = c \cdot p$ (Teorema 1º de Euclides)

2) $b^2 = c \cdot q$ (id)

3) 1) + 2) = $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c (p + q)$

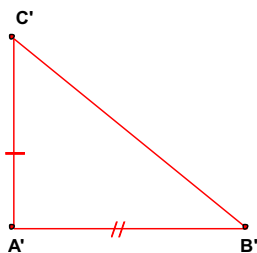
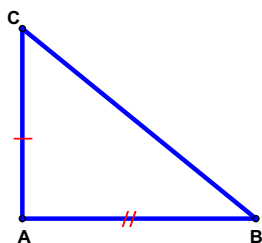
4) Pero en la figura $p + q = c$.

5) Reemplazando 4) en 3) resulta $c^2 = a^2 + b^2$ (Tesis).

Corolarios: $a^2 = c^2 - b^2$; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Se puede demostrar que en un triángulo rectángulo, de catetos de medidas a y b e hipotenusa de medida c, se cumple: $a b = b h_c$.

Teorema (recíproco) “Si en un triángulo, el cuadrado de la medida de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo”.



Hipótesis En el $\triangle ABC$,

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$.

Tesis $\triangle ABC$ es triángulo rectángulo.

Demostración.

1) Se construye $\triangle A'B'C'$ rectángulo en el vértice A' , tal que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ y $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$.

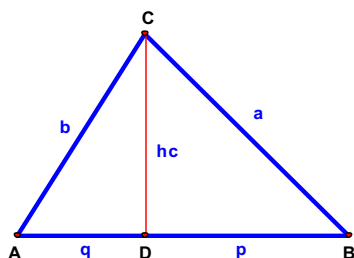
2) Por lo tanto $(B'C')^2 = (A'B')^2 + (A'C')^2$ (Teorema particular de Pitágoras).

3) Luego, de 1), hipótesis y 3) se deduce que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

4) De 1) y 3): $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (LLL) y por lo tanto $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ (corolario de la congruencia).

5) De 1) y 4) se concluye que $m \angle BAC = 90^\circ$ y por lo tanto $\triangle ABC$ es triángulo rectángulo Tesis).

Teorema (General de Pitágoras) “En cualquier triángulo, el cuadrado de la medida de un lado opuesto a un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, menos el doble del producto de la medida de uno de ellos por la medida de la proyección del otro lado sobre él”.



Hipótesis. $m \angle \alpha < 90^\circ$. $CD = h_c$.

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$

Demostración.

1) En el $\triangle BDC$: $a^2 = h_c^2 + p^2$
(teorema particular de Pitágoras).

2. En el $\triangle ADC$: $h_c^2 = b^2 - q^2$ (id.)

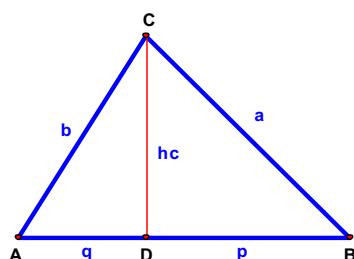
3. Como $p = c - q$, entonces $p^2 = c^2 - 2cq + q^2$.

4. 2) + 3): $h_c^2 + p^2 = b^2 + c^2 - 2cq$

5. Reemplazando 4) en 1) resulta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$ (Tesis).

Observación: si $m \angle \alpha > 90^\circ$ se tiene $p = c + q$, entonces se deduce la siguiente relación: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cq$.

Cálculo de las alturas de un triángulo en función de sus lados.



1) En la figura $h_c^2 = a^2 - p^2$.

Para $m \angle \beta < 90^\circ$, se tiene

$b^2 = a^2 + c^2 - 2cp$. Luego

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \text{ y}$$

$$p^2 = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2}$$

2) Reemplazando en 1)
resulta

$$h_c^2 = a^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2}$$

3) $h_c^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2}$; factorizando y ordenando queda :

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2} [(a+c)^2 - b^2] [b^2 - (a-c)^2] = \frac{1}{4c^2} (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$$

4) Haciendo $s = \frac{a+b+c}{2}$ (semiperímetro del triángulo) y reemplazando en 3) resulta: $h_c^2 =$

$$\frac{1}{4c^2} 2s \cdot (s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c).$$

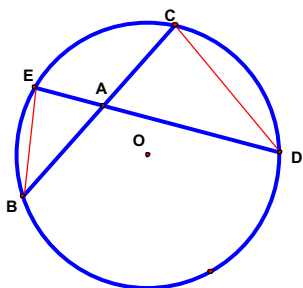
5) Luego: $h_c = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

6) Con 5) se puede establecer una fórmula para encontrar el área de la superficie triangular.
Como el área de un triángulo es

$A = \frac{1}{2} ch_c$, por lo tanto se obtiene: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Esta relación se conoce con el nombre fórmula de Herón (de Alejandría) para calcular el área de un triángulo en función de las medidas de los lados del triángulo.

Relaciones métricas en el círculo.

Teorema (de las cuerdas) “Si dos cuerdas en un círculo se intersectan, las medidas los segmentos determinados sobre ellas son inversamente proporcionales”.



Hipótesis.

1) $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ cuerdas del círculo con centro en O, tal que $\overline{BC} \cap \overline{DE} = \{A\}$.

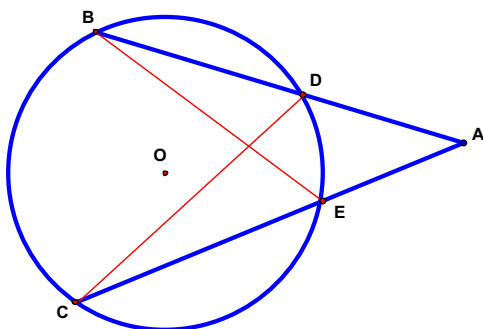
Tesis. $EA \cdot AD = BA \cdot AC$

Demostración.

- 1) $B \leftrightarrow E$ y $C \leftrightarrow D$
- 2) En $\triangle BAE$ y $\triangle DAC$ se tiene, $\angle E \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$ ($\angle$ s inscritos al mismo arco).
- 3) Por lo tanto $\triangle BAE \approx \triangle DAC$ (AA).
- 4) Por corolario de la semejanza.: $EA : AC = BA : AD$.
- 5) Por propiedad fundamental de las proporciones: $EA \times AD = BA \times AC$ (Tesis).

Otro enunciado de este teorema: “Si dos cuerdas en un círculo se intersectan, el producto de las medidas de los segmentos determinado en cada una de ellas es constante”.

Teorema (de los segmentos secantes) “Si dos segmentos secantes que tienen el vértice común en el exterior del círculo, sus medidas son inversamente proporcionales a las de los respectivos segmentos”.



Hipótesis. $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ segmentos secantes del círculo con centro en O.

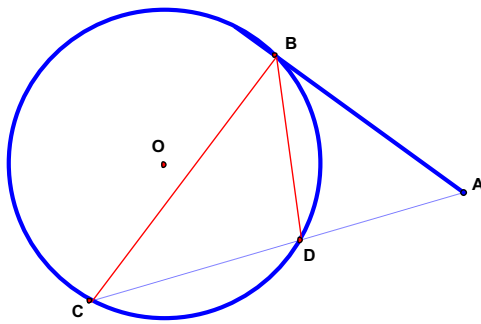
Tesis: $AB \times AD = AC \times AE$.

Demostración.

- 1) $B \leftrightarrow E$ y $C \leftrightarrow D$
- 2) En $\triangle BAE$ y $\triangle CAD$ se tiene, $\angle A \cong \angle A$ ($\angle$ común) y $\angle B \cong \angle C$ ($\angle$ s inscritos al mismo arco).
- 3) Por lo tanto $\triangle BAE \approx \triangle CAD$ (AA).
- 4) Por corolario de la semejanza.: $AE : AB = AD : AC$.
- 5) Por propiedad fundamental de las proporciones: $AB \times AD = AC \times AE$ (Tesis).

Otro enunciado de este teorema: “Si dos segmentos secantes que tienen el vértice común en el exterior del círculo, el producto de la medida del segmento secante por la del segmento exterior correspondiente de cada una, permanece constante.”

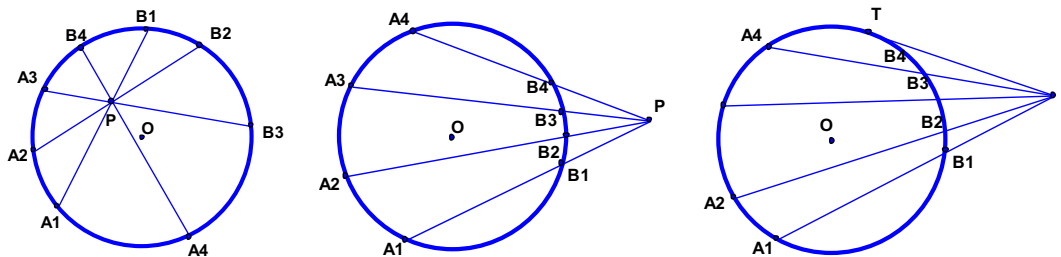
Teorema (del segmento tangente) “Si por un punto situado en el exterior de un círculo se construyen un segmento secante y un segmento tangente, la medida del segmento tangente es media proporcional geométrica entre las medidas del segmento secante y la de su respectivo segmento exterior”.



Hipótesis. $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ segmento tangente y secante respectivamente, del círculo con centro en O.
 Tesis: $AB^2 = AC \times AD$.
 Demostración.

- 1) $B \leftrightarrow c$ y $b \leftrightarrow D$
- 2) En $\triangle BAC$ y $\triangle CAB$ se tiene, $\angle A \cong \angle A$ ($\angle$ común) y $\angle ABD \cong \angle ACD$ ($\angle$ s inscritos y semi inscritos al mismo arco).
- 3) Por lo tanto $\triangle BAC \approx \triangle CAD$ (AA).
- 4) Por corolario de la semejanza.: $BA : AC = AD : AB$.
- 5) Por propiedad fundamental de las proporciones: $AB^2 = AC \times AD$ (Tesis).

Si en vez de considerar dos cuerdas o dos segmentos secantes, se considera un haz de secantes o un haz de segmentos secantes en los teoremas anteriores, la propiedad de los teoremas se generalizan y se obtiene que el producto entre las medidas de los segmentos considerados, es constante.



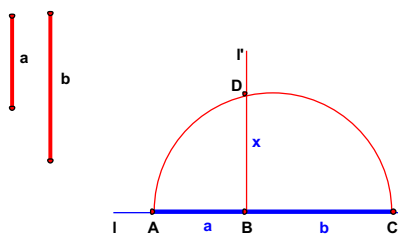
En todas estas figuras se cumple:
 $PA_1 \times PB_1 = PA_2 \times PB_2 = PA_3 \times PB_3 = PA_4 \times PB_4 = \dots = k$ (constante)

A este producto constante que resulta de los teoremas de las cuerdas, de los segmentos secantes y del segmento tangente, se le da el nombre de *Potencia del punto P*.

Construcción geométrica.

Construir el segmento (de medida x) que sea media proporcional geométrica entre los segmentos de medidas dadas a y b .

Construcción.



1. Se construye la recta l. A y b las medidas de los segmentos.
2. A, punto cualquiera de l.
3. $\otimes(A, a) \cap l = \{B\}$.
4. $\otimes(B, b) \cap l = \{C\}$.
5. Se construye $\otimes_1$ con diámetro AC y $l' \perp l$ en el punto B.

6. $\otimes_1 \cap l' = \{D\}$. $\overline{BD}$ es el segmento *pedido* de medida x .

Demostración: x es la medida de la altura del $\triangle ACD$ rectángulo en D. Por lo tanto:
 $x^2 = a b$ (2° Teor. de Euclides).

También se puede hacer la construcción aplicando el 1er. Teorema de Euclides o el teorema del segmento tangente.

Taller 4-4

1. Colocado verticalmente a 4 m de la orilla de un río, una varilla sobresale 3 m; inclinado, su extremo toca la ribera. Determine la profundidad del río.
2. En un triángulo rectángulo un cateto mide la mitad de la hipotenusa y el cuadrado de esta es $m \text{ cm}^2$. Determine las medidas de los catetos.
3. En un triángulo ABC rectángulo en C, calcule las medidas de a , p y q si $b = m$ y $h_c = n$.
4. Demuestre que para todo punto situado en el interior de un rectángulo, se verifica que la suma de los cuadrados de las distancias a dos vértices opuestos, es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos.
5. Demuestre que si en un cuadrilátero las diagonales se cortan perpendicularmente, la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos.
6. Calcule el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo si las medidas de sus lados son 39, 60 y 63 unidades.
7. En un triángulo ABC rectángulo en C, el ángulo en A mide 60° . Determine la razón en que la bisectriz de este ángulo divide al lado $\overline{BC}$ y a la altura $\overline{CH}$.
8. Un triángulo rectángulo está inscrito en un círculo de 37 cm y circunscrito a un círculo de 5 cm de radio. Determine las longitudes de los catetos.
9. En un triángulo ABC de base fija $AB = 8 \text{ cm}$ y de vértice C variable., se tiene $CA^2 - CB^2 = 12$, Determine la medida de la proyección de la transversal de gravedad CM sobre AB. Deduzca de ello que el lugar geométrico del vértice C es una recta perpendicular a $\overline{AB}$. Sitúe la ubicación del punto H, de esta perpendicular con respecto al punto medio M de AB.
10. En un círculo de centro O y diámetro $AB = a$, se traza la cuerda $AM = b$. Calcule la medida de la proyección de la cuerda sobre $\overline{AB}$.
11. Una cuerda CD encuentra a un diámetro AB en el punto medio O del radio. Las medidas OC y OD son entre sí como 1:2. Determine estas dos medidas en función del radio r del círculo.
12. En un círculo de 17 cm de radio se intersecan dos cuerdas. El producto de las medidas de estas dos cuerdas es 145. Calcule la distancia entre el punto de intersección de las cuerdas y el centro.
13. Sea $\overline{OA}$ el radio de una circunferencia. Sobre $\overline{OA}$ determine un punto P tal que $PB = 2 PA$, siendo $\overline{PB}$ tangente a la circunferencia.
14. Dado un segmento fijo de longitud $AB = a$. Determine y construya el lugar geométrico de los puntos P tales que $PA^2 + PB^2 = 2^2$. Además conteste: Cuál es la medida máxima de la altura del triángulo PAB?

Capítulo V

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS

Generalidades.

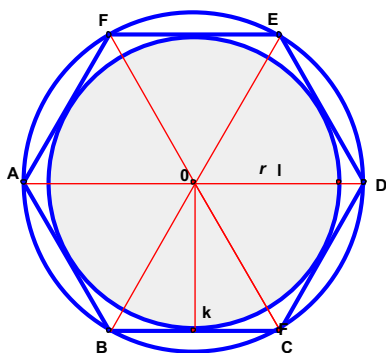
Se llama *polígono regular* al que tiene todos sus lados y ángulos interiores congruentes. Si los lados son cuerdas de un círculo y sus vértices son puntos de la circunferencia el polígono es *inscrito* en el círculo. Se designa ln al lado.

Si los lados son tangentes a una circunferencia el polígono es *circunscrito*. Su lado se designa L_n . La medida del segmento perpendicular construido desde el centro del círculo a un lado del polígono regular inscrito en él, recibe el nombre de *apotema* (ρ_n).

Solamente algunos de ellos pueden construirse geométricamente (con regla y compás) los que clasifican en los siguientes grupos:

- 1) *Los obtenidos por la fórmula 3×2^n con $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $n = 0$ se tiene el triángulo equilátero. Si $n = 1$ se tiene el hexágono regular. Si $n = 2$ se tiene el dodecágono regular, etc.*
- 2) *Los obtenidos por la fórmula 4×2^n con $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $n = 0$ se tiene el cuadrado. Si $n = 1$ se tiene el octógono regular. Si $n = 2$ se tiene el polígono regular de 16 lados., etc.*
- 3) *Los obtenidos por la fórmula 5×2^n con $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $n = 0$ se tiene el pentágono regular. Si $n = 1$ se tiene el decágono regular. Si $n = 2$ se tiene el icoságono regular, etc.*
- 4) *Los obtenidos por la fórmula 15×2^n con $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Pentadecágono regular, polígono regular de 30 lados, etc.*

Teorema “*A todo polígono regular se le puede inscribir y circunscribir una circunferencia que tienen el mismo centro*”.



Hipótesis. ABCDEF es polígono regular.

Tesis: existe $\odot(O, OK)$ inscrita y $\odot(O, OA)$ Circunscrita al polígono.

Demostración.

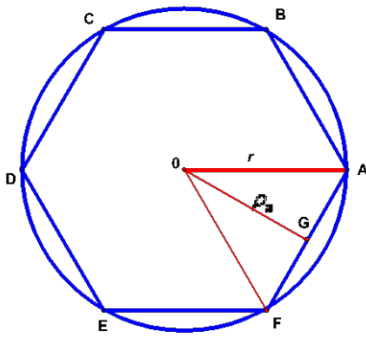
1. Se ABCDEF un polígono regular. Se construyen las bisectrices de dos ángulos interiores consecutivos $\angle A$ y $\angle B$. Cada ángulo mide $\frac{180(n-2)}{n}$. Por lo tanto la suma de la mitad de las medidas de estos ángulos será menor de 180° y por lo tanto sus bisectrices se intersectan en un punto O.
2. $O \leftrightarrow C$. En $\triangle AOB$ y $\triangle BOC$ se tiene: $\overline{BO} \cong \overline{BO}$ (lado común), $\overline{BA} \cong \overline{BC}$ (hipótesis) y $\angle OBA \cong \angle OBC$ (por construcción). Por lo tanto $\triangle OBA \cong \triangle BCO$ (LAL).
3. Por lo tanto $\angle BAO \cong \angle BCO$ (corolario de la congruencia)
4. Pero $m \angle BAO = \frac{1}{2} m \angle BAF = m \angle BCO = \frac{1}{2} m \angle BCD$ (ángulos inscritos de arcos congruentes y por hipótesis).
5. Por lo tanto $\overline{CO}$ bisectriz del $\angle BCD$ y $OA = OB = OC$. (triángulos isósceles).
6. De manera análoga se demuestra que los segmentos que unen los otros vértices del polígono con el punto O son bisectrices de los ángulos del polígono dado y el punto O equidista de los vértices. Por lo tanto la circunferencia con centro en O y que pasa por uno de los vértices pasa también por los otros vértices y por lo tanto es la circunferencia circunscrita al polígono:
7. Además, el punto O común a todas las bisectrices de los ángulos del polígono dado, resulta que es equidistante de los lados de los ángulos y por lo tanto es el centro de la circunferencia que resulta tangente a todos los lados del polígono, siendo el centro de la circunferencia circunscrita a él.

Al centro de la circunferencia inscrita y circunscrita a un polígono regular es el *centro* del polígono. El radio de la circunferencia inscrita es la *apotema*.

Medidas de los lados de los polígonos regulares inscritos y circunscritos en función del radio de su respectiva circunferencia.

Hexágono regular y Triángulo equilátero inscrito.

1. Construir un hexágono regular inscrito en un círculo de radio r , y calcule la medida de su lado (l_6) en función del radio.



Solución.

Se construye el punto A sobre el círculo con centro en O y se aplica sucesivamente 6 veces el radio como cuerda sobre la circunferencia.

Se obtiene el hexágono regular.

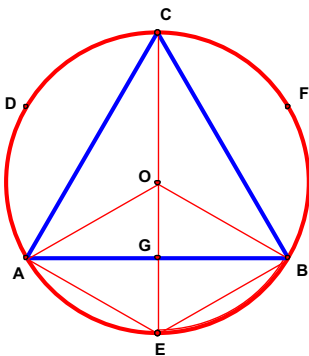
Demostración.

$\triangle AOA$ es equilátero (formado por radios).

Por lo tanto: $m \angle FAO = 60^\circ$ y $BC = r = l_6$.

Nota: El triángulo isósceles que se forma al unir el centro del círculo con dos vértices consecutivos del polígono, es el triángulo fundamental. Obtenido este triángulo se simplifica la construcción total del polígono.

2. Inscribir en un círculo dado un triángulo equilátero y calcular la medida de su lado (l_3) en función del radio.



Construcción.

1. $\otimes (O, r)$.

2. Sen la circunferencia se construye el punto A y los puntos B, C, D, E y F a la distancia r.

3. $C \leftrightarrow A \leftrightarrow B$. y $\triangle ABC$ es el $\triangle$ pedido.

Demostración.

$$m \angle CAB = \frac{1}{2} m \text{ arco CAB} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

3. Análogamente $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Por lo tanto el $\triangle ABC$ es equilátero.

4. Cálculo de l_3 :

Se construye $\overline{EC}$ diámetro y $E \leftrightarrow A$.

$\triangle ECA$ rectángulo en C (inscrito en media circunferencia).

Por lo tanto $AC^2 = EC^2 - AE^2$ (Teor. part. de Pitágoras).

Pero $AC = l_3$; $EC = 2r$ y $AE = l_6 = r$. Luego: $l^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$.

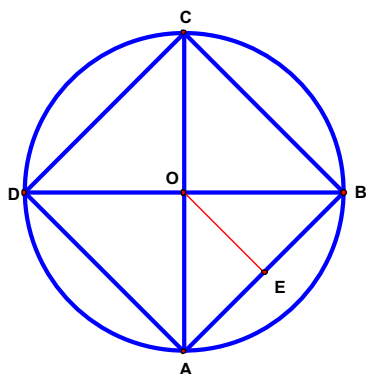
Por lo tanto: $l_3 = r \sqrt{3}$.

Se puede demostrar que la apotema $\rho_3 = \frac{l_3}{2} \sqrt{3}$ y que $\rho_3 = \frac{3r}{2}$.

Nota: Desde el hexágono regular se construyen sucesivamente los polígonos regulares de 12, 24, 36... lados.

Cuadrado y octógono regular inscrito

1. Inscribir en un círculo dado un cuadrado y calcular la medida de su lado (l_4) en función del radio.



Construcción:

Se construye $\odot(O, r)$ y los diámetros

$\overline{AC} \perp \overline{DB}$. Se unen los extremos de ellos y se obtiene el cuadrado inscrito.

Demostración:

1. Los ángulos en los vértices del cuadrilátero ABCD están inscritos en un semi círculo, luego miden 90° .

2. Los cuatro triángulos interiores son congruentes (LAL), por lo tanto $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE}$ (corolario de $\cong$).

3. De 1. y 2. ABCD es un cuadrado.

4. Cálculo de l_4 :

Sea $AB = l_4$ y $AO = BO = r$.

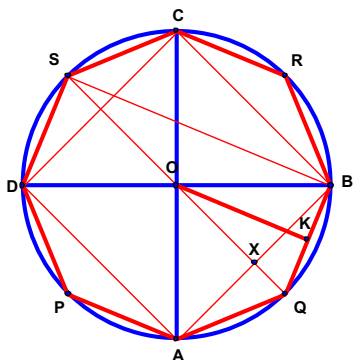
El $\triangle AOB$ es isósceles y rectángulo en O.

Luego: $AB^2 = AO^2 + BO^2$ (Teor. Part. Pitágoras). Reemplazando queda:

$$l_4^2 = r^2 + r^2 \text{ y por lo tanto } l_4 = r\sqrt{2}.$$

Se puede deducir que $OE = \rho_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

2. Inscribir en un círculo dado un octógono regular y calcular la medida de su lado (l_8) en función del radio.



Construcción

Se construye el cuadrado ABCD y P, Q, R, S puntos medios de los arcos correspondientes a los lados del cuadrado. Se unen estos puntos y se obtiene el octógono regular inscrito.

Demostración: A arcos congruentes le corresponden segmentos congruentes, que tienen como medida l_8 .

Cálculo de $l_8 = QB$:

1. Se construye el diámetro $\overline{SQ}$ y $S \leftrightarrow B$.
2. En el $\triangle SQB$ rectángulo en B se tiene: $BQ^2 = SQ \times QX$. (Primer teorema de Euclides) o sea: $l_8^2 = 2r \times (r - \rho_4) = 2r \times (r - \frac{r\sqrt{2}}{2})$.

Desarrollando esta expresión queda: $l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

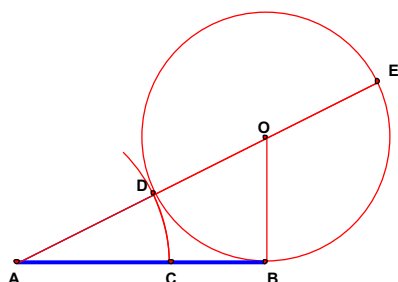
Nota: Desde el octógono regular se construyen sucesivamente los polígonos regulares de 16, 32, 64... lados.

Decágono y pentadecágono inscritos

Para construir el decágono regular es necesario, primero, conocer la construcción geométrica conocida como la **división de un segmento en sección áurea o sección divina o en media y extrema razón**.

Dividir un segmento en sección áurea o en media y extrema razón significa determinar un punto interior en el segmento dado, tal que lo divida en dos segmentos tales que la medida del mayor de estos segmentos es media proporcional geométrica entre las medidas del segmento dado y la del segmento menor. El mayor de estos segmentos es la sección o parte áurea del segmento dado.

Construcción: Dividir en sección áurea o en media y extrema razón un segmento $\overline{AB}$ de medida a .



Sea $AB = a$ y $AC^2 = AB \times CB$
(o $AB : AC = AC : CB$).

Construcción.

1. Se construye $\overrightarrow{BO} \perp \overline{AB}$
2. $\otimes(B, \frac{AB}{2})$.

$$3. \overrightarrow{BO} \cap \otimes(B, \frac{AB}{2}) = \{O\} \quad 4. \otimes(O, \frac{AB}{2}) \cap \overrightarrow{AO} = \{D, E\}$$

$$5. \overline{AB} \cap \otimes(A, AD) = \{C\}$$

$$6. \text{ Por lo tanto } AB^2 = AE \times AD.$$

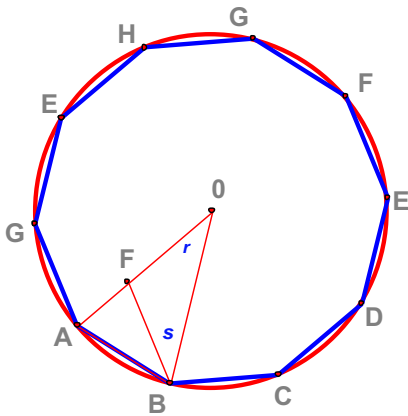
Demostración:

- 1) $AB^2 = AE \times AD$ (teorema del segmento tangente). Esto es,
 $AE : AB = AB : AD$
- 2) Por la figura $(AD + DE) : AB = AB : AD$
- 2) Pero $AD = AC$ (de 5.) y $DE = AB$ (de 2.).
- 3) Reemplazando 2) en 1) queda. $(AC + AB) : AB = AB : AC$.
- 4) Des componiendo resulta: $AC : AB = CB : AC$ es decir: $AC^2 = AB \times BC$.

1. Inscribir en un círculo dado un decágono regular y calcular la medida de su lado (l_{10}) en función del radio del círculo.

Construcción

1. En $\triangle ABO$ y $\triangle ABF$ se tiene
 $\angle OAB \cong \angle FAB$ (común) y
 $OA : AB = AB : AF$ (división áurea).
2. Luego $\triangle OAB \approx \triangle FAB$. (LAL)
3. Como el $\triangle OAB$ es isósceles, luego $\triangle ABF$ también lo es. Resulta $AB = BF = OF$; luego, $\triangle BFO$ es isósceles y $\angle r \cong \angle s$.
4. Luego $m \angle AFB = 2r = m \angle BAC = m \angle ABO$.
5. Por lo tanto en el $\triangle ABO$, $m \angle O = r$,
 $m \angle A = 2r$ y $m \angle B = 2r$.



6. Luego: $2r + 2r + r = 180^\circ$ (suma $\angle$ s interiores del $\triangle$) y por lo tanto $r = 36^\circ$, que es la medida del ángulo del centro del círculo. Por lo tanto $AB = OF = l_{10}$.

2. Cálculo de la medida de $AB = l_{10}$.

Se sabe que $AO : FO = FO : AF$ (división áurea), en donde $AO = r$, $OF = l_{10}$.

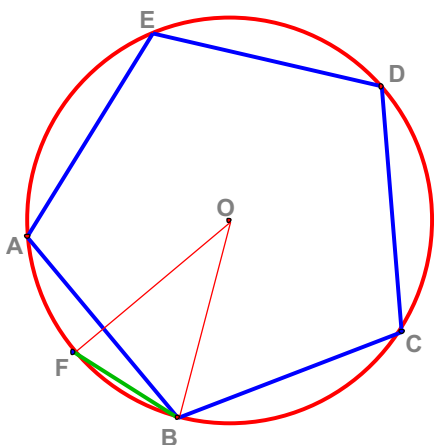
Reemplazando en la proporción, queda: $r : l_{10} = l_{10} : (r - l_{10})$. Resolviendo la ecuación

cuadrática del desarrollo de la proporción, resulta $l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

1. Sea $OA = r$ (radio) y F el punto que divide a AO en media y extrema razón.
2. $OF = l_{10}$, Se construye $OF = AB = BC = CD = \dots 10$ veces sobre la circunferencia y se obtiene el decágono regular inscrito en ella.

Demostración.

1. Para que AB sea l_{10} , la medida del $\angle AOB$ debe ser $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.
2. $B \leftrightarrow F \leftrightarrow O$. Luego $\triangle BFO$ es isósceles. (de 2.).

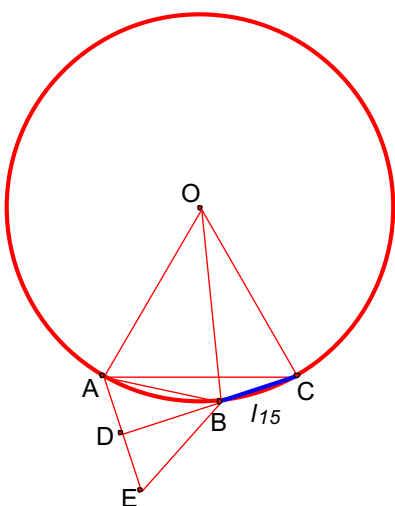


Nota: Si se unen, uno por medio, los vértices del decágono regular inscrito, se obtiene un pentágono regular inscrito.

Si, a su vez se subdividen sucesivamente los arcos AB, BC,... del pentágono regular inscrito, en 2, 4, 8 ... partes congruentes, se obtienen los polígonos regulares inscritos de 10, 20, 40

:

Construcción Inscribir en un círculo un pentadecágono regular y calcular su lado (l_{15}) en función de su radio r .



1. Se construye $AC = r = l_6$ y $AB = l_{10}$.
2. $B \leftrightarrow C$ y resulta $AB = l_{15}$.

Demostración.

Para que BC sea l_{15} , es necesario que

$$m \angle BOC = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ.$$

$$\text{Pero } m \angle BOC = m \angle AOC - m \angle AOB = 60^\circ - 24^\circ = 24^\circ \text{ (de 1.),}$$

$$\text{Luego } BC = l_{15}.$$

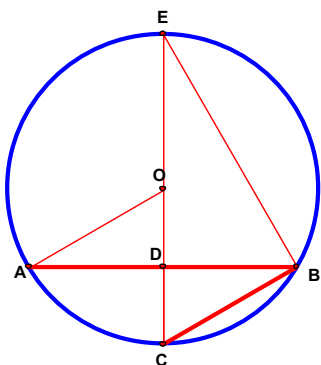
Cálculo de la medida de $BC = l_{15}$.

1. Se construye $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$.
2. Se construye el punto E en $\overrightarrow{AD}$ tal que $DC = DE$ y $E \leftrightarrow B$
3. Se tiene : $m \angle ABD = m \angle BAC + m \angle DCA$ ($\angle$ exterior del $\triangle ABC$)
4. Luego $m \angle ABD = \frac{24^\circ}{2} + \frac{36^\circ}{2} = 30^\circ$ ($\angle$ s inscritos en el círculo).
5. Pero $\triangle ABE$ es isósceles y $m \angle ABE = 60^\circ$. Por lo tanto $\triangle ABE$ también es equilátero de lado l_{10} .
6. $BC = l_{15} = DC - DB$.
7. $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2}$ (teorema particular de Pitágoras). Y reemplazando resulta $DC = \sqrt{l_6^2 - \frac{l_{10}^2}{4}}$ y $DB = \frac{l_{10}}{2} \sqrt{3}$ (altura de un triángulo equilátero).
8. Reemplazando 7) en en 6) se obtiene: $l_{15} = \frac{r}{4} \left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15} \right]$.

Fórmulas para el cálculo de l_{2n} y de L_n en función de r y de l_n .

Se observa que a medida que se duplican los números de lados de los polígonos inscritos y circunscritos, el procedimiento para obtener las fórmulas de los lados es cada vez más complejo. Con el fin de facilitar el proceso, se deducen las fórmulas para obtener el polígono inscrito de doble número de lados y del lado del polígono circunscrito de igual número de lados..

Problema. Calcular el lado de un polígono regular inscrito de $2n$ lados (l_{2n}) en un círculo de radio r , conocido el lado l_n del polígono regular inscrito.



Solución

1. Sea $AB = l_n$ y se construye Arco $CB \cong$ Arco AC . Luego: $CB = l_n$.
2. Se hace $CE = 2r$, O centro del círculo; $B \leftrightarrow E$.
3. $\triangle CBE$ rectángulo en B (inscrito en medio círculo). Por lo tanto $CB^2 = DC \times EC$ (primer teorema de Euclides)

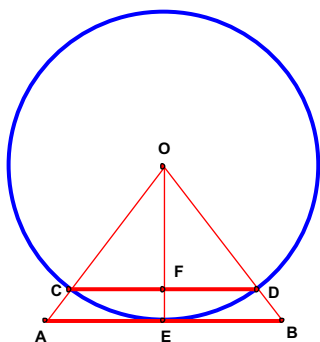
4. Luego: $l_{2n}^2 = DC \times 2r$. Pero $DC = OC - OD = r - \rho_n$, y ρ_n es el cateto del $\triangle DOC$;

entonces $\rho_n^2 = r^2 - \frac{l_n^2}{4}$; por lo tanto $DC = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$.

5. Reemplazando: $l_{2n}^2 = 2r \times (r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2})$ y

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Problema Calcular el lado L_n del polígono regular circunscrito en función del lado l_n del polígono regular inscrito y del radio r del círculo.



Solución

1. Sea $AB = L_n$; $CD = l_n$;
 $OC = OB = OE = r$; $OF = \rho_n$
2. $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$; luego: $AB : CD = OE : OF$ (teorema de los segmentos //s).
3. Reemplazando 1. en 2. resulta:
 $L_n : l_n = r : \rho_n$. Por lo tanto:

$$L_n = \frac{r \cdot l_n}{\rho_n}. \text{ Y como } \rho_n = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l_n^2} \text{ (en } \Delta CFO), \text{ reemplazando en la fórmula obtenida}$$

$$\text{resulta: } L_n = \frac{2r \cdot l_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}.$$

Cálculo de π por el método de los perímetros

Se demostró que la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es constante: $\frac{C}{d} = \pi$.

La historia del número π es milenaria. Recordemos algunos casos. Arquímedes, fallecido hacia el año 212 a.C. fue el primero en demostrar que π está comprendido entre los valores $3 + \frac{10}{71}$ y $3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7}$.

Lo hizo confrontando los valores de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 6, 12, 24, 48, 96 lados

El cálculo de π se reduce a calcular la longitud de la circunferencia de longitud C y de diámetro $d = 1$ (unidad de longitud). Pero C es el límite al que tienden de los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos al duplicar sucesiva e indefinidamente sus lados. En este caso se tiene que

$C = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, siendo P_n el perímetro del polígono regular de n lados.

Utilizando las fórmulas de l_{2n} y de L_n se llega a los siguientes valores:

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS

Nº de lados	Medida de l_n en función de $r = 1/2$	Perímetros
6	$l_6 = r = 0.500000$	3.00000
12	$l_{12} = r \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.258195$	3.10582
24	$l_{24} = r \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 0.1305262$	3.13262
48	$l_{48} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 0.0654031$	3.13934
96	$l_{96} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 0.0327190$	3.14102
192	$l_{192} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}} = 0.01636161$	3.14142
384	$l_{384} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}} = 0.00818113$	3.14155
768	$l_{768} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}}} = 0.00409060$	3.14158

POLÍGONOS REGULARES CIRCUNSCRITOS

Nº de lados	Medida de L_n en función de $r = 1/2$	Perímetros
6	$L_6 = \frac{2r}{3} \sqrt{3} = 0.5773502$	3.46410
12	$L_{12} = 2r (2 - \sqrt{3}) = 0.22679492$	3.21539
24	$L_{24} = 2r (2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}) = 0.1316524$	3.15965
----	-----	-----
384	$L_{384} = \frac{2r \cdot l_{384}}{\sqrt{4r^2 - l_{384}^2}} = 0.00818141$	3.14166
768	$L_{768} = \frac{2r \cdot l_{768}}{\sqrt{4r^2 - l_{768}^2}} = 0.0040907$	3.141165

(Datos del Libro Geometría 4º a 6º Humanidades. Omer Cano. 1946).

Observando los datos entregados se aprecia que los perímetros de los polígonos regulares inscritos van aumentando y los de los circunscritos disminuyendo y van tendiendo a un valor límite (3.14156). Se sabe que el matemático Ludolph en el año 1596 obtuvo el valor de π con 35 cifras decimales. El método arquimidiano del cálculo de π , fue usado siglos más tarde, siglo XVI, por Newton y Leibnitz, en la invención del Cálculo Infinitesimal. Un valor de π es 3.1415926535897323846... en el que no se observa ninguna regularidad. Giovanni Enrico Lambert (1728 – 1777), matemático, físico y filósofo, demostró que π es un número irracional.

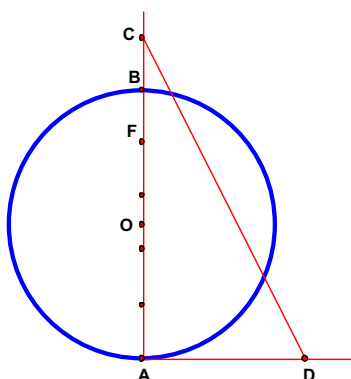
Una manera de obtener un valor aproximado de π es el método conocido como construcción aproximada de la circunferencia rectificada, o, método de rectificación de la circunferencia. A continuación se presentan tres de ellos

Primer método. La suma de las medidas del triángulo equilátero y del cuadrado inscritos en un mismo círculo difieren de la semi circunferencia rectificada en menos de 1/200 de la longitud del radio.

Comprobación: Sabemos que $l_3 = r\sqrt{3}$ y $l_4 = r\sqrt{2}$. Por lo tanto:

$$l_4 - l_3 = r(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = r \cdot 3.14626, \text{ mientras que } \pi \cdot r = r \cdot 3.14159.$$

Segundo método. Se analiza la siguiente construcción.



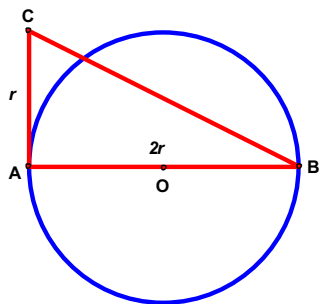
1. Sea el diámetro $AB = 2r$.
2. Se divide $\overline{AB}$ en 5 partes congruentes. Sea $FB = u$ una de esas partes.
3. $\otimes(B, BF) \cap \overrightarrow{AB} = \{C\}$.
4. Se construye $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $AD = \frac{AC}{2}$ y $D \leftrightarrow C$

5. Luego $AB = 5u$, $AD = 3u$, $r = 2.5 u$. Por lo tanto: $AC = \frac{12}{5}r$ y $AD = \frac{6}{5}r$.

6. Por lo tanto: $CD = \sqrt{(2r)^2 + \left(3r - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right)^2} = r\sqrt{\frac{180}{25}} = \frac{6}{5}r\sqrt{5}$.

7. El perímetro del $\triangle CAD$ es: $\frac{12}{5}r + \frac{6}{5}r + \frac{6}{5}r\sqrt{5} = 2r \cdot 3.14164$.

Tercer método. Se analiza la siguiente construcción.



1. Se construye $\triangle ABC$ rectángulo en A tal que $AB = 2r$ y $AC = r$. Por lo tanto $BC = r\sqrt{5}$.
2. El perímetro del triángulo es: $r \cdot (3 + \sqrt{5}) = r \cdot 5.236068$.

Si se multiplica la medida del perímetro del triángulo por $\frac{3}{5}$ se obtiene $\frac{5.236068 \cdot 3r}{5} = 3.14161 r = \pi \cdot r$ y esto corresponde a la semi circunferencia.

Capítulo VI

Relación de equivalencia de las figuras en el plano

Después de haber demostrado diferentes propiedades de las figuras geométricas en el plano y analizado las relaciones existentes entre ellas, se introduce un nuevo concepto, que relaciona las diferentes regiones determinadas por diferentes figuras.

Se denomina *superficie* la región del plano que queda determinada al hacer el dibujo de algunas figuras. En el caso de los polígonos, se designa también con el nombre de *región poligonal*.

Se considera la extensión como una característica de la superficie.

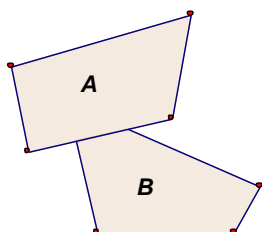
Axioma: A cada extensión de una superficie o región limitada en el plano, se le puede hacer corresponder un número real, que es la medida de dicha extensión.

La medida de la extensión de la superficie de una figura, es su *área*.

Cuando las medidas de las superficies de dos figuras son iguales se dirá que tienen igual extensión o que sus áreas son iguales.

Dos figuras cuyas áreas son iguales, son *figuras equivalentes*. Esta relación se anotará con el signo $=$. La relación de equivalencia de áreas es una relación de equivalencia.

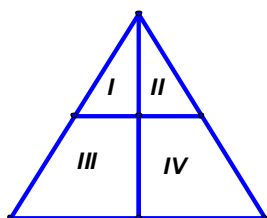
Si dos polígonos son congruentes, entonces son equivalentes.



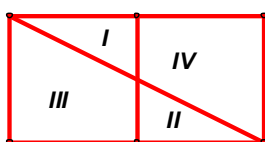
La figura representa dos superficies planas cuyas áreas son A y B, cuya intersección no tiene puntos interiores comunes (podría tener sólo un punto común). La suma de A y B, esto es $A + B$, es la superficie constituida por el dibujo de las dos superficies.

Si se trata de un polígono, es una figura poligonal.

En general, se puede afirmar que toda figura compuesta de a dos en dos por figuras congruentes son equivalentes.



(1)

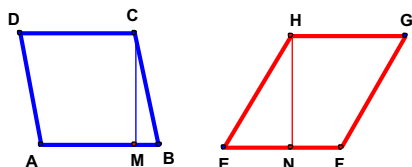


(2)

Estas figuras poligonales están formadas por figuras, dos a dos congruentes. Por lo tanto las figuras (1) y (2) son equivalentes.

Equivalencia en los paralelogramos y en los triángulos

Teorema fundamental de la equivalencia de polígonos “*Dos paralelogramos cuyas bases y alturas son respectivamente congruentes, sus regiones son equivalentes*”.



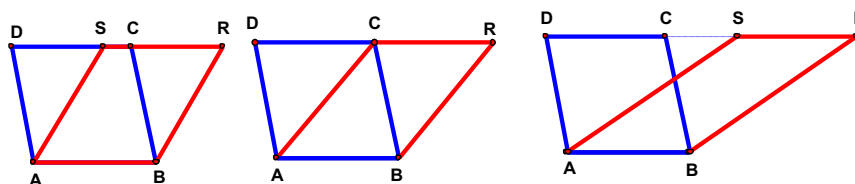
Hipótesis ABCD y EFGH #s

. $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ y $\overline{CM} \cong \overline{HN}$, alturas.

Tesis: $\#ABCD = \#EFGH$.

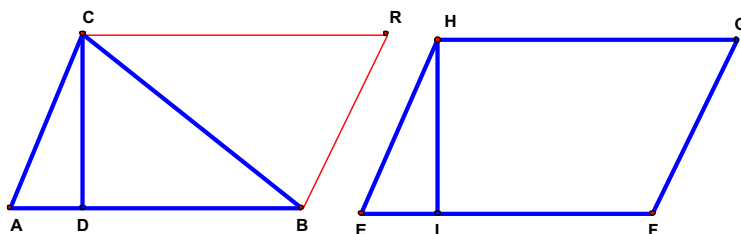
Demostración.

- 1) Sobre $\overline{AB}$ se construye el $\#ABRS \cong \#EFGH$. Se pueden distinguir tres casos, como se observa en las figuras.



- 1) En cada uno de los casos los paralelogramos ABCD y ABRS se obtienen de los respectivas figuras, trapecio ABRD y triángulos BRC y ASD.
- 2) En $\triangle BRC$ y $\triangle ASD$ se tiene: $\overline{BR} \cong \overline{AS}$; $\overline{BC} \cong \overline{AD}$; (hipótesis) y $\angle CBD \cong \angle DAS$ (lados respectivamente //s).
- 3) Por lo tanto $\triangle BRC \cong \triangle ASD$ (LAL).
- 4) Pero $\#ABCD = \text{Trapezio ABRD} \pm \triangle ASD$ y $\#ABRS = \text{trapezio ABRD} \pm \triangle BRC$.
- 5) Luego de 1) y 6) $\#ABCD = \#EFGH$ (tesis).

Teorema “Si un triángulo y un paralelogramo tienen sus bases y sus alturas respectivamente congruentes, entonces la región triangular es equivalente a la mitad de la del paralelogramo”.



Hipótesis En $\triangle ABC$ y en $\#EFGH$ se tiene $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ y $\overline{CD} \cong \overline{IH}$ (alturas).

Tesis: $\triangle ABC = \frac{1}{2} \#EFGH$.

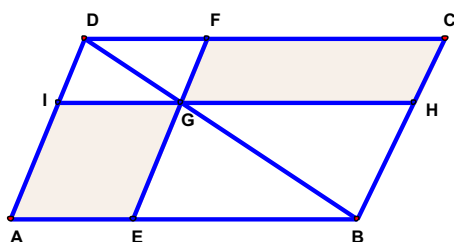
Demostración.

- 6) Se construye $\overrightarrow{CR} \parallel \overline{AB}$; $\overrightarrow{BR} \parallel \overline{AC}$ y $\overrightarrow{CR} \cap \overrightarrow{BR} = \{R\}$.
- 7) Por lo tanto $\#ABRC = \#EFGH$ (bases y alturas congruentes).
- 8) En $\#ABRC$ se cumple que $\triangle ABC = \frac{1}{2} \#ABRC$ (propiedad de los #s).
- 9) Luego, de 2) y 3): $\triangle ABC = \frac{1}{2} \#EFGH$ (Tesis).

Se puede demostrar el siguiente teorema: “Si dos triángulos tienen sus respectivas bases y alturas congruentes, entonces sus regiones son equivalentes”.

Si desde un punto que pertenece a una diagonal de un paralelogramo se construyen los segmentos paralelos a sus lados, se forman dos cuadriláteros que se denominan *paralelogramos complementarios*.

Teorema “Las regiones de dos paralelogramos complementarios, son equivalentes”.

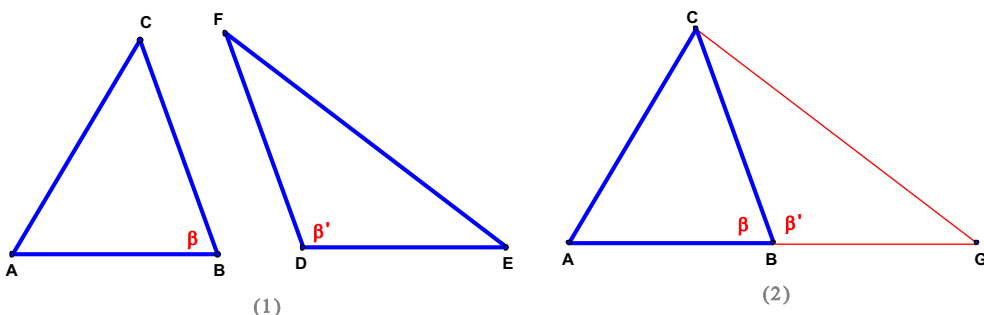


Hipótesis AEGI y GHCF son #s complementarios.
Tesis: #AEGI = #GHCF.

Demostración.

- 1) $\triangle ABD = \triangle CDB$ (propiedad de los #s).
- 2) $\triangle IGD = \triangle GDF$ (propiedad de los #s).
- 3) $\triangle EBG = \triangle BGH$ (propiedad de los #s).
- 4) Haciendo 1) - [2) + 3)] resulta: #AEGI = #GHCF (Tesis).

Teorema “Si dos triángulos tienen dos lados congruentes y los ángulos comprendidos entre ellos suplementarios, entonces sus regiones son equivalentes”.



Hipótesis En $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{DF}$ y $m\angle\beta + m\angle\beta' = 180^\circ$.

Tesis: $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Demostración

- 1) Se construye $\triangle BGC \cong \triangle DEF$, como se ve en la figura (2).
- 2) Por lo tanto $\triangle ABC = \triangle BGC$ (tienen bases y alturas congruentes).
- 3) Luego de 1) y 2): $\triangle ABC = \triangle DEF$ (Tesis).

Medida de las áreas de las figuras

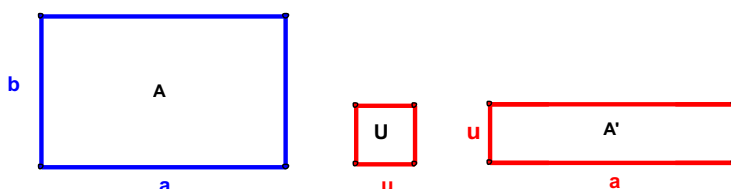
En el desarrollo de pensamiento matemático, el concepto de *medida* es un número real no negativo que se relaciona a un segmento (longitud), a un ángulo (apertura) o a la extensión de un polígono (área).

En el caso de los segmentos y de los ángulos se define la congruencia y, en el caso de los polígonos la equivalencia.

Para determinar las medidas, ya sea de longitudes o áreas, se debe establecer una medida arbitraria u llamada *unidad de medida*. En el caso de la longitud, puede ser el *metro* (m). La expresión 3m, por ejemplo, representa una longitud que contiene tres veces la unidad m (metro).

En el caso de los polígonos, se puede considerar la unidad u^2 , que es la medida de la región de un cuadrado d lado de longitud u . Por ejemplo, $1m^2$ es el área de la superficie comprendida en un cuadrado cuyo lado mide 1m.

Para el cálculo del área de los polígonos es fundamental el siguiente teorema: “El área de una región rectangular es igual al producto de las medidas de de dos lados contiguos (la base y la altura)”.



Hipótesis A el área de un rectángulo de base a y altura b .

Tesis: $A = a \cdot b$

Demostración.

- 1) Sea U el área de un cuadrado cuyo lado mide la unidad u y A' la de un rectángulo de medidas b de la base y u de altura.
- 2) Se tiene por teorema que $A : A' = a : u$
- 3) Por lo mismo, $A' : U = b : u$. Luego: $A' =$
- 4) Reemplazando 3) en 2) y despejando queda: $A = a \times (b:u) \times U$
- 5) Ya que $(U:u)$ es la unidad, entonces $A = a \times b$ (Tesis).

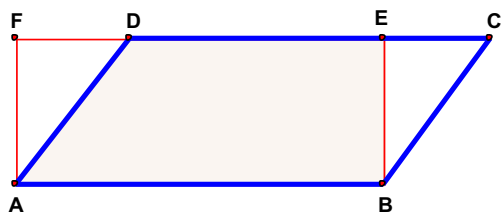
Corolario: El área de un cuadrado cuyo lado es de medida a , es a^2 .

Se puede demostrar que el área de un cuadrado es igual a la mitad del cuadrado de la medida de su diagonal.

Teorema “El área de la región de cualquier paralelogramo es igual al producto de las medidas de su base y de su altura respectiva”.

Hipótesis ABCD #. de base AB y altura BE .

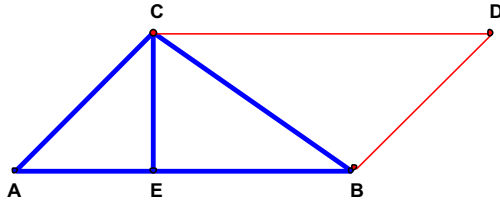
Tesis: Área #ABCD = $AB \times BE$.



Demostración.

- 1) Se construye $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{AB}$.
- 2) $\overrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{AF} = \{F\}$.
- 3) Por lo tanto el cuadrilátero ABEF es rectángulo:
- 4) Luego área ABEF = $AB \times BE$ (teorema anterior).
- 5) Además $\triangle AFD$ y $\triangle AEC$ tienen: $\overline{AF} \cong \overline{BE}$ (lados opuestos del #), $\angle FAC \cong \angle EBC$ ($\angle$ s de lados paralelos) y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (lados opuestos del #).
- 6) Por lo tanto $\triangle AFD \cong \triangle AEC$ (LAL). Luego área $\triangle AFD$ = área $\triangle AEC$.
- 7) En la figura área $\triangle AFD$ + área trapecio ABED = área rectángulo ABEF.
- 8) Además área $\triangle BCE$ + área trapecio ABED = área # ABCD.
- 9) De 6), 7) y 8): área rectángulo ABEF = área # ABCD.
- 10) Reemplazando 4) en 9), resulta: Área #ABCD = $AB \times BE$. (Tesis).

Teorema “El área de una región triangular es igual al semi producto de las medidas de su base y de su respectiva altura”.



Hipótesis En $\triangle ABC$ de base AB y alturas CE.

$$\text{Tesis: } \triangle ABC = \frac{1}{2} AB \times CE$$

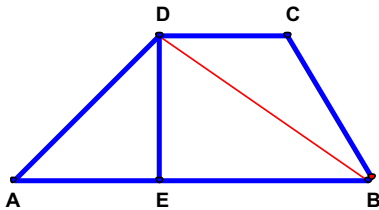
Demostración.

- 1) Se construye $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$; $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{CD} \cap \overline{BD} = \{D\}$.
- 2) Resulta el cuadrilátero ABDC que es paralelogramo.
- 3) Se cumple que $\text{área } \#ABDC = AB \times EC$ (teorema).
- 4) Pero $\text{área } \triangle ABC = \text{área } \triangle BDC$ Propiedad del #).
- 5) Por lo tanto $\text{área } \triangle ABC = \frac{1}{2} AB \times CE$ (Tesis).

Corolario:1) El área de la región de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de las medidas de sus catetos.

2) El área de una región romboidal es igual al semi producto de las medidas de sus diagonales.

Teorema “El área de una región trapezoidal es igual al semi producto de la suma de las medidas de las bases por la medida de la altura”.



Hipótesis El cuadrilátero ABCD es trapecio de altura $\overline{ED}$.

$$\text{Tesis: } \text{área trapecio ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \times ED$$

Demostración.

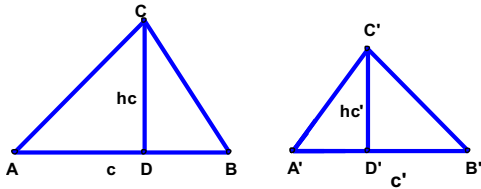
- 1) $B \leftrightarrow D$ y se forman $\triangle ABD$ y $\triangle DCB$.
- 2) $\text{área } \triangle ABD = \frac{1}{2} AB \times ED$ y $\text{área } \triangle DCB = \frac{1}{2} DC \times DE$.
- 3) Pero $\text{área } \triangle ABD + \text{área } \triangle DCB = \text{área trapecio ABCD}$.
- 4) Reemplazando 1) y 2) en 3) queda:

$$\text{área trapecio ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \times ED \text{ (Tesis).}$$

Corolario: El área de una región trapezoidal es igual al producto de la medida de su mediana por la de su altura.

Comparación de las áreas de polígonos semejantes.

Teorema “Las áreas de las regiones de dos triángulos semejantes de diferentes bases y alturas, son entre sí como los productos de las medidas de sus bases y alturas correspondientes”.



Hipótesis $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

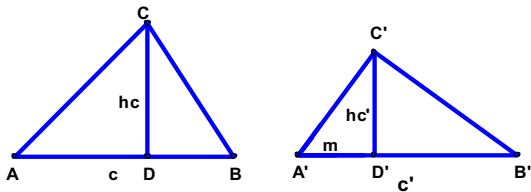
Tesis: $\frac{\text{área}\Delta ABC}{\text{área}\Delta A'B'C'} = \frac{c \cdot hc}{c' \cdot hc'}$

Demostración.

1) $\text{área } \Delta ABC = \frac{1}{2} c \times hc$ y $\text{área } \Delta A'B'C' = \frac{1}{2} c' \times hc'$.

2) Luego, $\frac{\text{área}\Delta ABC}{\text{área}\Delta A'B'C'} = \frac{\frac{1}{2} c \cdot hc}{\frac{1}{2} c' \cdot hc'} = \frac{c \cdot hc}{c' \cdot hc'}$ (Tesis).

Teorema “Las áreas de las regiones de dos triángulos de bases congruentes, son entre sí como las medidas de sus alturas respectivas”.



Hipótesis $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y

$\overline{CD} = hc$ y $\overline{C'D'} = hc'$

Tesis: $\frac{\text{área}\Delta ABC}{\text{área}\Delta A'B'C'} = \frac{hc}{hc'}$

Demostración

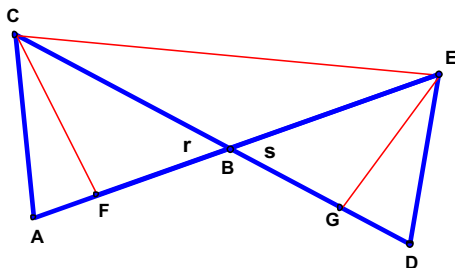
1) $\frac{\text{área}\Delta ABC}{\text{área}\Delta A'B'C'} = \frac{\frac{1}{2} c \cdot hc}{\frac{1}{2} c' \cdot hc'} = \frac{c \cdot hc}{c' \cdot hc'}$

2) Reemplazando la hipótesis en 1) queda: $\frac{\text{área}\Delta ABC}{\text{área}\Delta A'B'C'} = \frac{hc}{hc'}$ (Tesis).

Corolarios:

- 1) Las áreas de las regiones de dos triángulos de alturas congruentes, son entre sí como las medidas de sus bases respectivas.
- 2) Las áreas de las regiones de dos paralelogramos de bases congruentes, son entre sí como las medidas de sus alturas respectivas.
- 3) Las áreas de las regiones de dos paralelogramos de alturas congruentes, son entre sí como las medidas de sus bases respectivas.

Teorema “Si dos triángulos tienen un ángulo congruente, entonces las áreas de sus regiones, son entre sí como el producto las medidas de los lados que comprenden dicho ángulo”.



Hipótesis En ΔABC y ΔBDE se tiene $\angle ABC \cong \angle DBE$.

Tesis: $\frac{\text{área}\Delta ABC}{\text{área}\Delta BDE} = \frac{AB \times BC}{DB \times BE}$

Demostración.

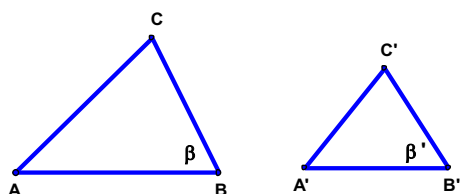
1) $C \leftrightarrow E$ y se construye $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ y $\overline{GE} \perp \overline{BD}$.

- 2) $\triangle ABC$ y $\triangle BCE$ tienen misma altura $\overline{CF}$. Luego, $\frac{\text{área}\triangle ABC}{\text{área}\triangle BCE} = \frac{AB}{BE}$
- 3) $\triangle BDE$ y $\triangle CDE$ tienen misma altura $\overline{GE}$. Luego, $\frac{\text{área}\triangle BDE}{\text{área}\triangle CDE} = \frac{BD}{BC}$
- 4) Dividiendo 2) y 3) y simplificando, queda $\frac{\text{área}\triangle ABC}{\text{área}\triangle BDE} = \frac{AB \times BC}{DB \times BE}$ (Tesis).

La propiedad del teorema anterior, también se cumple si los ángulos son suplementarios.

Corolario: Las áreas de las regiones dos paralelogramos que tienen un ángulo congruente, son entre sí como los productos de las medidas de los lados que comprenden dicho ángulo.

Teorema “Las áreas de las regiones de dos triángulos semejantes, son entre sí como los cuadrados de las medidas de dos lados homólogos”.



Hipótesis $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

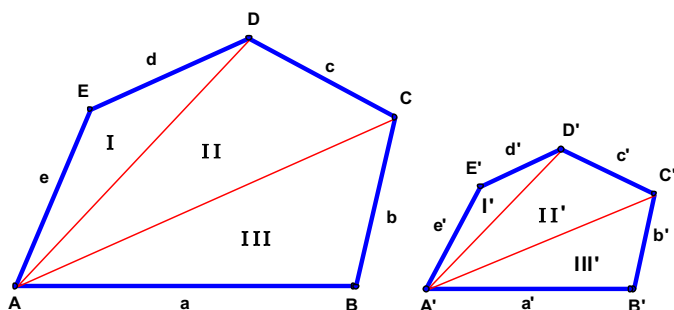
Tesis: $\frac{\text{área } \triangle ABC}{\text{área } \triangle A'B'C'} = \frac{(BC)^2}{(B'C')^2}$

Demostración.

- 1) Por hipótesis, $\beta \cong \beta'$ y por lo tanto, $\frac{\text{área } \triangle ABC}{\text{área } \triangle A'B'C'} = \frac{AB \times BC}{A'B' \times B'C'}$
- 2) Además, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ (triángulos semejantes).
- 3) Reemplazando 2) en 1), resulta $\frac{\text{área } \triangle ABC}{\text{área } \triangle A'B'C'} = \frac{(BC)^2}{(B'C')^2}$ (Tesis).

Corolario: Las áreas de las regiones dos triángulos semejantes, son entre si como los cuadrados de las medidas de dos de sus elementos homólogos cualesquiera (alturas, bisectrices, transversales...).

Teorema “Las áreas de las regiones de dos polígonos semejantes cualesquiera, son entre sí como el cuadrado de las medidas de dos de sus lados (elementos) homólogos”.



Hipótesis $ABCDE \approx A'B'C'D'E'$ de áreas R y R' respectivamente y de lados de medidas $a, a', b, b', c, c', d, d', e, e'$.

Tesis: $\frac{R}{R'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \dots = \frac{(AC)^2}{(A'C')^2} = \dots$

Demostración.

- 1) Se construyen las diagonales de los polígonos y se forman los triángulos de áreas $I, I', II, II', III, III'$.
- 2) Se sabe que $\triangle I \approx \triangle I'; \triangle II \approx \triangle II'$ y $\triangle III \approx \triangle III'$.

- 3) Por lo tanto, $\frac{I}{I'} = \frac{e^2}{e'^2} = \frac{d^2}{d'^2} = \frac{(AE)^2}{(A'E')^2}$ (Teorema).
- 4) Análogamente $\frac{II}{II'} = \frac{d^2}{d'^2} = \frac{(AD)^2}{(A'D')^2} = \frac{(AC)^2}{(A'C')^2}$.
- 5) Análogamente $\frac{III}{III'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{c^2}{c'^2} = \frac{(AC)^2}{(A'C')^2}$.
- 6) De 3), 4) y 5) resulta: $\frac{I}{I'} = \frac{II}{II'} = \frac{III}{III'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{(AC)^2}{(A'C')^2}$
- 7) Por propiedad de series de proporciones: $\frac{I + II + III}{I' + II' + III'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{(AC)^2}{(A'C')^2}$
- 8) Por lo tanto $\frac{R}{R'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{(AC)^2}{(A'C')^2}$ (Tesis).

Corolario. Las áreas de las regiones de dos polígonos regulares son entre sí como los cuadrados de las medidas de los radios de su circunferencia circunscrita o de sus apotemas.

Se puede demostrar el siguiente teorema: “Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen polígonos semejantes, el área de la región del polígono construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las regiones de los polígonos construidos sobre los catetos”.

Longitud de la circunferencia y área del círculo

Una circunferencia se puede considerar como un polígono regular convexo de un número infinito de lados, por lo tanto se deduce el siguiente teorema: “Las longitudes de dos circunferencias son entre sí como las medidas de sus radios”.

Teorema “La razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro es constante”.

Demostración:

- 1) Sean C y C' dos circunferencias y sus diámetros respectivos d y d' .
- 2) Se sabe que $C : C' = d : d'$. Por lo tanto alternando los medios:
 $C : d = C' : d'$.
- 3) Por lo tanto se cumple el teorema.

La razón constante deducida del teorema anterior se designa por la letra griega π . Por lo tanto $C : d = \pi$, que es un número inconmensurable.: $\pi = 3,141592653...$

En la práctica se emplean los siguientes valores: $\pi = 3,1416$ ó $\frac{22}{7}$ ó $\frac{355}{113}$.

Corolario: “La longitud de una circunferencia es igual al producto de la medida del diámetro por el valor π . ($C = \pi d = 2 \pi r$).

Teorema “El área de un círculo es igual al semi producto de la longitud de la circunferencia y la medida de su radio”.

Hipótesis. Sea C la longitud de la circunferencia, A su área y r la medida de su radio.

Tesis: $A = \frac{C}{2} \times r$.

Demostración.

- 1) Se considera el círculo como un polígono regular convexo de un número infinito de lados, en el cual su perímetro se confunde con C y su apotema con r .
- 2) El área de un polígono regular es $A_p = s \times \rho$ (s es el semiperímetro ρ la apotema).
- 3) Reemplazando resulta $A = \frac{C}{2} \times r$ (Tesis).

Corolario : 1. El área de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado la medida del radio.

Demostración.

Reemplazando $C = 2 \pi r$ en la fórmula deducida en el teorema resulta:

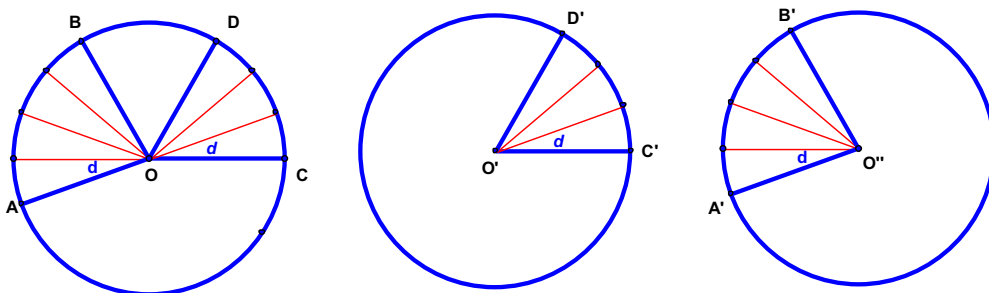
$$A = \frac{2\pi r}{2} \times r = \pi r^2.$$

2. Las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de las medidas de sus radios.

Extensión lineal de un arco de circunferencia y su longitud.

Se sabe que en una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, a ángulos del centro congruentes le corresponden y arcos congruentes y al ángulo formado por la suma de dos ángulos del centro le corresponde la suma de las medidas de los arcos.

Teorema “En una circunferencia o en circunferencias congruentes, las medidas de dos arcos son entre sí como las medidas de sus respectivos ángulos del centro”.



Hipótesis. $m\angle AOB = n \times d$ y $m\angle D'O'C' = m \times d'$.

Tesis. $\frac{m \text{ arc } AB}{m \text{ arc } CD} = \frac{m\angle AOB}{m\angle D'O'C'}$

Demostración:

- 1) En la figura los m y n ángulos pequeños formados, son congruentes. Por lo tanto le corresponden arcos congruentes de medida d y $m\angle AOB = m \times d$ y $m\angle D'O'C' = m \times d'$.
Luego : $m\angle AOB : m\angle D'O'C' = (m \times d) : (m \times d') = m : m'$.
- 2) Además $m \text{ arc } AB = m \times d$; $m \text{ arc } CD = m' \times d'$; por lo tanto :
 $m \text{ arc } AB : m \text{ arc } CD = m \times d : m' \times d' = m : m'$.
- 3) De 1) y 2): $m\angle AOB : m\angle D'O'C' = m \text{ arc } AB : m \text{ arc } CD$ (Tesis).

Problema Conociendo las medidas r del radio de una circunferencia y a la de un ángulo del centro, calcule la medida p del arco correspondiente a dicho ángulo.

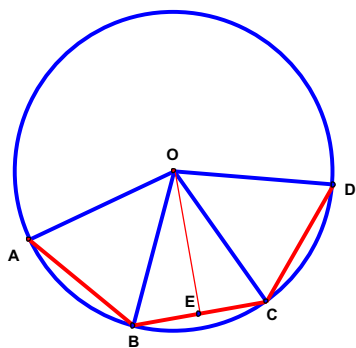
Solución.

Aplicando el teorema demostrado y a la circunferencia como un ángulo de 360° de medida., se tiene: $2 \pi r : p = 360^\circ : a$.

$$\text{Luego } p = \frac{2\pi r a}{360^\circ} = \frac{\pi r a}{180^\circ}.$$

La longitud de un arco de circunferencia es igual a la del radio multiplicado por la medida del correspondiente ángulo del centro expresada en radianes.

Teorema “La medida del área de un sector circular es igual al semi producto de las medidas de su arco y de su radio”.



Hipótesis.

Sea sector AOD = S_c : La medida del arco

ABCD = p

AB = BC = CD ... lados de un polígono regular inscrito en el círculo. OE = ρ

apotema. OA = OG = r radio.

Tesis: $S_c = \frac{1}{2} p \times r$.

Demostración:

1) El área del sector poligonal regular

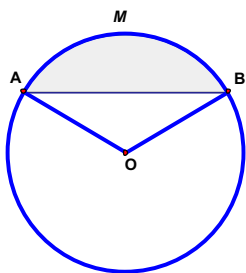
OABCD... $S_{p,r}$.

2) $S_{p,r} = \frac{1}{2} \rho (AB + BC + CD + \dots)$. El sector circular S_c se puede considerar como un polígono regular de infinitos lados en el cual $\rho = r$ de perímetro la medida p del arco ABCD.

3) Luego reemplazando en 2) resulta: $S_c = \frac{1}{2} p \times r$ (tesis).

Se puede demostrar que “en un mismo círculo o en círculos de radios congruentes, el área de dos sectores circulares son entre sí como las medidas de los respectivos ángulos del centro”. Este teorema permite calcular el área de un sector circular en función del arco y su radio o en función del radio y del ángulo del centro correspondiente.

La medida del área de un *segmento circular* es igual a la diferencia (o (suma) de las áreas del sector circular y de la región triangular que tiene como base la cuerda del segmento y por vértice el centro del círculo.

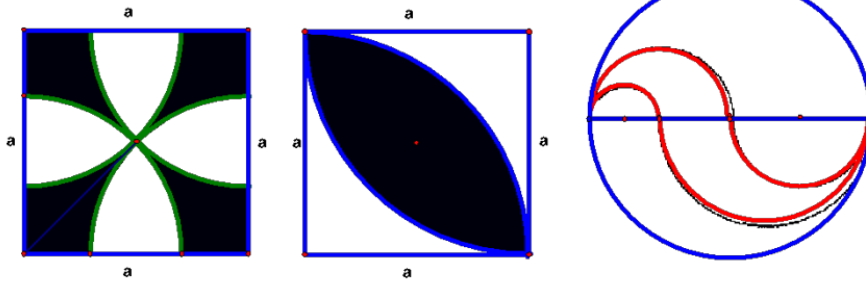


á segmento AMB = á sector OAMB – á Δ AOB.

Taller 6-1

- 1) Se unen los vértices de un triángulo con su centro de gravedad. Demuestre que los tres triángulos formados son equivalentes.
- 2) Demuestre que la región triangular formada al unir los extremos de unos de los lados del trapecio ABCD con el punto medio del otro, es equivalente a la mitad de la región trapezoidal.
- 3) Demuestre que las tres transversales de gravedad de un triángulo lo dividen en seis triángulos equivalentes.
- 4) Demuestre que si se une un punto en el interior de un paralelogramo con cada uno de los vértices, la suma de las áreas de los triángulos que tienen por base dos lados opuestos, es igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos.
- 5) Probar que el rectángulo que tiene como lado la hipotenusa de un triángulo rectángulo y la altura correspondiente a ella, es equivalente al rectángulo formado por los catetos.
- 6) Demostrar que el área de la región del triángulo cuyos vértices están situados en los puntos medio de tres lados de un cuadrilátero cualquiera, es igual a la cuarta parte del área de la región del cuadrilátero.
- 7) Transformar un rectángulo de lados de medida a y b (segmentos) en un triángulo de base de medida c , de modo que las dos figuras sean equivalentes.
- 8) Añadiendo 5m a los lados de un cuadrado, su área aumenta en 225 m^2 . Determine la medida del lado del cuadrado.
- 9) Calcule el área de la región de un triángulo rectángulo si la medida de la hipotenusa es c y la de uno de los catetos es b .
- 10) La diferencia de las medidas de las bases de un trapecio es 8m y la medida de su altura es 20m. Calcule las medidas de las bases del trapecio si el área de su región es 500 m^2 .
- 11) El perímetro de un rombo mide 48m y su área es 108 m^2 . La medida de uno de sus ángulos es 60° . Determine las medidas de las diagonales.
- 12) La base de un triángulo mide 48m y su altura 16m. Determine la distancia desde la cual ha de construirse un segmento paralelo a la base para que el área de la región del triángulo formado sea 54 m^2 .
- 13) Las medidas de los dos catetos de un triángulo rectángulo son 144cm y 108cm. Determine la distancia desde el vértice en que se debe trazar un segmento paralelo, para que el área de la región del trapecio formado sea de 972 cm^2 .
- 14) La medida de la base de un triángulo es a y la de la altura respectiva es h . Determine la longitud del segmento paralelo a la base para que la región triangular quede dividida en dos regiones poligonales equivalentes.
- 15) Las medidas de las bases de un trapecio son 12m y 7m, y la de la altura 6m. Si se construye un segmento paralelo a las bases quedando dividido en dos regiones equivalentes. Determine la longitud de este segmento.
- 16) Construir un polígono semejante a un polígono dado, de modo que el área de su región sea el cuádruplo de la del polígono dado.
- 17) Dividir la región de un cuadrado dado mediante cuadrados concéntricos, de modo que se formen tres regiones equivalentes.
- 18) Calcule el área de un sector circular cuyo ángulo del centro mide 75° y la medida de su radio es 30cm.
- 19) Determine en función del radio, el área de los segmentos circulares correspondiente a los ángulos de 60° , 90° y 120° .
- 20) Calcule el área de un círculo inscrito en un sector correspondiente al ángulo cuya medida es 60° .
- 21) La medida de un arco AB de una circunferencia es de 80cm y los segmentos tangentes en A y B forman un ángulo que mide 144° . Determine el área del círculo completo y la del sector AOB.
- 22) Un rombo está inscrito en un círculo de 10cm de radio y la medida de uno de sus ángulos es 60° . Calcule el área de la región comprendida entre la región romboidal y el círculo.

23) Determine en función del radio las áreas de las regiones destacada sen color en las figuras.



TRANSFORMACIONES DE LAS FIGURAS EN EL PLANO

En todas las culturas humanas se han utilizado movimientos en forma de simetrías, giros y traslaciones de figuras para manifestar la belleza y armonía, ya sea en sus decoraciones o en sus edificaciones u otras manifestaciones artísticas.

Una aplicación del plano en el plano tal que a cada punto de un plano le hace corresponder otro punto del mismo plano es una *transformación geométrica*.

Dada una figura geométrica en el plano, las transformaciones geométricas permiten crear una nueva figura a partir de ella y será su *homóloga*, con respecto a la transformación.

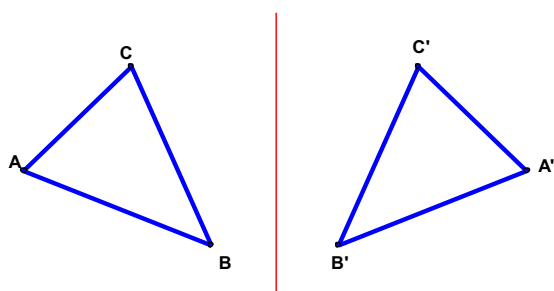
De acuerdo a la forma de la homóloga, con respecto a la figura dada, la transformación será *isométrica*, si el homólogo conserva las distancias entre puntos y las medidas de los ángulos.

Isomórfica, si el homólogo conserva la forma y las medidas de los ángulos. Si, además, existe proporcionalidad entre las dimensiones de la figura homóloga con la figura dada, será *homotecia*. Es *anamórfica* la transformación que cambia la forma de la figura dada.

Los elementos característicos de las figuras que la definen y permiten identificar la correspondencia entre la figura inicial y su transformada son *los* parámetros. Si un punto es su propio transformado, es un *punto doble*. Si una figura es su propia transformada, es una *invariante*.

Si es posible aplicar varias transformaciones una tras otra, será una *composición o producto de transformaciones*.

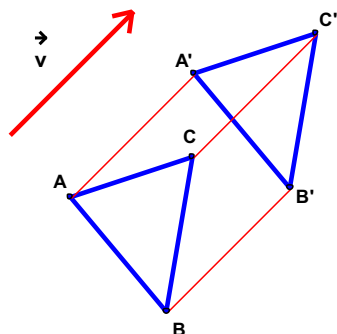
Una transformación que conserva las distancias entre los puntos, es un *movimiento o isometría* en el plano.



Puede ser *movimiento directo*, cuando la figura original y la figura transformada por el movimiento se pueden hacer coincidir sin salir del plano y, en caso contrario será *movimiento inverso*.

Las transformaciones geométricas de simetría axial y puntual, la rotación y la traslación.

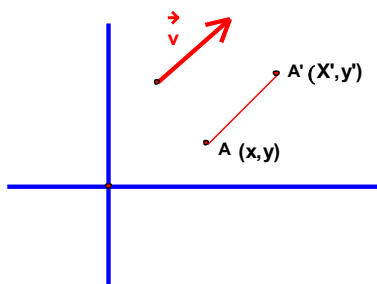
Dado un vector $\vec{v}$, llamado *vector de dirección*, la transformación puntual por la cual a todo punto A de un plano se le



hace corresponder otro punto A', también del plano, tal que $AA' = \vec{v}$ es una *traslación*, y $\vec{v}$ es el vector que define la traslación. La traslación se designa por T_v . Luego, $T_v(A) = A'$. El punto A' es el *punto trasladado* de A con respecto a T. Un punto y su trasladado se dice que son *homólogos*.

Recordar que un *vector libre* es independiente de su posición, solamente está definido por su módulo y dirección.

Representación de una traslación en un sistema de coordenadas.



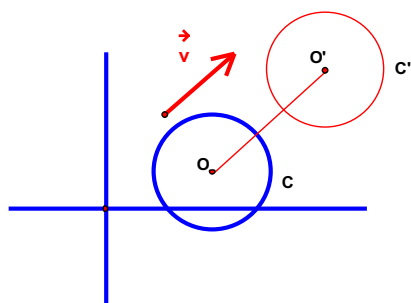
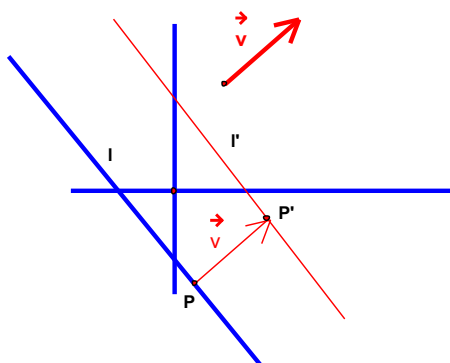
$$T_v(A(x, y)) = A'(x', y') \text{ y } \vec{V}(m, n).$$

Por lo tanto $A' = A + \vec{V}$.

$$A' = (x, y) + (m, n) = (x+m, y+n)$$

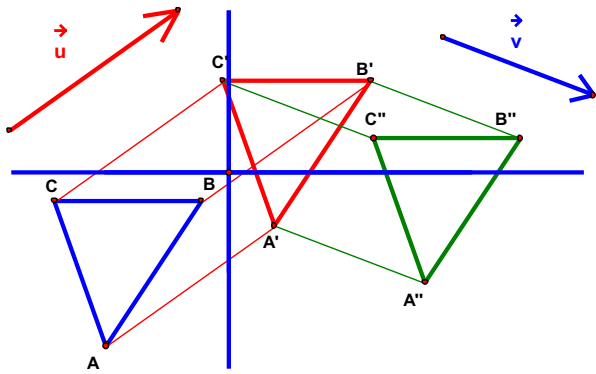
La transformada de una recta l mediante la traslación T_v será una recta $T_v(l) = l'$, tal que $l' \parallel l$, a la distancia $|\vec{V}|$ de l .

Cada punto perteneciente a l' corresponde al trasladado con respecto a T_v de los puntos de l .



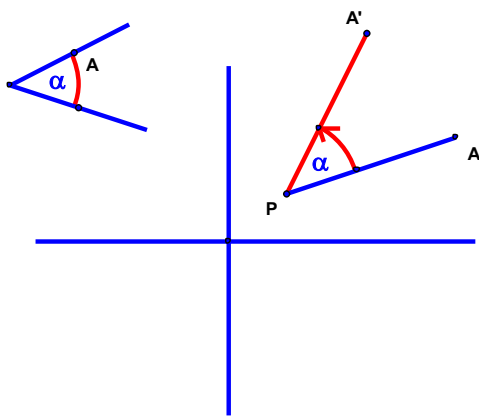
La transformada de una circunferencia C de centro O mediante la traslación T_v será la circunferencia $T_v(C) = C'$, tal que su centro es $T_v(O) = O'$ y su radio es de igual medida que la del radio de C . Cada punto perteneciente a C' corresponde al trasladado con respecto a T_v de los puntos de C .

Al aplicar sucesivamente dos traslaciones de vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$, se obtiene otra traslación de vector que es la *composición de traslaciones*, que queda definida por la suma de los vectores.



$$\begin{array}{lll} \vec{U}(a, b) & \vec{V}(c, d) & \\ A(x, y) & A'(x', y') = A'(x+a, y+b) & A''(x'', y'') = A''(x+a+c, y+b+d) \\ B(x_1, y_1) & B'(x_1', y_1') = B'(x_1+a, y_1+b) & B''(x_1'', y_1'') = B''(x_1+a+c, y_1+b+d) \\ C(x_2, y_2) & C'(x_2', y_2') = C'(x_2+a, y_2+b) & C''(x_2'', y_2'') = C''(x_2+a+c, y_2+b+d) \end{array}$$

Rotaciones



Sea P un punto fijo en un plano y α un ángulo de medida dada, la transformación R_α que hace corresponder a cada punto A del plano un punto A' tal que

$\overline{PA} \cong \overline{PA'}$ y $m \angle APA' \cong \alpha$, es la *rotación (giro)* de centro P y amplitud α . Se anota:

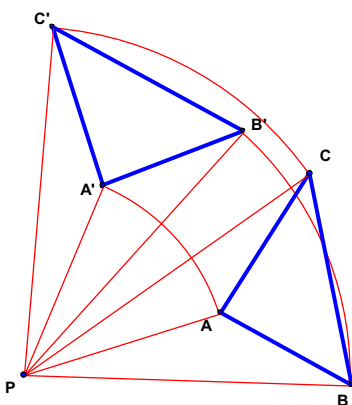
$R_\alpha(A) = A'$. El punto P se transforma en sí mismo. El sentido positivo de la rotación es el contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Definición

$$R_{o,\alpha}: X \rightarrow X$$

$$R_{o,\alpha}(A) = A' \text{ y } OA = OA' \text{ y } \angle AOA' \cong \alpha.$$

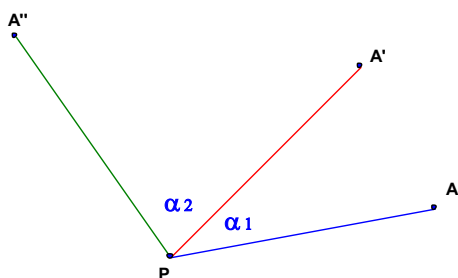
Las rotaciones son transformaciones isométricas ya que las distancias se conservan.



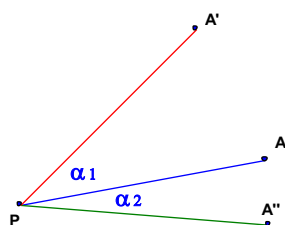
La figura corresponde a una rotación del $\triangle ABC$ con respecto al punto P en la cual a medida del ángulo de rotación es de 50° .

En el caso que el ángulo de rotación es $-\alpha$, es una *rotación inversa*.

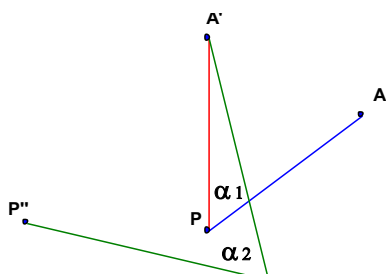
Tal como en las traslaciones, también existe la composición o producto de rotaciones con respecto al mismo ángulo y centro o bien los ángulo y el centro pueden ser distintos.



$$\alpha_1 + \alpha_2 = 35^\circ + 80^\circ = 115^\circ$$



$$\alpha_2 - \alpha_1 = 50^\circ - 35^\circ = 15^\circ$$



Ecuaciones de las rotaciones

Las ecuaciones para una rotación con centro en el punto $P(0,0)$ de ángulo de rotación α para el punto $A(x, y)$ y su transformado a $A'(x', y')$ son:

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \text{ e } y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

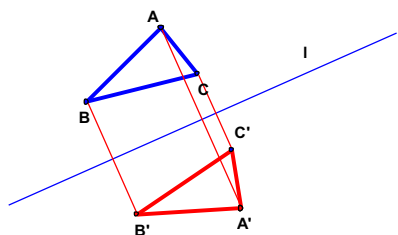
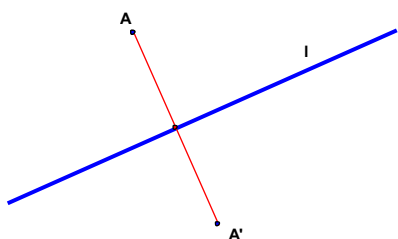
Si el centro de rotación es el punto $P(a, b)$, entonces las ecuaciones son.

$$x' = a + (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha \text{ e } y' = b + (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha.$$

Simetría axial

Dada una recta l en un plano, la aplicación que se le hace corresponder a cada punto A del plano otro punto A' del mismo plano tal que el segmento $\overline{AA'}$ es perpendicular a l y las distancias de ambos puntos a l son iguales, es la *simetría de eje l* .

La simetría axial es un movimiento inverso y además una transformación involutiva, es decir, la aplicación sucesiva de dos simetrías deja invariante la figura dada.



Definición

$$S_l: X \rightarrow X,$$

si $A \notin l \Rightarrow S_l(A) = A'$, si y solo si l es la mediatriz de $\overline{AA'}$

Ecuaciones

Respecto al eje X: $x' = x$ $y' = y$

Respecto al eje Y: $x' = -x$ $y' = y$

Respecto a un eje que pasa por el origen (0, 0):

$$x' = a + (x - a) \cos 2\alpha + (y - b) \sin 2\alpha$$

$$y' = b - (x - a) \sin 2\alpha + (y - b) \cos 2\alpha$$

Respecto a un eje que pasa por el punto (a, b):

$$x' = a + (x - a) \cos 2\alpha + (y - b) \sin 2\alpha$$

$$y' = b + (x - a) \sin 2\alpha + (y - b) \cos 2\alpha$$

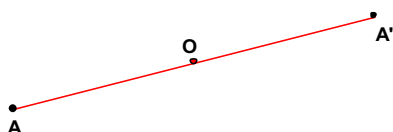
Composición de simetrías

El resultado es una traslación cuyo vector director es perpendicular a las rectas y su módulo es el doble de la distancia entre ellas.

También puede construirse la simetría con ejes que se intersecan en un punto B y según el ángulo α .

Simetría central

Si O es un punto fijo del plano, la aplicación que hace corresponder cada punto A del plano con un punto A' del mismo plano tal que, los puntos A', A y O son

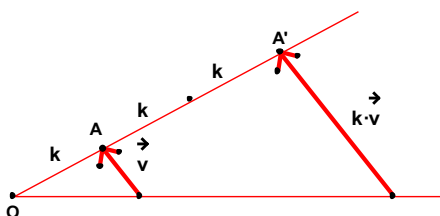


colineales y $OA = OA'$, es una *simetría central con respecto al centro O*.

La simetría central S_c es inversa e involutiva, es decir la aplicación de dos simetrías con el mismo centro, origina la figura inicial (la deja invariante).

Homotecia

Dados un punto O en un plano y una razón k , la traslación que hace corresponder un punto A de un plano, con otro punto A' del mismo plano tal que los puntos A, O y A' son colineales y la distancia $OA' = k \cdot OA$, es la *homotecia con centro en el punto O y de razón k*.



En una homotecia se conserva las medidas de los ángulos y las medidas de las distancias son proporcionales al valor k .

El producto de dos homotecias, una de centro O y otra de centro O', es otra homotecia de centro en O'' y razón $k'' = k \cdot k'$. Los centros O, O' y O'' son colineales.

En una homotecia, las rectas que pasan por el centro son invariantes.

Simetrías propias, son las simetrías de una figura que se caracterizan por dejar las figuras invariantes.

Ecuaciones

Sean A (x, y), A' (x', y') y O (a, b). Entonces $(x', y') = k \cdot (x, y)$ tal que:

$$x' = a + k \cdot x \quad \text{e} \quad y' = b + k \cdot y.$$

Taller 7-1

- 1) Haga el gráfico de la traslación $T_{\vec{v}}$ si $\vec{v} = (2, 3)$ del punto A (4, 5).
 - 2) Una traslación en el plano está definida por $\vec{v} = (2, -3)$. a) Halle la imagen de dicha traslación del punto A (1, -3). B) Halle la transformada de la circunferencia de radio 1 y de centro (3, 4).
 - 3) En una traslación de vector $\vec{v}$, el punto (2, -3) se transforma en el punto A' (5, 1). a) Halle el transformado del punto B (-3, 4). b) La transformada de la circunferencia de centro (1, 2) y radio 3. c) El transformado del triángulo de vértices A (0, 0), B (4, 8) y C (-3, -5).
 - 4) Dibuje un cuadrado ABCD de 4cm de lado. Construya $\overline{AC}$ y determine el punto M en él, tal que la distancia $AM = 2AC$. Dibuje la imagen del cuadrado en distintos giros, alrededor de M, en ángulos de 60° , 120° , 180° , 240° y 300° .
 - 5) Uno de los vértices de un rombo es el punto A(-5, 5) y la medida de su lado es 3. Determine las coordenadas de los vértices de un rombo y luego los de su transformado por:
 - a) La simetría con respecto al eje OX.
 - b) La simetría con respecto al eje OY.
 - c) La simetría que tiene por eje la recta que pasa por los puntos P (0, -2) y Q (4, 2).
 - 6) Una transformación por la cual una figura queda invariante, es una traslación identidad (I). Defina una traslación y un giro que sean equivalentes a la identidad.
 - 7) Una transformación que compuesta consigo misma resulta la identidad es idempotente (es decir, si la aplicamos dos veces, la figura queda invariante. Determine dos movimientos que sean idempotentes.
Por ejemplo, una simetría de un cierto eje e , y un giro de 180° (con cualquier centro).
 - 8) Una transformación T' es inversa de otra T cuando compuesta con ella da lugar a la identidad (es decir, si aplicamos T y después T' , resulta la figura invariante.) Encuentre la transformación inversa en cada uno de los siguientes casos:
 - a) Una traslación de vector (5, -2).
 - b) Un giro de centro O (0, 0) y ángulo $\alpha = 30^\circ$.
 - c) Una simetría de eje la recta $y = x$.
 - 9) La composición de transformaciones no cumple la propiedad conmutativa (es decir, $T_2 \circ T_1$, en general, es distinto que $T_1 \circ T_2$). Sin embargo, si las transformaciones son de ciertos tipos, si se cumple la propiedad conmutativa.
Justifica en cuáles de los siguientes casos la transformación es o no conmutativa:
 - a) Composición de dos traslaciones.
 - b) Composición de dos giros del mismo centro.
 - c) Composición de dos simetrías axiales.
 - d) Composición de una traslación y un giro.
- Respuestas: a) Sí es conmutativa. El resultado es otra traslación de vector igual al vector suma de los correspondientes a las dos traslaciones.
- b) Sí es conmutativa. El resultado es otro giro del mismo centro y ángulo igual a la suma de los ángulos correspondientes a los dos giros.
- c) No es conmutativa.
- d) No es conmutativa.

Capítulo VIII

ESTEREOMETRÍA

La ***Geometría Plana*** se preocupa del estudio de las figuras cuyos puntos están en un mismo plano. Ahora nos ocuparemos del estudio de las figuras cuyos puntos no pertenecen a un mismo plano. La parte de la geometría que se ocupa de este estudio se llama ***Geometría Sólida o Estereometría o Geometría del Espacio***.

Recordemos algunos axiomas ya conocidos.

“Postulados de la geometría del espacio”.

1. Tres puntos del espacio, no colineales, pertenecen a uno y solo a un solo plano.
2. Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, toda la recta pertenece a dicho plano.
3. Toda recta de un plano divide a dicho plano en dos regiones (semitplanos) que son conjuntos convexos.
4. Todo plano α divide a los puntos del espacio en dos regiones (semiespacios) que son conjuntos convexos.

Observación.

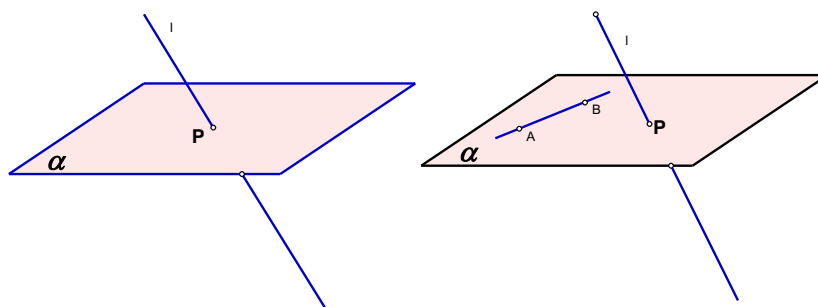
Del axioma 1) se deduce que, dos rectas que se intersecan o que son paralelas determinan un único plano. Además, una recta y un punto fuera de ella, también determinan único plano. El plano determinado por las rectas l y l' se anotará $P(l, l')$.

Definición: se llama semiespacio de origen (o de contorno) α , a la figura constituida por los puntos del plano α y de aquellos puntos pertenecientes a una de las regiones determinadas por α .

De los postulados anteriores se deduce:

1. Si un segmento AB tiene en común un solo punto C , distinto de A y de B , con un plano α , los puntos A y B están en semiespacios opuestos con respecto al plano α .
2. Si una recta l tiene sólo un punto con un plano α , este punto da origen a dos semirrectas que están en semiespacios opuestos de α , (este punto se llama punto de intersección del plano y de la recta).

Puede darse el caso que una recta no tenga un punto común con un plano, o bien, todos los puntos de ella estén en el plano. En este caso se dirá que la recta es coplanaria o adyacente al plano.



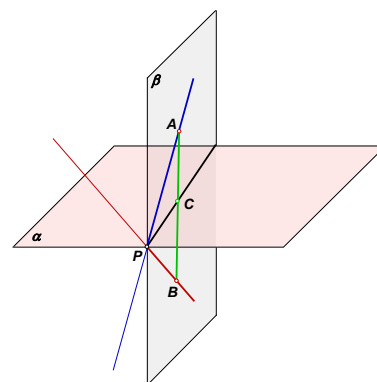
Teorema. “Dos planos distintos que tienen en común un punto, tienen también en común una recta que pasa por dicho punto”.

Hipótesis α y β dos planos distintos que tienen en común el punto P.

Tesis: $\alpha \cap \beta = \{l\}$; recta que contiene a P.

Demostración

- 1) En el plano β y por el punto P se construyen dos rectas $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.
- 2) Si una de ellas pertenece al plano α , el teorema está demostrado.
- 3) Si esto no ocurre, el punto P



divide a cada una de las rectas en dos semirrectas que están en semiespacios distintos con respecto al plano α .

4) $A \leftrightarrow B$ y $\alpha \cap \beta = \overrightarrow{PC}$

- 5) En los semiespacios distintos, el segmento $\overline{AB} \cap \overrightarrow{PC} = \{C\}$, intersección de α y β , en el punto C (Axioma).

Pero los puntos P y A están en los planos α y β . Por lo tanto los planos α y β tienen una recta en común $\overrightarrow{PC}$.

Si dos planos tienen en común una recta, dicha recta se llama intersección (arista).

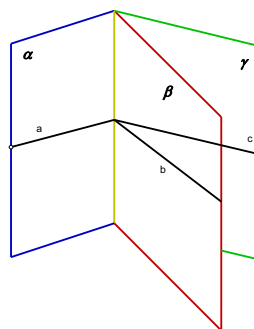
Además, por una recta en el espacio pasan un número infinitos de planos. Este conjunto de planos forman un *haz de planos*. Y la recta es el *eje* del haz.

De la misma manera el conjunto de planos que pasan por un punto se llama *estrella* de los planos y el punto se llama *centro de la estrella*.

Rectas y planos perpendiculares

Sabemos que en el plano, por un punto de una recta, se puede dibujar una y sólo una recta perpendicular a la recta.

En el espacio, a la inversa, por un punto de una recta se pueden dibujar un número infinito de rectas perpendiculares a ella.



Teorema. “Si una recta es perpendicular a dos rectas que se intersectan, es perpendicular a cualquier otra recta del plano que contiene a ambas rectas”.

Hipótesis En el plano α $l_1 \cap l_2 = \{P\}$; $l \perp l_1$ y $l \perp l_2$ en el punto P .

Tesis: La recta l es perpendicular a cualquier otra recta que esté en el plano α y que pase por P .

Demostración

1) En la recta l , a partir de P , se construyen

los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ congruentes, situados en semiespacios distintos con respecto al plano α .

2) $A \leftrightarrow Q \leftrightarrow B$ y $A \leftrightarrow R \leftrightarrow B$, A y B situados en l_1 y l_2 .

3) Pero l_1 y l_2 son mediatrices de $\overline{QR}$ en planos distintos (QAR y QBR). Por lo tanto se obtiene $\overline{AQ} \cong \overline{AR}$ y $\overline{BQ} \cong \overline{BR}$.

4) $A \leftrightarrow B$ y $\overline{AB} \cap l_3 = \{C\}$.

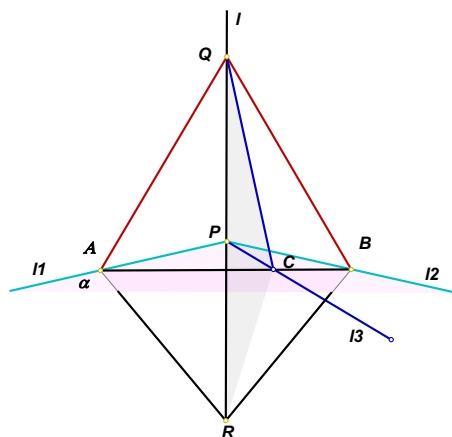
5) $Q \leftrightarrow C \leftrightarrow R$.

6) Luego $\triangle QAB \cong \triangle RAB$ (LLL).

7) Por lo tanto $\angle QAC \cong \angle RAC$ (corolario $\cong$).

8) También $\triangle QAC \cong \triangle RAC$ (LAL). Por lo tanto $\overline{QC} \cong \overline{RC}$: Luego $\triangle QCR$ es isósceles.

9) $\overline{PC}$ es mediana., luego $\overrightarrow{PC} \perp l$ en P (propiedad del $\triangle$ isósceles) (Tesis).



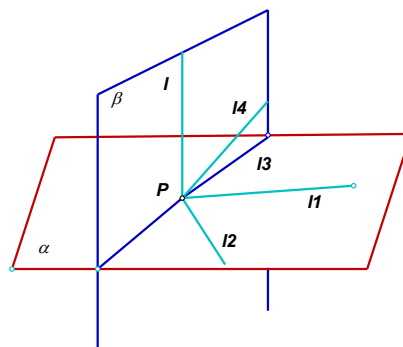
Teorema. “El lugar geométrico de las rectas perpendiculares a una recta en un punto de ella, es un plano”.

Hipótesis l_1, l_2 y l_3 perpendiculares a la recta l en el punto P.

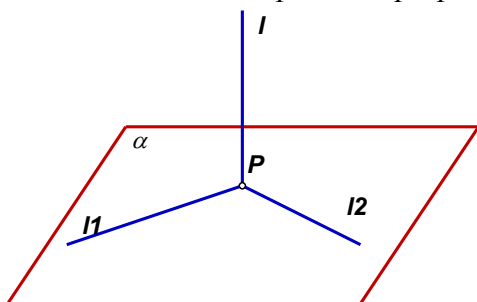
Tesis: l_1, l_2 y l_3 están en un mismo plano.

Demostración

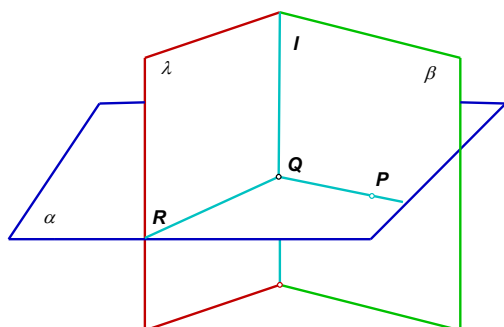
- 1) Sea α el plano formado por l_1 y l_2 y sea β el plano formado por las rectas l y l_3 .
- 2) Este plano, β tendrá en común con α , el punto P y, por lo tanto, una recta l_4 , la cual resultará perpendicular a l , ya que pasa por P y pertenece a α (teorema anterior).
- 3) Pero en el plano β se puede construir solamente una sola perpendicular a la recta l . por lo tanto, la recta l_4 no puede ser distinta de l_3 ; o sea l_3 pertenece al plano β . Esto se cumple también para cualquier otra recta perpendicular a l en el punto P (Tesis).



Definición: Una recta y un plano se dice que son *perpendiculares* cuando la recta corta al plano y es perpendicular a cualquier recta del plano que pase por el punto de intersección de ambos. A este punto se le da el nombre de *pie de la perpendicular*.



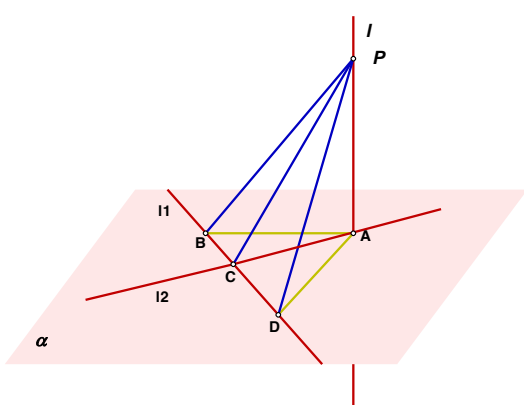
Se puede demostrar que “por un punto dado se puede construir un plano perpendicular a una recta y sólo uno”.



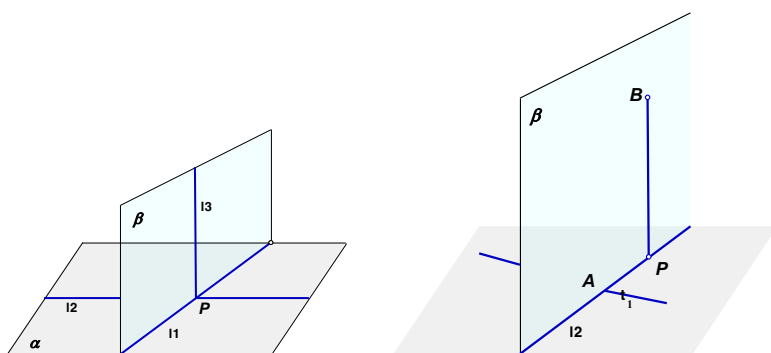
Teorema (de las tres perpendiculares). “Si por el punto de intersección de una recta l perpendicular con un plano perpendicular a ella, se construye la recta l_2 perpendicular a otra recta l_1 cualquiera del plano, l_1 resulta perpendicular al plano formado por las rectas l y l_2 ”.

Hipótesis Sea L una recta y α un plano tal que $l \perp \alpha$. $l \cap \alpha = \{A\}$.
 Desde A se construye $l_2 \perp l_1$ en α .
 Tesis: $l_1 \perp P(l, l_2)$.

Demostración

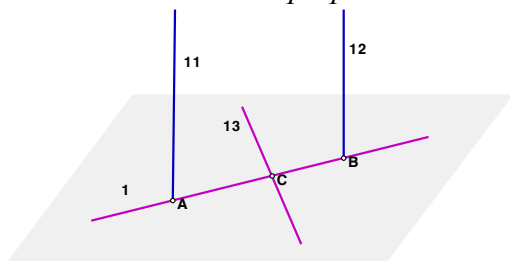
- 1) Se construye $l_1 \cap l_2 = \{C\}$ y los puntos B y D en l_2 , tales que $\overline{CB} \cong \overline{CD}$.
 - 2) Se unen estos puntos con A y con un punto cualquiera P de la recta l .
- 
- 3) l_2 es la mediatriz del segmento $\overline{BD}$ en el plano α y, por lo tanto, $\overline{BA} \cong \overline{DA}$.
 - 4) $\triangle PAB \cong \triangle PAD$ (LAL).
 - 5) Por lo tanto $\overline{PB} \cong \overline{PD}$ (corolario $\cong$).
 - 6) En $\triangle$ isósceles BPD , $\overrightarrow{CP}$ es mediana de la base y, por lo tanto, altura. Luego $\overrightarrow{BD}$ es perpendicular a $\overrightarrow{CP}$ en el plano (l, l_2) (Tesis).

También se puede demostrar que *por un punto cualquiera, en un plano dado, se puede construir sólo una recta perpendicular*.



Rectas paralelas en el espacio.

Teorema. “Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas”.



Hipótesis

l_1 y l_2 rectas perpendiculares al plano α en los puntos A y B . l la recta que une los puntos de intersección, A y B , de las rectas con el plano.

Tesis: l_1 y l_2 están en el mismo plano y $l_1 \cap l_2 = \emptyset$.

Demostración

- 1) Se construye $\overrightarrow{AB} = l$ y $l_3 \perp l$.

- 2) $l_1 \perp \alpha$ y $l \perp l_2$, la recta l_3 será perpendicular al plano determinado por l_1 y l (Teorema de las tres perpendiculares).
- 3) Análogamente, se demuestra que la recta l_3 es perpendicular al plano determinado por l_2 y l .
- 4) Pero el plano perpendicular a l_3 por el punto C es único porque las dos rectas l_1 y l_2 pertenecen a un mismo plano.
- 5) Luego, $l_1 \parallel l_2$, ya que son coplanarias y ambas son perpendiculares a la recta l . (Tesis.)

Se pueden demostrar los siguientes teoremas.

Teorema. “Si dos rectas son paralelas, un plano que interseca a una de ellas interseca también a la otra”.

Teorema. “Si dos rectas son paralelas, un plano que es perpendicular a una de ellas lo es también a la otra”.

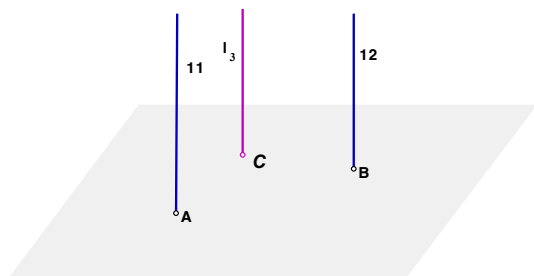
Teorema. “Dos rectas paralelas a una tercera recta, son paralelas entre sí”. (Este teorema se cumple aunque no estén en un mismo plano).

Hipótesis $l_1 \parallel l_2$ y $l_3 \parallel l_2$.

Tesis $l_1 \parallel l_3$.

Demostración

- 1) Se construye plano $\alpha \perp l_2$.
- 2) Por teorema anterior, $\alpha \perp l_1$ y $\alpha \perp l_3$.
- 3) Por lo tanto $l_1 \parallel l_3$, son perpendiculares a un mismo plano. (tesis).



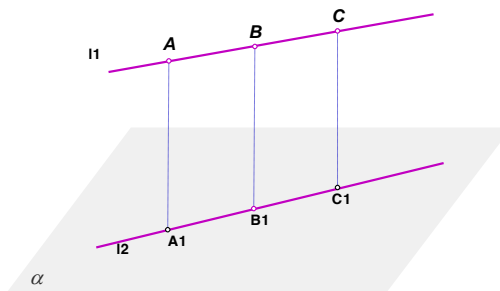
Proyecciones y distancia. Ángulo formado por una recta con un plano.

Se llama *proyección de un punto sobre un plano* al punto de intersección de la recta perpendicular trazada desde el punto hasta el plano. Se llamará *proyección de una figura sobre un plano* la figura constituida por la proyección de cada uno de los puntos de ella sobre el plano.

Se puede demostrar que “la proyección de una recta sobre un plano, no perpendicular a él, es una recta”.

De esta manera, la proyección de un segmento será otro segmento, cuyos extremos son las proyecciones de los extremos del segmento dado.

Para un segmento o una recta perpendicular a un plano, su proyección se reduce a un solo punto.



Teorema. “Si desde un punto situado en el exterior de un plano se construyen el segmento perpendicular al plano y varios otros segmentos oblicuos (no perpendiculares), se verifican las siguientes propiedades:

- I) La medida del segmento perpendicular es menor que la de cualquier segmento oblicuo. (fig. 1)
- II) Dos segmentos oblicuos que tienen proyecciones congruentes en un mismo plano, son congruentes. (fig. 2)
- III) Dos segmentos que tienen proyecciones desiguales son desiguales y el mayor de ellos es el que tiene la proyección mayor.”

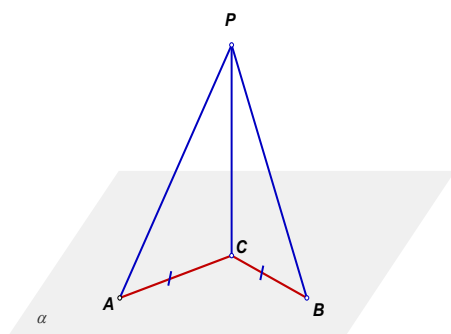


figura 1

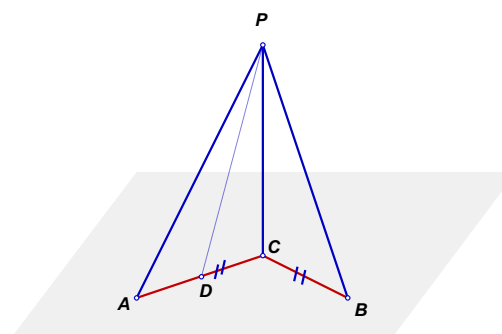


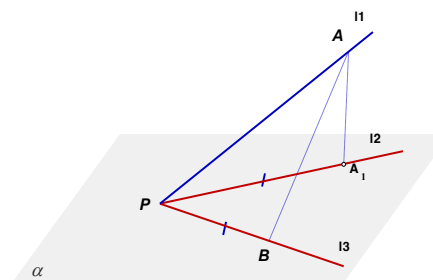
figura 2

Definición: La medida del segmento perpendicular a un plano trazado desde un punto exterior al plano, se llama *distancia desde el punto al plano*.

Teorema. “La medida del ángulo agudo que forma una recta que corta a un plano con su proyección en el plano, es menor que la medida de cualquier otro ángulo que forma dicha recta con cualquier otra recta adyacente al plano, en el punto de intersección”.

Hipótesis Sea la recta l_1 y el plano α , tal que $l_1 \cap \alpha = \{P\}$. l_2 es la proyección de l_1 en α y l_3 es otra recta cualquiera en α que pasa por P.

Tesis $m \angle(l_1, l_2) < m \angle(l_1, l_3)$.



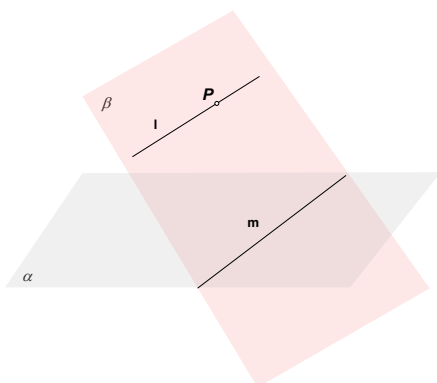
- 1) Sea A un punto cualquiera de l_1 y A_1 su proyección en α .
- 2) Se construye el punto B en l_3 tal que $\overline{PB} \cong \overline{PA_1}$.
- 3) $A \leftrightarrow B$.
- 4) En $\triangle APA_1$ y $\triangle APB$, se tiene: $\overline{AP}$ lado común; $\overline{PA_1} \cong \overline{PB}$ y $AA_1 < AB$.
- 5) Luego al menor lado se opone menor ángulo y, por lo tanto, $m \angle APA_1 < m \angle APB$ (Tesis).

El ángulo agudo que forma una recta con su proyección sobre un plano, se llama ángulo de la recta con el plano o *ángulo de inclinación* de ella.

Rectas y planos paralelos

Definición: Una recta y un plano se dicen que son paralelos cuando no tienen ningún punto en común.

Teorema. “Si una recta pasa por un punto exterior al plano y es paralela a una recta del plano entonces es paralela al plano”.



Hipótesis Sea l una recta que pasa por un punto P exterior al plano α .

$m \subset \alpha$ y $l \parallel m$

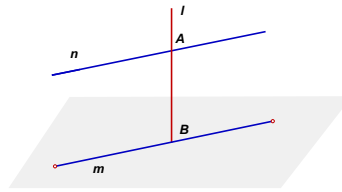
Tesis: $l \parallel \alpha$.

Demostración

- 1) $l \parallel m$, entonces determinan un plano β tal que $\alpha \cap \beta = m$.

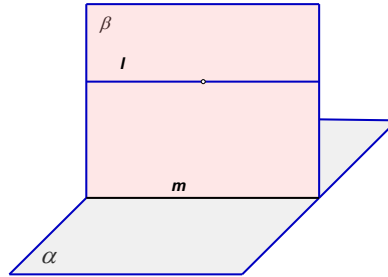
- 2) Si la recta l intersecara a α , lo debiera hacer en un punto de la recta m , lo que contradice la hipótesis; luego $l \parallel m$ y $l \parallel \alpha$ (Tesis).

De este teorema se deduce el siguiente corolario: Una recta y un plano perpendiculares a una misma recta, en puntos distintos, son paralelos.

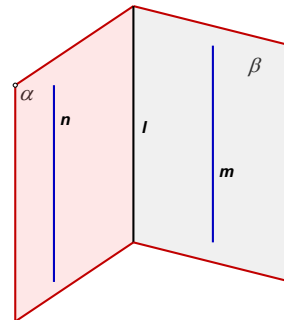


Ejercicios. Demostrar los siguientes teoremas:

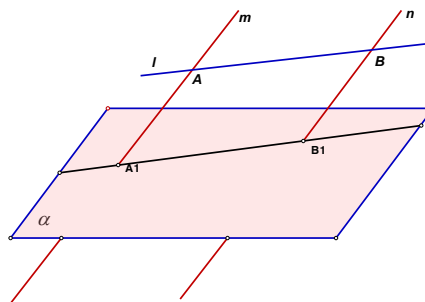
Teorema. “El plano que contiene a una recta dada, paralela a un plano dado, interseca a este último según una recta paralela a la recta dada.”



Teorema. “La intersección de dos planos que contienen a dos rectas paralelas dadas, es paralela a las rectas dadas”.

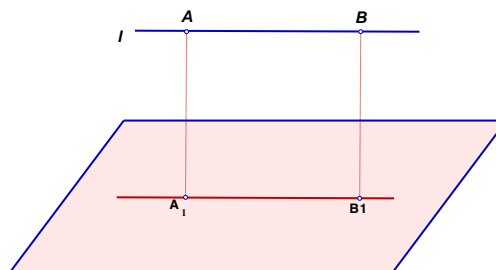


Teorema. “Una recta y un plano paralelos que intersecan a dos rectas paralelas, determinan sobre estas rectas segmentos congruentes”.



Corolario: Si una recta es paralela a un plano, todos sus puntos son equidistantes del plano.

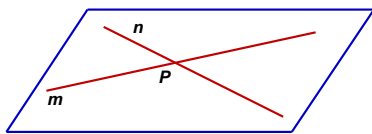
Este corolario justifica la siguiente definición: Dada una recta paralela a un plano, se llama *distancia de la recta al plano*, la distancia desde un punto cualquiera la recta, a dicho plano.



Planos paralelos

Definición: Dos planos se dicen que son paralelos cuando no tienen ningún punto en común.

De la existencia de planos paralelos se deduce el siguiente Teorema: “Si dos rectas que se intersectan, son paralelas a un plano, el plano que forman esta dos rectas es paralelo al plano dado.



Hipótesis Sean las rectas m y n y el plano α tales que $m \cap n = \{P\}$ y $m \parallel \alpha$ y $n \parallel \alpha$.

Tesis: $P(m,n) \parallel \alpha$.

Demostración

1) Supongamos que tienen un punto en común y, por lo tanto tendrán una recta en común y, ésta sería paralela a m y n , lo cuál es absurdo, porque las dos rectas se intersectan en un punto, por hipótesis y, entonces por un punto del plano pasarían dos paralelas a una misma recta.

2) Por lo tanto $P(m,n) \parallel \alpha$ (Tesis).

Teorema. “Dos planos perpendiculares a una misma recta en puntos distintos, son paralelos”.

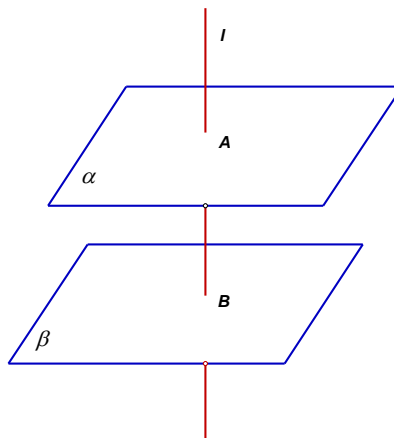
Hipótesis Sean α y β dos planos y la recta l , tales que $\alpha \perp l$ y $\alpha \perp m$, en los puntos A y B.

Tesis: $\alpha \parallel \beta$

Demostración

1) Si se supone que α y β tienen un punto en común, por este punto pasarían dos planos perpendiculares a una misma recta, lo cual es absurdo.

2) Luego $\alpha \parallel \beta$ (Tesis).



Como ejercicios, demostrar lo siguiente:

Teorema. “Si dos planos paralelos se intersectan con un tercer plano, entonces las aristas de intersección son paralelas”.

Teorema. “Si una recta interseca a un plano, también interseca a cualquier otro plano paralelo al plano dado”.

Teorema. “Si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular a uno de los planos es, también, perpendicular al otro”.

Teorema. “Dos planos paralelos a un tercer plano son paralelos entre si”.

Teorema. “Por un punto exterior a un plano sólo se puede trazar un plano y sólo uno, paralelo al plano dado”.

Sabemos que dos ángulos, situados en un plano, si tienen dos lados respectivamente paralelos son congruentes (o suplementarios). Esta proposición se puede extender al espacio.

Teorema. “Dos ángulos situados en el espacio (no coplanarios), que tienen sus lados respectivamente paralelos, son congruentes y los planos que los contienen son paralelos”.

Hipótesis Sean $\angle BPA$ y $\angle B'P'A'$ tales

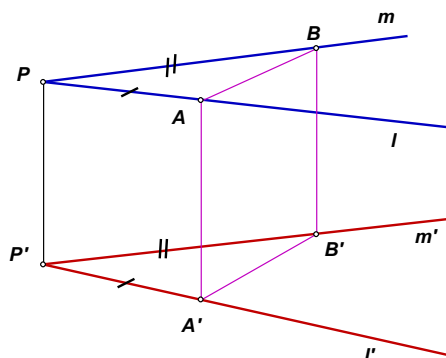
$\overrightarrow{PB} \parallel \overrightarrow{P'B'}$ y $\overrightarrow{PA} \parallel \overrightarrow{P'A'}$.

Tesis: $\angle BPA \cong \angle B'P'A'$ y

$P(APB) \parallel P(A'P'B')$

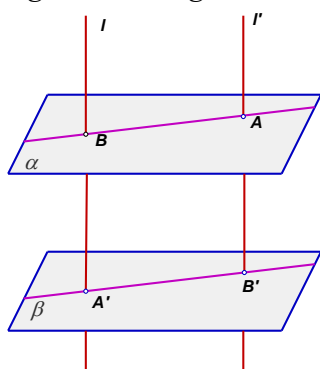
Demostración

1) Se construyen los puntos A, B, A', y B' tales que $\overline{PA} \cong \overline{P'A'}$, $\overline{PB} \cong \overline{P'B'}$.



- 2) Se construye el cuadrilátero AA'B'B. y $P \leftrightarrow P'$.
- 3) Por lo tanto, el cuadrilátero PAA'P' es # (tiene un par de lados $\cong$ y $\parallel$).
- 4) Luego $\overline{PP'} \cong \overline{AA'}$ y son $\parallel$ s.
- 5) Análogamente $\overline{BB'} \cong \overline{PP'}$ y son $\parallel$ s.
- 6) Luego, de 4) y 5) $\overline{AA'} \cong \overline{BB'}$ y son $\parallel$ s y el cuadrilátero AA'B'B es un paralelogramo.
- 7) Luego $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ (lados opuestos del #).
- 8) De 1) y 7) $\triangle APB \cong \triangle A'P'B'$ (LLL) y por lo tanto, $\angle APB \cong \angle A'P'B'$.
- 9) Como $l' \parallel m'$ y $l \parallel m$, entonces los planos que contienen a los ángulos son $\parallel$ s.
- 10) Se 8) y 9) resulta la Tesis

Teorema. “Dos planos paralelos que intersecan a dos rectas paralelas, determinan sobre ellas segmentos congruentes”.



Hipótesis Sean α y β dos planos y l y l' dos rectas tales que $\alpha \parallel \beta$ y $l \cap \alpha = \{B\}$, $l \cap \beta = \{A'\}$ y $l' \cap \alpha = \{A\}$, $l' \cap \beta = \{B'\}$.

Tesis: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

Demostración

- 1) $l \parallel l'$, forman el plano $P(l, l')$.
- 2) $\alpha \cap P(l, l') = \overline{AB}$ y $\beta \cap P(l, l') = \overline{A'B'}$.

- 3) Por hipótesis, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$.
- 4) Por lo tanto de 1) y 3) el cuadrilátero A'B'AB es un #.
- 5) Luego $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ (lados opuestos del #). (Tesis).

Corolario: Si dos planos son paralelos, las distancias de cada punto de uno de los planos al otro, son iguales,

Este corolario justifica la siguiente definición: Se llama *distancia entre dos planos paralelos*, a la distancia desde un punto de uno de los planos al otro.

Definición: Al conjunto de planos paralelos a un plano dado se llama haz de planos paralelos.

Teorema. “Un haz de planos paralelos que interseca a rectas secantes. Determina sobre ellas segmentos proporcionales”.

Diedros – Planos perpendiculares – Rectas alabeadas – Ángulos sólidos.

Generalizando lo visto anteriormente se puede considerar *un haz de semiplanos* con un eje común y en éste a su vez considerar una rotación de uno de los semiplanos con respecto al eje. Se puede orientar dicha rotación en forma positiva o negativa.

En este caso y si fijamos un semiplano α , diremos que:

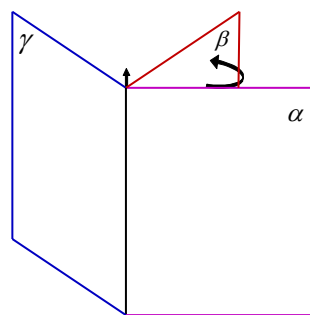
- 1) cualquier otro plano sigue al semiplano
- 2) de dos semiplanos β y γ , distintos de α , β precede a γ o γ sigue a β haciéndolos rotar con respecto a α

Definición: Se llama *ángulo diedro* o simplemente *diedro* de dos semiplanos α y β a la abertura que queda entre los dos semiplanos. Se anotará $\angle(\alpha, \beta)$.

Los semiplanos reciben el nombre de *caras* y el eje común se llama *arista* del diedro.

Cada semiplano del diedro, distinto de las caras, se llama *semiplano interno*.

La característica de “interno” puede extenderse de igual manera a un elemento cualquiera del espacio y, en general, a cualquier figura.



Si se traza un plano perpendicular a la arista del diedro, llamada *sección normal*, se forma un ángulo plano cuyos lados son las intersecciones de las caras del diedro con el plano normal. La medida del ángulo diedro es, precisamente, la medida de este ángulo plano.

Mediante tal correspondencia podremos *definir la congruencia y la relación de orden en las medidas de los diedros*.

Planos perpendiculares

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se entrega la siguiente

Definición: dos planos que al cortarse forman cuatro diedros congruentes, se dicen que son *perpendiculares*.

Cada uno de estos diedros se dice que es recto. Igualmente se puede considerar ángulos diedros agudos u obtusos. Si dos planos no son perpendiculares se dice que son *oblicuos*.

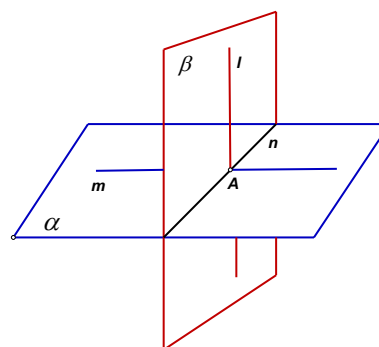
Un importante criterio para reconocer la relación de perpendicularidad lo entrega el siguiente Teorema. “Si una recta del plano β es perpendicular al plano α , entonces los dos planos α y β son perpendiculares”.

Hipótesis Sea la recta l y los planos α y β tales que,
 $l \subset \beta, l \perp \alpha \cdot = \{A\}$ y $l \perp \alpha$.

Tesis: $\alpha \perp \beta$.

Demostración

- 1) $\alpha \cap \beta = n$.
- 2) Se construye en α la recta $m \perp n$ en el punto A
- 3) Por lo tanto, por hipótesis, $l \perp m$.
- 4) Luego $m \angle(\alpha, \beta) = 90^\circ \alpha \perp \beta$ (Tesis).



Corolario 1. Si una recta l es perpendicular a un plano α , cada plano del haz que pasa por la recta l es perpendicular al plano dado.

Corolario 2. Si un plano α es perpendicular a una recta l del plano β , también es perpendicular al plano β .

Se enuncian los siguientes teoremas para que sean demostrados.

Teorema. “Si dos planos son perpendiculares, cualquier recta que pertenece a uno de ellos y es perpendicular a la intersección de ellos, es también perpendicular al otro plano”.

Teorema. “Si dos planos son perpendiculares y desde un punto cualquiera de uno de ellos se traza una recta perpendicular al otro, esta recta también es perpendicular al primer plano”.

Teorema. “Si dos planos que se intersectan son perpendiculares a un mismo plano, entonces su intersección también es perpendicular al plano dado”.

Teorema. “Por una recta, no perpendicular a un plano, se puede construir un plano, y uno sólo, perpendicular al plano dado”.

Ángulo poliedro o ángulo sólido

Supongamos en el espacio tres o más rayos que tienen el mismo origen y tales que, considerados en cierto orden, cada dos semirrectas consecutivas determinan planos.

La figura formada por los ángulos y por todos los rayos que están en dichos planos, se llama *superficie piramidal convexa* o superficie de los ángulos.

El punto de origen común se llama *vértice* de la superficie; las semirrectas se llaman *aristas* y cada ángulo se llama *cara*.

Los puntos del espacio que no pertenecen a la superficie y que se encuentran en una misma posición con respecto a cada una de las caras se llaman *puntos internos*; todos los otros puntos, excluyendo los de la superficie, se llaman *puntos externos*.

Se llama *ángulo poliédrico* o *ángulo sólido convexo* la figura sólida formada por los puntos de la superficie piramidal convexa y todos sus puntos internos.

El vértice, las aristas, las caras de la superficie pasan a ser el *vértice*, las *aristas*, las *caras* del poliedro. La superficie piramidal constituye su contorno.

Los diedros formados por los semiplanos que forman dos caras consecutivas, serán los *diedros* del poliedro.

La intersección de un poliedro con un plano que interseca a todas sus aristas y que no pasa por el vértice es una región poligonal.

Un ángulo poliedro tiene tantas caras como aristas.

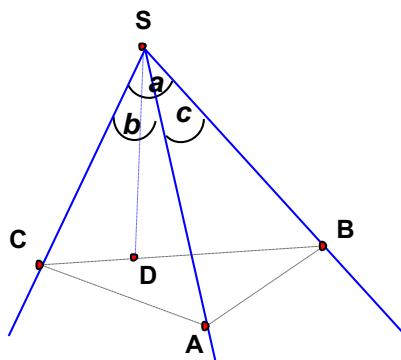
Se denominan los ángulos poliedros: triedro, tetraedro, pentaedro...según su número de caras. Si todas las caras y todos sus diedros son congruentes, entonces el ángulo sólido se dice *regular*.

Teorema. “Cada cara de un ángulo triedro es menor que la suma de las otras dos y menor que su diferencia”.

Hipótesis Sea el triedro S y las medidas de sus caras $m \angle BSC = a$, $m \angle CSA = b$ y $m \angle ASB = c$. Tesis: $a < b+c$ y $b > a - c$.

Demostración

- 1) El teorema es evidente si uno de los sumandos fuera igual o mayor que $m \angle BSC$.
- 2) Sea $m \angle BSC$ es mayor que cada uno de los otros dos ángulos planos.
- 3) Se construye $\angle BSD \cong \angle BSA$ y $\overline{SA} \cong \overline{SD}$.
- 4) Se construye $\overline{BC}$ por el punto B, $A \leftrightarrow C$ y $B \leftrightarrow C$.



5) De 3) y $\overline{SB}$ lado común, resulta $\triangle BSA \cong \triangle BSD$ (LAL).

6) Por lo tanto $\overline{BA} \cong \overline{BD}$ (corolario de $\cong$)

7) También, en el plano CAB se tiene $BB < BA+AC$.

8) Restando BD del primer miembro de la desigualdad y su igual BA del segundo resulta: $BA = BD$.

9) Entonces en los triángulos CSD CSA tienen dos lados respectivamente congruentes y el tercero desigual, siendo $CD > CA$.

10) Luego $m \angle CSD < m \angle CSA$.

11) Por lo tanto $m \angle CSD + m \angle DSB < m \angle CSA + m \angle BSA$

12) Luego $m \angle CSB < m \angle CSA + m \angle BSA$. O sea, $a < b + c$.

13) La desigualdad anterior se puede escribir $b + c > a$; restando c de ambos miembros queda: $b > a - c$.

14) De 12) y 13) se deduce la tesis.

Teorema. “La suma de las caras de un ángulo poliedro convexo es menor que 360° ”.

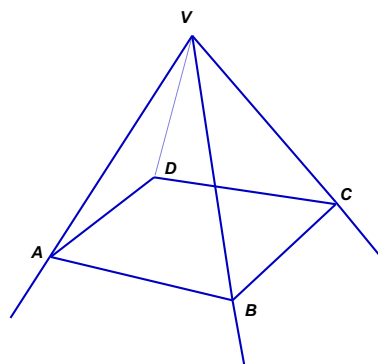
Hipótesis Sea S l asuma de las medidas de los ángulos planos del ángulo poliedro.

Tesis: $S < 360^\circ$.

Demostración

1) Se interseca el ángulo poliédrico por un plano que determina sobre sus aristas los puntos A,B,C,D...

2) En cada uno de estos puntos se forma un ángulo triedro, de modo que, por el teorema anterior se cumple:



$m\angle DAB < m\angle SAD + m\angle SAB$; $m\angle ABC < m\angle SBA + m\angle SBC$;
 $m\angle BCD = m\angle SAD + m\angle SAB$; $m\angle CDA < m\angle SADC$ $m\angle SDA$...

3) Sumando miembro a miembro esta desigualdad resulta.

$m\angle DAB + m\angle ABC + m\angle BCD + m\angle CDA < m\angle SAD + m\angle SAB + m\angle SAB + m\angle SBA + m\angle SBC$
 $+ m\angle SCB + m\angle SDC + m\angle SDA$

4) El primer miembro de esta desigualdad es la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono ABCD...., esto es $n \cdot 180^\circ - 360^\circ$, siendo n el número de lados del polígono.

5) El segundo miembro de la desigualdad es la suma de las medidas de los ángulos en las bases de los n triángulos de las caras laterales, que designamos S' .

6) Entonces, $n \cdot 180^\circ - 360^\circ < S'$ (I). por otra parte: $n \cdot 180^\circ = S' + S$ (II).

7) Restando I – II, resulta: $360^\circ > S$, lo que es lo mismo que $S < 360^\circ$. (Tesis).

Simetría y congruencia

En la geometría del plano se define la simetría con respecto a un punto (central) y con respecto a una recta (axial).

Del mismo modo se complementa con el nuevo concepto de asimetría en el espacio con respecto a un plano.

Simetría con respecto a un punto

Definición: Se dice que dos puntos A y A' son simétricos con respecto a un punto O si O es el punto medio del segmento que une a A con A' .

La relación entre los puntos del espacio que nace asociando a cada punto P del plano con su simétrico respecto a un punto O , es una particular correspondencia biunívoca, que se llama *simetría del espacio con respecto al centro O* , o *simetría central*.

Definición: Dos figuras F y F' tales que los puntos de una de ellas son los simétricos de los puntos de la otra con respecto a un punto O , se dice que son *simétricas con respecto a O* , que se llama *centro de simetría* de las dos figuras.

Definición: Si una figura F es simétrica ella misma con respecto a un punto O , el punto se llama *centro de simetría de la figura*.

Se dice que la simetría respecto a O transforma la figura en sí misma.

El conjunto de una figura F y de su simétrica F' respecto a un punto O constituye una nueva figura, que tiene por centro de simetría el punto O .

Simetría con respecto a una recta

Definición: Sea l una recta fija en el espacio. Se dice que dos puntos P y P' se dice que son simétricos con respecto a l , si l es perpendicular al segmento PP' en su punto medio.

La relación entre los puntos del espacio que nace asociando a cada punto P del plano con su simétrico respecto a una recta l , es una particular correspondencia biunívoca, que se llama *simetría del espacio con respecto al eje l* , o *simetría axial*.

Definición: Dos figuras F y F' tales que los puntos de una de ellas son los simétricos de los puntos de la otra con respecto a una recta l , se dice que son *simétricas con respecto a una recta l* , que se llama su *eje de simetría*.

Un ejemplo sencillo de esta simetría serían dos planos paralelos.

Definición: Si una figura F es simétrica ella misma con respecto a una recta l , la recta se llama *eje de simetría de la figura*.

Se dice que la simetría respecto a l transforma la figura en sí misma.

El conjunto de una figura F y de su simétrica F' respecto a una recta l constituye una nueva figura, que tiene por eje de simetría la recta l .

Observación importante.

Sea S un haz de semiplanos. La relación que nace al asociar a cada semiplano α de S su simétrico α' es una *congruencia*: si se efectúa la rotación que sobrepone el semiplano α en su simétrico α' , sobrepone a cualquier otro semiplano de S en su propio simétrico. Esto nos lleva a la siguiente conclusión: “Si F y F' son dos figuras simétricas con respecto a una recta l , entonces son congruentes, esto significa que existe un movimiento que permite sobreponer una figura sobre la otra.

Simetría con respecto al plano

Ahora se completa el concepto sobre la simetría de las figuras en el espacio.

Definición: Sea α un plano fijo. Se dice que dos puntos P y P' son *simétricos* con respecto a α si α es perpendicular al segmento PP' en su punto medio.

La relación entre los puntos del espacio que nace asociando a cada punto P del espacio con su simétrico respecto a un plano α , es una particular correspondencia biunívoca, que se llama *simetría del espacio con respecto a α* , que se llama *simetría del espacio con respecto al plano axial α* .

Definición: Dos figuras F y F' tales que los puntos de una de ellas son los simétricos de los puntos de la otra con respecto a un plano α , se dice que son *simétricas con respecto al plano α* , que se llama su *plano de simetría*.

Definición: Si una figura F es simétrica ella misma con respecto a un plano α , el plano α llama *plano de simetría de la figura*.

Se dice que la simetría respecto a α transforma la figura en sí misma.

El conjunto de una figura F y de su simétrica F' respecto a un plano α constituye una nueva figura, que tiene por eje de simetría el plano α .

Por ejemplo, cada plano perpendicular a las aristas de un poliedro es un plano de simetría del poliedro, también, el plano de simetría de un diedro es el semi plano bisector del diedro.

Teorema. “La figura simétrica de un segmento $\overline{AB}$ con respecto a un plano α es un segmento $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$.”

De este teorema se deduce lo siguiente: Una recta o un rayo tienen como simétricos una recta o un rayo con respecto a α ; en particular si A, B, C son tres puntos colineales, entonces sus simétricos

también son colineales. La proposición contraria, o sea, si los puntos no son colineales, tampoco lo son sus simétricos.

Teorema. “Un ángulo β tiene como simétrico con respecto a un plano α un ángulo β' congruente con β .

De este teorema se deduce lo siguiente:

- 8) Un plano o un semiplano tiene como figura simétrica, respecto a un plano α un plano o un semiplano. En particular, una figura cuyos puntos pertenecen a un plano, esto es, es una figura plana, tiene como simétrica, con respecto a un plano α , una figura plana.
- 9) Un polígono P tiene como simétrico, con respecto a un plano α un polígono P' congruente con P.

La simetría con respecto a un plano conserva la distancia, pero *dos figuras simétricas respecto a un plano no siempre son directamente congruentes*.

Taller 8-1

1. Un plano y una circunferencia (que no está en el plano) no pueden tener más de dos puntos en común. Verdadero o falso.
2. Tres rectas tienen un punto en común de dos en dos o están en un plano o pasan por un dos los puntos. Verdadero o falso.
3. Dadas dos rectas alabeadas cualesquiera, a y b. Si se consideran dos puntos A y B sobre la primera de ellas y dos puntos C y D sobre la segunda ¿Pueden estos cuatro puntos pertenecer a un mismo plano? Supongamos fijos los puntos C y D y se cambia de posición el punto A. Determine el lugar geométrico (LG) que describe el punto medio del segmento AC.
4. Determine el LG de los puntos de un plano equidistantes de un punto exterior al plano.
5. Los extremos de un segmento son equidistantes de cualquier plano que pase por su punto medio.
6. ¿Cuál es el LG de los puntos del espacio equidistantes de los extremos de un segmento dado?
7. Se tiene una recta y dos puntos en el espacio, Determine sobre la recta un punto equidistante de los puntos dados.
8. Determine el LG de los puntos equidistantes de los tres vértices de un triángulo.
9. Existe un solo punto equidistante de cuatro puntos no coplanarios.
- 10) Determine el LG de los puntos del espacio equidistantes de tres rectas de un plano
- 11) Dadas dos rectas en el espacio, la paralela a una de ellas por un punto de la otra, pertenece también al mismo plano.
- 12) Por un punto cualquiera ¿cuántos planos paralelos a dos rectas dadas pueden trazarse?
- 13) Dadas tres rectas, OA, OB, y OC, concurrentes en O y que están en distintos planos, ¿cuántos planos determinan?
- 14) ¿Cuántas rectas perpendiculares a una recta dada en el espacio, pueden trazarse en un punto de ella?
- 15) Determine, en el espacio, el LG de los puntos equidistantes de dos puntos dados.
- 16) ¿Podrían ser perpendiculares a un mismo plano dos rectas que se cruzan?
- 17) Dado un triángulo rectángulo isósceles, tal que $CA = CB = a$ cm. Se traza

- CP = a cm, perpendicular al plano del triángulo. Calcule las medidas de los segmentos AB, PA, PB. ¿De qué naturaleza es el triángulo?
- 18) En el vértice C del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC se dibuja una recta perpendicular al plano del triángulo. Si M es un punto cualquiera de dicha perpendicular, compruebe que los triángulos MCA y MCB son rectángulos. ¿Bajo qué condiciones el triángulo MAB será equilátero?
- 19) Las distancias desde los puntos A y B a un plano son 14 y 29 cm respectivamente. Si la distancia desde los puntos de intersección de las perpendiculares al es de 20 cm, determine la distancia entre los puntos A y B.
- 20) Demuestre que dos planos que son paralelos a un tercer plano son paralelos entre sí.

Poliedros – Prismas – Pirámides – Polígonos Regulares

Generalidades sobre poliedros

Se llama *superficie poliédrica* a la figura formada por varios polígonos situados en planos distintos y dispuestos de tal modo que cada lado sea común a dos de ellos y, los planos formados, se cortan de dos en dos.

El polígono, sus vértices y sus lados se llaman *caras*, *vértices* y *aristas* de la superficie poliédrica. Los puntos del espacio que no pertenecen a la superficie y se encuentran en la misma parte de la superficie respecto al plano de cada una de las caras se llaman puntos *interiores* de la superficie; todos los otros puntos, que no son internos y no pertenecen a la superficie, son puntos *exteriores*.

Se llama *poliedro (convexo)* a la figura formada por la superficie poliédrica convexa y sus puntos interiores.

Las caras, vértices y aristas de la superficie serán las *caras*, *vértices* y *aristas del poliedro*. La figura formada por las superficies de las caras del poliedro se llamará *contorno* del poliedro.

Los diedros de los semiplanos correspondientes a cada una de las caras serán los *diedros del poliedro*. Se llamará *ángulo sólido del poliedro* al ángulo poliédrico que tiene como vértice algún vértice del poliedro y por aristas los rayos que contienen las aristas del poliedro adyacentes al vértice considerado.

Se llamará *diagonal de un poliedro* el segmento que une dos vértices no situados sobre una misma cara.

Un poliedro tiene a lo menos cuatro caras (*tetraedro*). Los poliedros se denominan según el número de sus caras: 5 *pentaedro*, 6 *exaedro*, 8 *octaedro*, 12, *dodecaedro*, 20 *icosaedro*....

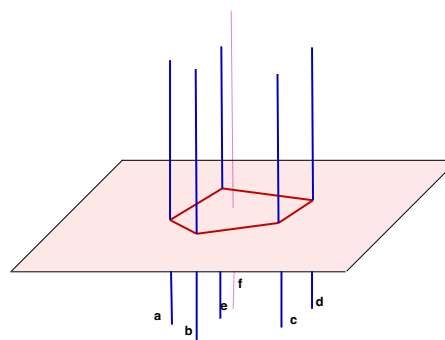
Un poliedro es una parte finita del espacio, en el sentido que no contienen ni rectas ni rayos. Generalmente a esta región del espacio se le da el nombre de *sólido*.

Dos poliedros son *congruentes* si se puede establecer una relación de congruencia entre sus diedros y sus caras correspondientes.

Prismas

Si se considera en el espacio un número n de rectas paralelas ($n \geq 3$), tales que, consideradas en cierto orden, tres de ellas no sean coplanarias, de modo que los planos formados, por dos de ellas consecutivas, se intersequen con los otros de dos en dos.

La figura que forma el trazado de los planos determinados por el dibujo de las rectas consecutivas se llama *superficie prismática indefinida*; los puntos de los n planos y las n rectas son las *caras* y las rectas de intersección de los diferentes planos son las *aristas de la superficie*.



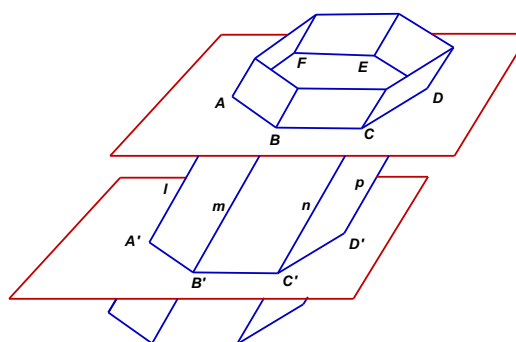
Los puntos del espacio que no pertenecen a la superficie y se encuentran en la misma parte de la superficie prismática respecto al plano de cada una de las caras se llaman puntos *interiores* de la superficie; todos los otros puntos, que no son interiores y no pertenecen a la superficie, son puntos *exteriores*.

Definición: La figura formada por la superficie prismática y por sus puntos interiores se llama *prisma convexo indefinido*.

Las aristas y las caras de la superficie son las *aristas* y *caras* del prisma. Los diedros formados por los semiplanos que contienen dos caras consecutivas son los *diedros del prisma*.

Se denominan los prismas según el número de caras: triangular, cuadrangular, pentagonal....

Todo plano en el espacio que corta a una de las aristas del prisma, corta también a todas las otras y la intersección de dicho plano con el prisma es un polígono que recibe el nombre de *sección* del prisma. Si el plano es perpendicular a una de las aristas, lo será también a las otras; en este caso la sección se llama *sección ortogonal* o *sección normal*.



Teorema. “Las secciones de un prisma indefinido que se forman al construir dos planos paralelos, son polígonos congruentes”.

Definición: La figura formada por la intersección de las secciones paralelas a un prisma infinito y la parte del prisma comprendida entre ellas se llama *prisma finito* o simplemente *prisma*.

Según esta definición, un prisma es un poliedro convexo. Los dos polígonos correspondientes a las secciones del prisma reciben el nombre de *bases* del prisma; los paralelogramos formados en cada una de las caras del prisma reciben el nombre de *caras laterales*. La figura formada por las caras laterales se llama *contorno* del prisma. La suma de las áreas laterales será el *área lateral* y el *área*

total será la suma del área lateral y de las áreas de las bases. Las aristas comprendidas entre las bases se llaman *aristas laterales* y son todas congruentes.

Si las aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases del prisma se dice que éste es *recto*, en caso contrario es *oblicuo*.

Un prisma se dice que es regular si es recto y sus bases son polígonos regulares. En este caso las caras laterales son todas congruentes.

La medida de la distancia entre las bases es la *altura* de un prisma. En el caso de un prisma recto, la altura coincide con las medidas de las aristas laterales ya que las caras laterales son rectangulares.

El prisma recibe el nombre según el número de aristas de las bases que coincide con el número de caras laterales.

Se pueden demostrar fácilmente los siguientes teoremas:

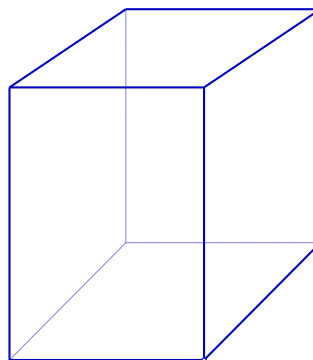
Teorema. “Los contornos de dos prismas rectos, que tienen bases congruentes y alturas congruentes, son congruentes”.

Teorema. “Los contornos de dos prismas que tienen las bases y sus caras respectivamente congruentes son congruentes”.

El Paralelepípedo

El prisma cuyas bases son dos paralelogramos, como también las caras laterales, *es un paralelepípedo*. Un paralelepípedo está limitado por seis paralelogramos. En un paralelepípedo; dos caras son *opuestas* si no tienen algún vértice en común; dos vértices son opuestos si no pertenecen a la misma cara; los triedros que pertenecen a vértices opuestos se dicen que son opuestos.

En un paralelepípedo cada vértice tiene dos vértices opuestos y tiene cuatro diagonales.



En el *Paralelepípedo recto* las aristas son perpendiculares a la base: El *paralelepípedo rectangular* es el paralelepípedo recto que tiene como base un rectángulo.

En un paralelepípedo recto, las medidas de las tres aristas adyacentes a un mismo vértice son sus *dimensiones*.

Si las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son congruentes recibe el nombre de *cubo*, las caras y las bases de un cubo son todas superficies cuadradas equivalentes.

Teorema. “Las caras opuestas de un paralelepípedo son paralelas y equivalentes”.

De este teorema se puede deducir que en un paralelepípedo se puede considerar cada una de sus caras como base.

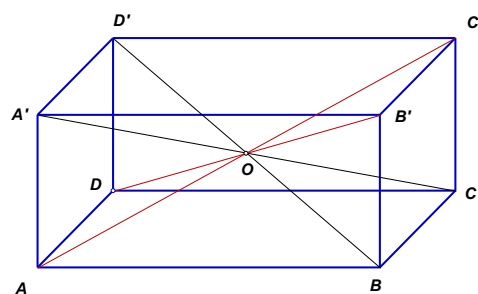
Teorema. “Las diagonales de un paralelepípedo se intersecan en su punto medio”.

Hipótesis $\overline{CA'}$, $\overline{D'B'}$, $\overline{A'D'}$ y $\overline{BC}$ diagonales del paralelepípedo ABCDA'B'C'D'.

Tesis $\overline{CA'} \cap \overline{D'B'} = \{O\}$, punto único.

Demostración

- 1) En el plano determinado por $\overline{A'D'}$ y $\overline{BC}$, $\overline{CA'}$ y $\overline{D'B'}$ son diagonales del $\#A'BCD'$ (lados opuestos $\cong s$ y $\parallel s$).



- 2) Por lo tanto se intersecan en el punto O, que es el punto medio de cada una de ellas (propiedad de los $\#$ s).
- 3) Análogamente se demuestra la propiedad para las diagonales $\overline{AC'}$ y $\overline{DB'}$. (Tesis).

Se puede demostrar fácilmente que cualquier recta que pasa por el punto de intersección O de las diagonales de un paralelepípedo, interseca a dos caras opuestas en puntos que son simétricos con respecto al punto O. El punto O se lo denomina *centro del paralelepípedo*.

A cualquier recta que pase por O se la llamará *recta diametral* y cualquier plano que pase por O será *plano diametral*. En particular, a cualquier plano diametral que pase por dos aristas paralelas del paralelepípedo será un plano *diagonal*.

Cada plano diametral divide al paralelepípedo en dos poliedros congruentes.

Teorema de congruencia. “*Dos paralelepípedos que tienen un triedro congruente formado por aristas congruentes, son congruentes*”.

Corolario: Dos paralelepípedos rectángulos, que tienen respectivamente sus aristas congruentes, son congruentes.

Teorema. “*En un paralelepípedo rectangular las diagonales son congruentes*”.

El teorema recíproco también es válido: “*Si en un paralelepípedo las diagonales son congruentes, el paralelepípedo es rectangular*”.

Las pirámides

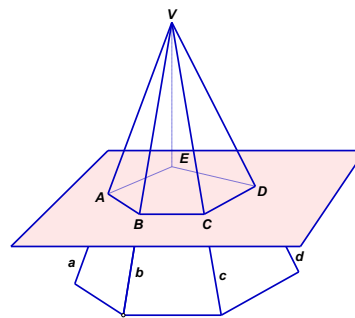
Se considera un plano α que interseca a todas las aristas de un ángulo poliédrico convexo y sin que pase por su vértice O. La figura formada por la intersección del semi espacio, que tiene como origen α y contiene al vértice O, con el ángulo sólido se llama *pirámide*.

Se puede considerar también la siguiente definición, aunque poco precisa:

Si se cortan todas las aristas de un ángulo sólido con un plano que no pase por el vértice, se divide el ángulo sólido en dos partes y la parte que contiene al vértice se llama pirámide.

Una pirámide es un poliedro convexo.

La sección del ángulo sólido con el plano es una región poligonal que recibe el nombre de *base* de la pirámide; el vértice y las aristas del ángulo sólido son *el vértice* y *las aristas* de la pirámide. El vértice opuesto a la base es la *cúspide*. La distancia desde la cúspide al plano de la base se llama *altura* de la pirámide.



El plano de intersección determina sobre las caras del ángulo sólido regiones triangulares, que reciben el nombre de *caras laterales* de la pirámide; la suma de las áreas de las caras laterales y de la base se llama *área total*; la figura formada por las caras laterales y la base se llama *contorno* de la pirámide. Como los prismas, las pirámides reciben el nombre según la forma de su base: *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*...

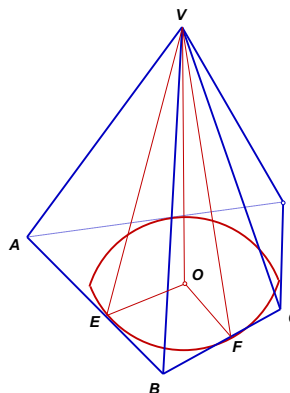
Una pirámide triangular se llama *tetraedro*: tiene 4 vértices, cuatro caras triangulares, cada una de las cuales se puede considerar como base del tetraedro.

Si la base de una pirámide es un polígono circunscrito a una circunferencia, cuyo centro coincide con la proyección de la cúspide sobre el plano basal recibe el nombre de *pirámide recta*.

Teorema. “Si en una pirámide recta se une la cúspide con los puntos de intersección de los lados del polígono basal con la circunferencia inscrita a él, los segmentos formados son las alturas de las caras laterales y son congruentes”.

Demostración.

Sea V-ABCD una pirámide recta. D y E son los puntos de tangencia de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del polígono basal con la circunferencia de centro en O, circunscrita a él. Siendo $\overline{VO}$ perpendicular al plano de la base y $\overline{OE}$ perpendicular a $\overline{AB}$, se tendrá $\overline{VE}$ perpendicular a $\overline{AB}$ (teorema de las tres perpendiculares).



Igualmente, $\overline{OF}$ y $\overline{VF}$ serán perpendiculares a $\overline{AB}$. Los segmentos $\overline{VE}$ y $\overline{VF}$ serán las alturas de los triángulos de las caras laterales ABV y BCV. Además, $\overline{VE}$ y $\overline{VF}$ son congruentes (tienen proyecciones de igual medida desde V al plano de la base). Análogamente se demuestran para las otras alturas de los triángulos de las caras laterales.

La altura común a todas las caras laterales de una pirámide recta se llama *apotema lateral* de la pirámide.

Si una pirámide recta tiene como base un polígono regular se llama *pirámide regular*.

Las aristas laterales de una pirámide regular son congruentes ya que sus proyecciones sobre el plano basal son radios de la circunferencia inscrita que son congruentes. Por lo tanto las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles congruentes.

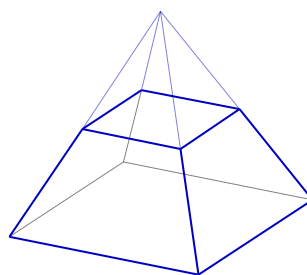
Criterios de equivalencia de las pirámides

1. Dos tetraedros son equivalentes si se pueden hacer corresponder sus vértices de modo que las aristas de uno de ellos son congruentes a las correspondientes del otro.
2. Dos pirámides regulares son equivalentes, cuando tienen la base y altura congruentes.

3. Dos pirámides son equivalentes si tienen sus ángulos sólidos de los vértices equivalentes y sus aristas laterales son respectivamente congruentes.

Si se interseca una pirámide con una sección al plano de la base, que no pase por el vértice, se divide la pirámide en dos partes, una de las cuales es una pirámide y la otra se llama *tronco de pirámide* o *pirámide truncada*.

La base de la pirámide y la sección que determinan el tronco se llaman *bases del tronco de pirámide*. La distancia entre las bases es la *altura* del tronco.



A la pirámide superior correspondiente al tronco de cono, se le llama *pirámide complementaria* del tronco.

Un tronco de pirámide se dice que es *recto* o *regular* si se obtiene de una pirámide regular. En un tronco regular las caras laterales son trapecios isósceles congruentes cuya altura es la *apotema lateral* del tronco.

Teorema. “Si se interseca una pirámide con un plano paralelo al plano de la base:

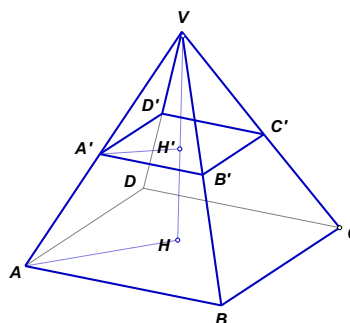
1. la base y la sección son polígonos semejantes.
2. los lados y los perímetros de estos polígonos son proporcionales a la distancia de cada uno de los planos a la cúspide.
3. Las áreas de estas regiones poligonales son proporcionales al cuadrado de dichas distancias.

Hipótesis V-ABCD es una pirámide y A'B'C'D' la sección paralela al plano de la base.

Tesis: $ABCD \approx A'B'C'D'$

Demostración

- 1) $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ (por hipótesis).
- 2) Por lo tanto, $\triangle ABV \approx \triangle A'B'V$ (Teorema de Thales)
- 3) Luego $VA : VA' = AB : A'B' = VB : VB'$ (corolario $\approx$).



- 4) Análogamente, $\triangle VBC \approx \triangle VB'C'$ y $VB : VB' = BC : B'C' = VC : VC'$, etc.
- 4) Por lo tanto, por la propiedad transitiva de la igualdad, se deduce que $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D'$, etc.
- 5) Por otra parte, los ángulos de los dos polígonos de las bases, son respectivamente congruentes, por tener sus lados respectivamente paralelos.
- 6) Luego los polígonos $ABCD \approx A'B'C'D'$, ya que tienen sus ángulos congruentes respectivamente y sus lados correspondientes proporcionales.
- 7) Se construye $\overline{VH} \perp \overline{VH'}$ desde V a los planos de las secciones.
- 8) $H \leftrightarrow$ con A y $H' \leftrightarrow$ con A' y considerando los triángulos VAH y VA'H', se tiene, por semejanza, $VB : VB' = VH : VH'$
- 9) De (3) y (8): se concluye que $AB : A'B' = VH : VH'$.
- 10) Análogamente se hace la demostración para los otros segmentos.

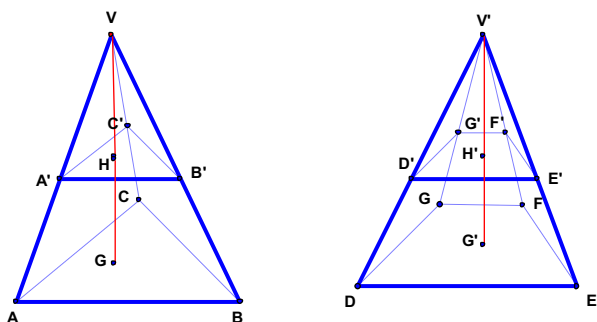
La parte 2) y 3) del teorema se demuestra aplicando las propiedades de los perímetros y áreas de polígonos semejantes en el plano.

- 11) De 9) y 10) Tesis.

Corolario: En un tronco de pirámide, las bases son polígonos semejantes.

Teorema. “Si dos pirámides tienen bases equivalentes y alturas congruentes, las secciones paralelas y equidistantes de las bases, son congruentes.

Hipótesis V-ABC y V'-DEFG pirámides que tienen sus alturas congruentes y sus bases equivalentes. A'B'C' y D'E'F'G' las secciones paralelas a cada una de las respectivas bases y a la misma distancia desde las cúspides.



Demostración

- 1) Sean p , p' , q , q' las áreas de estas secciones.
- 2) Por el teorema anterior, sabemos que: $p : p' = (VH)^2 : (V'H')^2$ y $q : q' = (VG)^2 : (V'G')^2$.
- 3) Pero $\overline{VH} \cong \overline{V'H'}$ y $\overline{VG} \cong \overline{V'G'}$ (por hipótesis).
- 4) Por lo tanto de 2) y 3) $p : p' = q : q'$. Pero por hipótesis, $p = q$; por lo tanto, $p' = q'$ (tesis).

Poliedros regulares

DEFINICIÓN: Un *poliedro* se dice que es *regular* cuando sus caras son polígonos regulares congruentes y sus aristas son respectivamente congruentes.

Observación: se hace notar que por esta definición un prisma y una pirámide regular no son, en general, poliedros regulares., ya que para el prisma y la pirámide la cualidad de ser regular tiene sólo el significado dado en la particular definición de cada uno de los cuerpos.

Del hecho que la suma de las caras de un ángulo sólido convexo es menor de 360° (ángulo de giro), se deduce que existe a lo más cinco especies de poliedros regulares.

Si las caras son triángulos equiláteros, cada cara del ángulo sólido es igual a un tercio de un ángulo extendido, esto es, si por comodidad se miden los ángulos en grados, cada uno mide 60° ; entonces se puede observar que pueden obtenerse tres tipos de cuerpos regulares.: Uno con ángulos triedros ($S = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$), uno con ángulos tetraedros

($S = 4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$) y uno con ángulos pentaedros ($S = 5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$); ninguno con ángulo exaedros por que $5 \cdot 60^\circ = 360^\circ$.

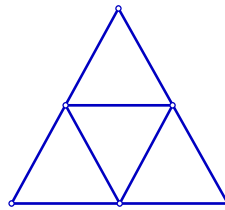
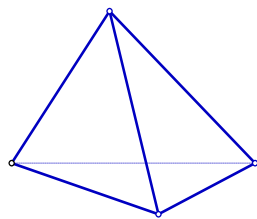
Si las bases son cuadradas, la medida de cada cara es de 90° , entonces puede existir un solo polígono regular compuesto por triedros ($S = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$) además $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$.

Si las bases son pentágonos, la medida de cada cara es 108° y pueden existir solo poliedros regulares con triedros ($S = 3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$); pero para $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$.

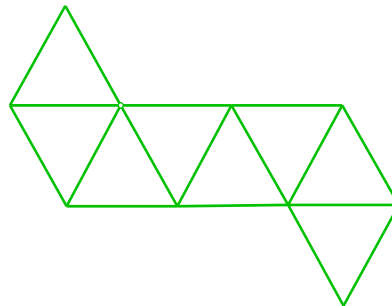
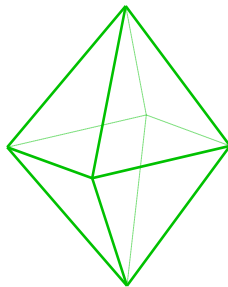
Con esto se demuestra que existe sólo estas categorías de poliedros regulares y se denominan: *tetraedro regular*; *octaedro regular*; *icosaedro regular*; *exaedro regular o cubo*; *dodecaedro regular*.

Diremos simplemente, sin entrar a demostrar, que los poliedros regulares se pueden construir materialmente mediante un *retículo o plantilla*, tal como se presenta a continuación.

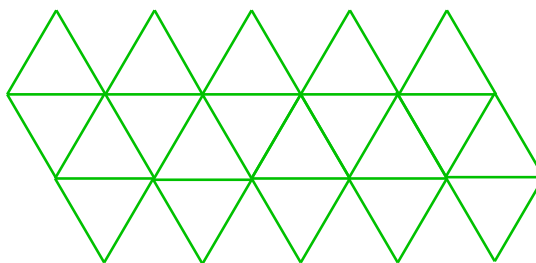
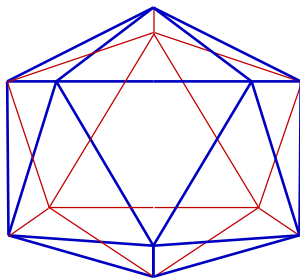
Como las caras de un poliedro son poligonales, si se piensa en intersectar el cuerpo geométrico por una de sus aristas, se obtiene una sucesión de aristas y si se extiende en un plano, se obtiene una figura poligonal que recibe el nombre de *retículo o plantilla* del poliedro.



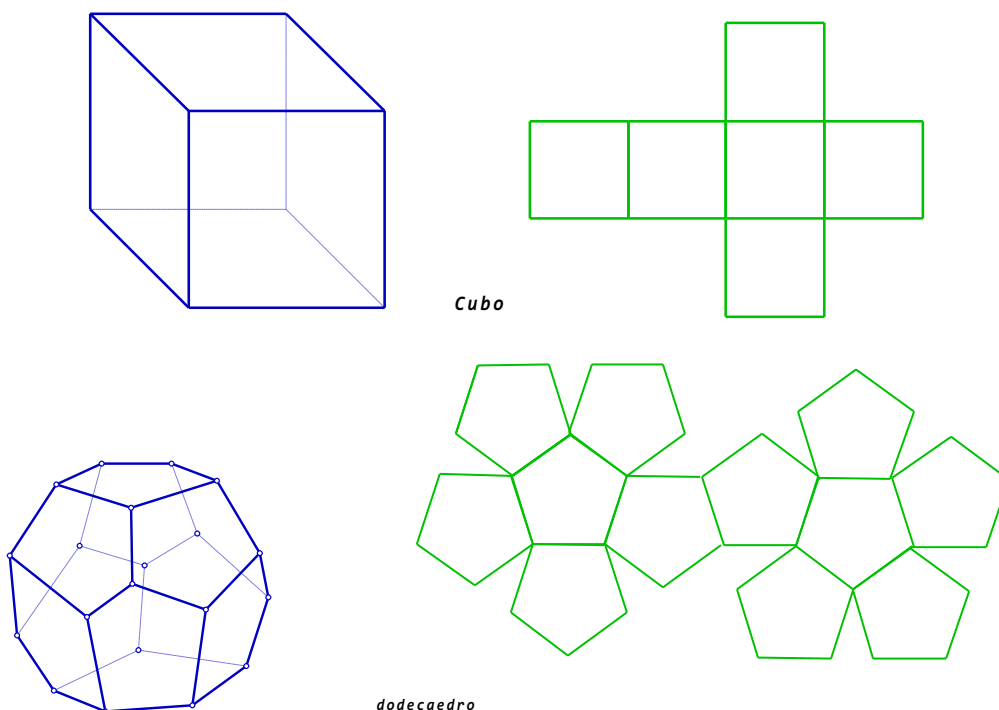
tetraedro



octaedro



ICOSAEDRO



Estas son las características de cada uno de los poliedros regulares.

El *tetraedro regular* tiene 4 cara triangulares, 4 vértices, 6 aristas, 4 ángulos triedros.

El *octaedro regular* tiene por caras 8 triángulos equiláteros, 6 vértices, 12 aristas, 6 ángulos tetraedros.

El *icosaedro regular*, tiene como caras 20 triángulos equiláteros, 12 vértices, 30 aristas, 12 ángulos pentaedros.

El *exaedro regular o cubo* tiene por caras 6 cuadrados, 8 vértices, 12 aristas, 8 ángulos tetraedros.

El *dodecaedro regular* tiene por caras 12 pentágonos regulares, 20 vértices, 30 aristas y 20 ángulos triedros.

Todos los poliedros regulares tienen un punto llamado *centro* que es equidistante de los vértices y de las caras. La distancia desde el centro a los vértices se llama *radio* y la distancia desde una cara al centro es la *apotema del poliedro*.

Los centros de las caras de un poliedro regular son los vértices de otro polígono regular.

De esa manera, del icosaedro se obtiene el dodecaedro y del dodecaedro se obtiene el icosaedro. Por eso reciben el nombre de *poliedros conjugados*. De igual manera, son conjugados el cubo con el octaedro y el tetraedro es el conjugado de sí mismo.

Teorema de Euler. Si se denomina C , V y A respectivamente el número de caras, vértices y aristas de una superficie poliédrica, se cumple la siguiente relación:

$$C + V = A + 2.$$

Para terminar un poco de historia. Desde la época de los egipcios antiguos ya se tenía conocimiento del tetraedro, del exaedro y del octaedro. En tiempo de los pitagóricos se descubrieron las propiedades

de icosaedro y del dodecaedro y relacionaron los poliedros regulares, llamados también *cuerpos platónicos*, con elementos de la naturaleza: al tetraedro con el fuego, al exaedro con la tierra, el octaedro con el aire, el icosaedro con el agua y el dodecaedro con el universo.

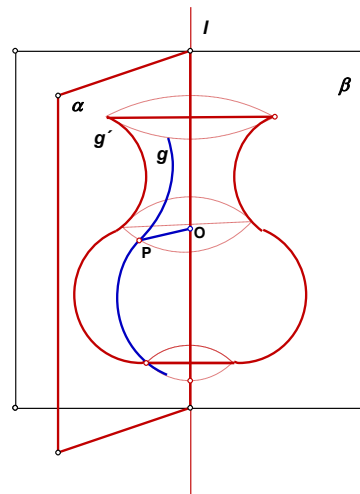
Taller 8-2

1. Un prisma recto tiene por base un hexágono regular de 10cm de lado. Sus caras laterales son cuadradas. Calcule la longitud de las tres diagonales que parten desde uno de sus vértices.
2. Las tres dimensiones de un paralelepípedo recto de base rectangular son entre sí como 2 : 3 : 6. Calcule la longitud de las dimensiones.
3. La arista de un cubo mide $10\sqrt{3}cm$. Determine la medida de su diagonal.
4. Demuestre que si en un paralelepípedo una sección plana interseca a las cuatro aristas paralelas, entonces los puntos de intersección son los vértices de un paralelogramo.
5. Si por dos aristas opuestas de un cubo se hace pasar un plano diagonal, determine la figura formada en la sección y calcule su área si la medida de la arista del cubo es $10\sqrt{2}cm$.
6. Demuestre que en un paralelepípedo los segmentos que unen los puntos medios de dos aristas paralelas situadas en distintas caras, se cortan en un mismo punto, que coincide con el punto de concurrencia de las diagonales.
7. Por los extremos de tres aristas de un cubo que parten desde un mismo vértice A se hace pasar un plano. Demuestre que la sección resultante es un triángulo equilátero y que la diagonal $\overline{AA'}$ es perpendicular al plano de la sección.
Además, determine la posición del punto en que la diagonal interseca a la sección.
8. La medida de la altura de una pirámide recta regular triangular es 8 m. y su arista basal mide $6\sqrt{3}m$. Calcule cuál es la medida de su arista lateral.
9. En una pirámide recta regular triangular la arista basal mide $6\sqrt{3}cm$ y la altura 4 m. Calcule la apotema lateral.
10. La arista basal de una pirámide hexagonal regular mide a cm y su arista lateral mide b cm. Determine el ángulo que forma esta última con la base.
11. Si en los centros de las circunferencias circunscritas a las caras laterales de un tetraedro regular se trazan las rectas perpendiculares a los planos de las caras, demuestre que estas perpendiculares se cortan en un punto equidistante de los vértices de tetraedro.
12. Demuestre que el plano determinado por los puntos medios de tres aristas consecutivas de un cubo que no están situadas en un mismo plano, interseca al cubo según un hexágono regular.
13. Demuestre que la sección de un tetraedro con un plano paralelo a dos aristas opuestas es un paralelogramo.
14. Calcule la longitud de la diagonal de un octaedro regular de arista l.
15. Demuestre que en una pirámide cuadrangular recta la suma de las áreas de dos caras opuestas es igual a la suma de las áreas de las otras dos.

CUERPOS REDONDOS

Superficies de los cuerpos de rotación

Si se considera en un semiplano α limitado por la recta l , una línea cualquiera g y haciendo girar el semiplano en una rotación completa en torno a la recta l , la línea g genera una superficie llamada *superficie de rotación* o *superficie redonda*. La recta l el *eje de rotación* y la línea móvil g es la *generatriz* de la superficie



Sea P un punto cualquiera de g desde el cual se construye $\overline{OP} \perp l$; $\overline{OP}$ permanece perpendicular a l mientras se produce la rotación y el punto P permanece siempre a la misma distancia del eje. Se deduce que cada punto de la generatriz g describe una circunferencia que pertenece a un plano perpendicular al eje de rotación y cuyo centro se encuentra en el eje mismo.

Las circunferencias descritas por estos puntos de g reciben el nombre de *paralelos de la superficie* o *sección normal* de la superficie; se pueden considerar como la intersección de la superficie con el plano perpendicular al eje.

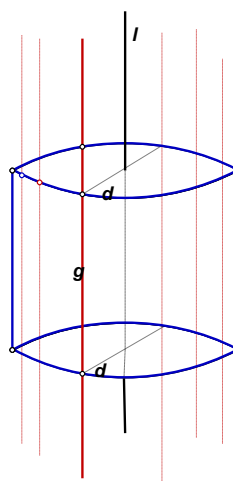
Un plano que pasa por el eje, por ejemplo el plano β de la figura, interseca a la superficie según dos generatrices simétricas con respecto al eje; la figura así formada recibe el nombre de *meridiano de la superficie*.

Si se considera, ahora, una rotación con respecto a una generatriz, de una superficie poligonal S cualquiera (región triangular, cuadrangular...), la figura S genera una figura llamada *sólido de*

rotación o *sólido redondo*. El contorno de la figura S genera una superficie que es el *contorno del sólido de revolución*.

Cilindro

Supongamos, como caso particular, que la generatriz de la superficie sea una recta g paralela al eje de rotación a la distancia d de l . La figura que se forma por la rotación de dicha recta se llama *superficie cilíndrica* de eje l y radio d .



Los puntos de la recta g tienen la misma distancia del eje l que se mantiene constante durante toda la rotación, por eso puede decirse que *la superficie cilíndrica es el lugar geométrico de los puntos del espacio que tienen una distancia constante de una recta dada*.

Los *paralelos* de una superficie cilíndrica son circunferencias congruentes que tienen como radio el radio de la superficie y los *meridianos* son las respectivas rectas en la superficie paralelas al eje.

Los puntos del espacio que están a una distancia menor que el radio con respecto al eje, son los *puntos interiores a la superficie cilíndrica* y los que tienen una distancia mayor son *exteriores*. Es evidente que todos los puntos de una recta paralela al eje que pasa por un punto interno son internos y si pasa por un punto externo, son externos. Análogamente la recta se llamará *interna* o *externa* de la superficie.

Teorema. “Un plano paralelo al eje de una superficie cilíndrica,

1. no tiene punto en común con la superficie si su distancia al eje es mayor que el radio (plano externo);
2. tiene en común los puntos de una generatriz (generatriz de contacto) si su distancia es igual al radio (plano tangente);

3. *tiene en común los puntos de dos generatrices si la distancia es menor que el radio (plano secante).*

Si una recta no es paralela al eje interseca a todas las generatrices.

Cilindro indefinido es la figura formada por una superficie cilíndrica y todos sus puntos interiores cuyo contorno es la superficie. Es una figura o cuerpo sólido.

Otra manera de definir un cilindro indefinido, es considerarlo como el resultado al efectuar una rotación completa de los puntos de una región de un semiplano en torno a una recta l .

La figura formada por la unión de los puntos de la parte del cilindro indefinido intersecado por dos planos α y β perpendiculares al eje y los puntos que pertenecen a las regiones formadas por la intersección de los planos con el cilindro indefinido, es un *cilindro circular recto* o simplemente *cilindro*.

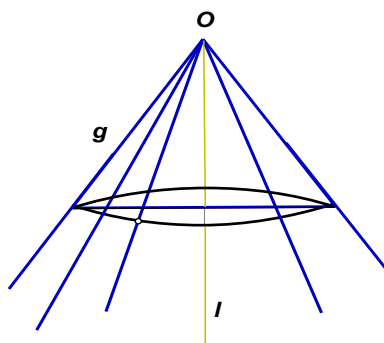
La parte de la superficie cilíndrica que pertenece al cilindro se llama *superficie lateral* o *manto* del cilindro. Cada intersección de los planos con el cilindro indefinido se llama *base* del cilindro. El radio de la base es el *radio* del cilindro. La suma del área lateral de las áreas de las bases es el *área total del cilindro*. La distancia entre las dos bases es la *altura* del cilindro. El segmento de la generatriz comprendido entre las bases se llama *generatriz* del cilindro. El cilindro que tiene su altura de igual medida que su diámetro de la base se llama *cilindro equilátero*, esto es, cuando la sección plana que pasa por el eje es una región cuadrada.

Es evidente que un cilindro puede generarse por la rotación completa de una región rectangular en torno a uno de sus lados.

Cono

La superficie generada por una rotación completa de un rayo g por el punto origen O y con respecto al eje l , se llama *superficie cónica circular*.

El origen O del rayo se llama vértice.



El ángulo que forma cualquier generatriz con el eje recibe el nombre de *ángulo de semi abertura* de la superficie.

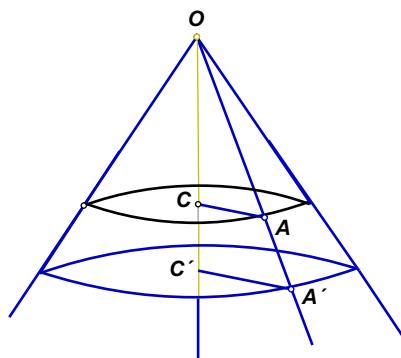
Los *meridianos* de la superficie son los rayos con origen en O que están sobre la superficie.

Teorema. “En una superficie cónica toda sección plan perpendicular al eje se interseca con ella según una circunferencia”.

Los *paralelos* son circunferencias de radio variable según la ley de proporcionalidad que se expresa en el siguiente teorema.

Teorema. “Los radios de los paralelos de una superficie cónica son proporcionales a las distancias de los planos correspondientes al vértice”.

Esto se deduce de inmediato de la semejanza de los triángulos OCA y $OC'A'$ en la figura.



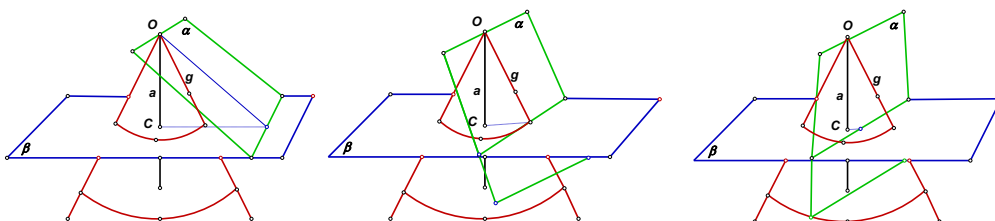
Un punto se dice que *exterior o interior de una superficie cónica* según que sea interior o exterior a todos los ángulos de la superficie, esto es, los ángulos formados por una generatriz y el eje.

Un rayo que tiene su origen en el vértice de una superficie cónica y pasa por un punto interno, todos sus puntos son interiores a dicha superficie y se llama *rayo interior* de la superficie; si pasa por un punto externo, todos sus puntos son externos, con excepción del vértice y se llama *rayo exterior*.

Teorema. “Un plano α que pasa por el vértice de una superficie cónica:

1. tiene con ella en común sólo el vértice, si forma con el eje un ángulo de medida mayor que la del ángulo de semi abertura;
2. Tiene en común los puntos de una generatriz si forma con el eje un ángulo de medida igual que la del ángulo de semi abertura;
3. Tiene en común los puntos de dos generatrices si forma con el eje un ángulo de medida menor que la del ángulo de semi abertura.

Estas situaciones se muestran en las siguientes figuras.



El sólido formado por todos los puntos de una superficie cónica y sus puntos interiores se llama *cono indefinido*, del cual la superficie es su *contorno* o *manto*.

La generación de un cono indefinido puede obtenerse por una rotación completa del interior de un ángulo en torno a uno de sus lados.

Teorema. “Las áreas de las secciones de un cono son proporcionales a los cuadrados de las distancias de éstas al vértice”.

Si se corta un cono indefinido por un plano α perpendicular al eje y que no pase por el vértice V , se da el nombre de *cono circular recto* o simplemente *cono* la figura formada por los puntos que pertenecen simultáneamente a la parte del cono indefinido comprendida entre el círculo formado en el plano y el vértice.

Se puede también dar la siguiente definición: Si se corta un cono indefinido por un plano perpendicular al eje y que no pase por el vértice, se divide el sólido en dos partes y aquella que contiene al vértice se llama *cono*.

La parte de la superficie cónica que pertenece al cono se llama *superficie lateral* o *manto* del cono. La intersección del plano con el cono indefinido se llama *base* del cono. El radio de la base es el *radio* del cono. La suma del área lateral de las áreas de las bases es el *área total del cono*. La distancia entre la base y el vértice es la *altura* del cono. El segmento de la generatriz comprendido entre la base y el vértice se llama *generatriz* del cono. El cono que tiene su altura de igual medida que su diámetro de la base se llama *cono equilátero*, esto es, cuando la sección plana que pasa por el eje es una región triangular equilátera.

Es evidente que un cono puede generarse por la rotación completa de una región triangular rectangular en torno a uno de sus catetos; la hipotenusa del triángulo genera el manto y es la generatriz del cono; la medida de uno de los catetos es el radio del cono y la del otro, la altura.

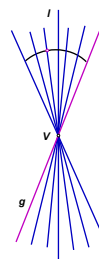
Cortando un cono por un plano paralelo a la base, éste queda dividido en dos partes, una de las cuales es un cono y la otra recibe el nombre de *tronco de cono* o *cono truncado*. Los círculos que forman el tronco de cono son sus *bases* y su *altura* es la medida de la distancia entre las bases.

Se puede obtener un tronco de cono por la rotación completa de un trapecio rectangular en torno al lado perpendicular a las bases. El lado oblicuo genera la *superficie lateral* o *manto* del tronco de cono y se llama *apotema lateral* del tronco. Su superficie total se obtiene sumando su área lateral con las áreas de las bases.

Superficie cónica circular de dos mantos. Secciones cónicas

De las secciones cónicas se interesaron Euclides y Arquímedes, pero considerando la única sección cónica obtenida con un plano perpendicular a la generatriz. El primero que se preocupó de estudiar las secciones de una superficie cónica circular con planos cualesquiera fue Apolonio de Pérgamo (siglo II antes de Cristo). Escribió un tratado sobre las “Secciones cónicas”, una de las obras más importantes de la antigüedad y por eso se le llamó el “geómetra por excelencia”.

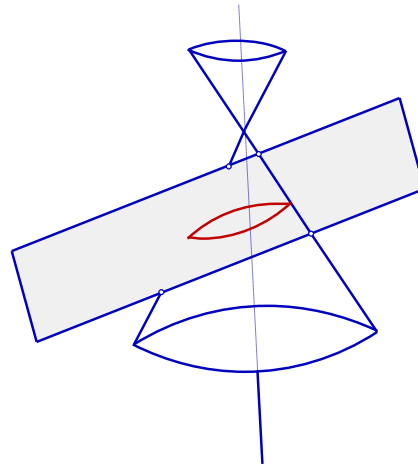
Se llama *superficie cónica circular de dos mantos* a la superficie generada por una recta l que rota entorno a un eje, no perpendicular a ella que pasa por un punto V , llamado *vértice*. Los meridianos de una superficie cónica de dos mantos son rectas que intersecan al eje y a la generatriz en el vértice y los paralelos son circunferencias.



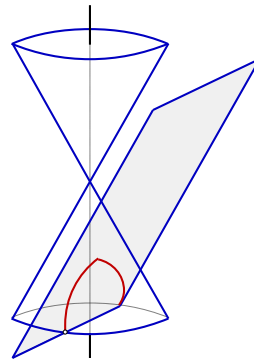
En el caso de la superficie cónica de dos mantos, se cumple el teorema estudiado para las secciones de una superficie cónica con planos que pasan por el vértice. Se considera ahora las secciones con planos que no pasan por el vértice. Las curvas que se obtienen reciben el nombre de *secciones cónicas* o simplemente *cónicas*.

Se pueden considerar tres casos:

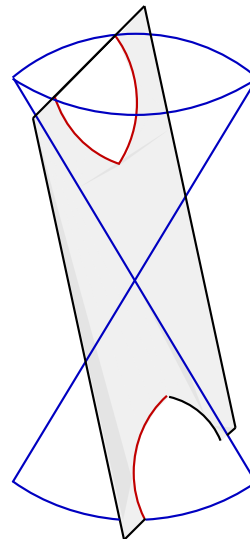
1. Si se corta la superficie cónica de dos mantos, con un plano que forma con el eje un ángulo de mayor medida que el ángulo de semi abertura de la superficie cónica y corta sólo a una de los dos mantos a todas las generatrices, se obtendrá como sección una línea llamada *elipse*, cuyos puntos están a una distancia finita del vértice de la superficie cónica; si el plano trazado es perpendicular al eje, se obtiene la sección obtenida será una circunferencia.



2. Si se corta la superficie cónica de dos mantos, con un plano que forma con el eje un ángulo de igual medida que el ángulo de semi abertura de la superficie cónica y corta sólo a una de los dos mantos a todas las generatrices, menos a dos (una que está sobre el plano y otra paralela al plano), se obtendrá como sección una línea llamada *parábola*, cuyos puntos están a una distancia que puede ser mayor que la medida de cualquier segmento, con respecto al vértice de la superficie cónica.



3. Si se corta la superficie cónica de dos mantos, con un plano que forma con el eje un ángulo de menor medida que el ángulo de semi abertura de la superficie cónica y corta a los dos mantos y a todas las generatrices, menos a dos (que resultará paralelo al plano formado por estas dos generatrices), se obtendrá como sección una línea llamada *hipérbola*, que se compone de dos ramas distintas situadas respectivamente sobre los dos mantos de la superficie y cuyos puntos están a una distancia que puede ser mayor que cualquier segmento, con respecto al vértice de la superficie cónica.

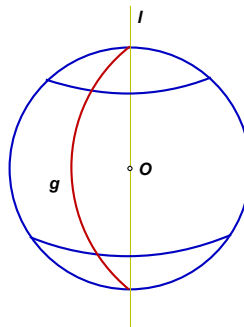


Si el plano de intersección pasa por el vértice, la cónica se degenera en un punto, una recta o dos rectas.

La Esfera

La figura generada al efectuar una rotación completa de una semicircunferencia g en torno de una recta que contiene a uno de sus diámetros se llama *superficie esférica*.

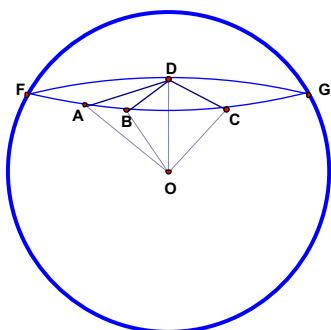
El centro O y el radio r de la semicircunferencia g , son el *centro* y el *radio* de la superficie esférica. El punto O es el centro de simetría de la superficie esférica, ya que todos sus puntos tienen la distancia a igual a r con respecto al punto O . Por lo mismo se puede definir también la superficie esférica de *centro* O y *radio* r , como el *lugar geométrico de los puntos del espacio que están a una distancia constante r desde un punto fijo O* .



Una recta que pasa por el centro de una superficie esférica tiene en común con ella sólo dos puntos formando un segmento cuyo punto medio es dicho centro. Se le da el nombre de *recta diametral*. Los *meridianos* de una superficie esférica son circunferencias que tienen como centro el centro de la superficie.

Todo segmento cuyos extremos son puntos de la superficie se llama *secante* y será un *diámetro* si pasa por el centro. Los puntos extremos de los diámetros se dice que son *diametralmente opuestos* o *antípodos*. La medida de un diámetro es el doble de la medida del radio y todos los diámetros son congruentes.

Teorema “La intersección de una esfera con una sección plana, es un círculo”.



Hipótesis Esfera con centro en el punto O y sección plana FAG .

Tesis Sección FAG es un círculo.

Demostración.

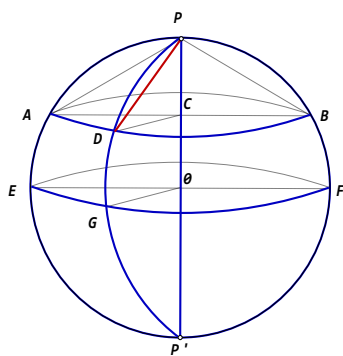
- 1) Se construye $\overline{OC} \perp FAG$ y ABC puntos arbitrarios en la sección.
- 2) Se unen estos puntos con C y O .
- 3) En $\triangle ADO$, $\triangle ABO$ y $\triangle CDO$ se tiene $\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO}$ (radios esfera; $\overline{DO}$ lado común y $\angle ADO \cong \angle BDO \cong \angle CDO$ (90°)).
- 4) Por lo tanto, $\triangle ADO \cong \triangle ABO \cong \triangle CDO$ (LAL).
- 5) Luego $\overline{AD} \cong \overline{BD} \cong \overline{CD}$ (corolario $\cong$).
- 6) Como A , B y C son puntos arbitrarios de FAG , entonces todos equidistan desde el punto D y, por lo tanto, D es el centro de un círculo (Tesis).

Corolarios:

1. La intersección de la recta perpendicular a la sección plana construida desde el centro de una esfera, es el centro del círculo de la sección.
2. El segmento que une el centro de la esfera con el centro del círculo de la sección es perpendicular al plano de la sección.
3. La recta construida perpendicular al plano de la sección en el centro, pasa por el centro de la esfera.

Si se construye un diámetro de una esfera perpendicular a una sección, los extremos del diámetro son *los polos* de la sección plana. En la figura, los puntos P y P' son los polos.

La distancia desde un punto de la superficie esférica a uno de los polos, es la *distancia polar*.



Teorema. “La distancia polar, de los puntos de una sección plana, es constante”.

Hipótesis A, B y D tres puntos cualesquiera de la circunferencia de centro C, P es un polo de la esfera de centro O.

Tesis $PA = PB = PC$.

Demostración

1) Se une el punto C con A, B y D.

2) Los triángulos PCA, PCB y PCD son congruentes (LAL). Por lo tanto, $PA = PB = PD$.

Corolario: Los arcos sobre la superficie esférica, correspondientes a una misma distancia polar, son congruentes. (Corresponden a cuerdas congruentes en circunferencias congruentes).

Un plano que pasa por el centro se llama plano diametral; dos planos diametrales que tienen en común un punto, que es el centro, se cortan según una recta que contiene a un diámetro.

Los puntos del espacio cuyas distancias al centro son menores que el radio son *puntos internos* de la superficie esférica y si son mayores serán *puntos externos*.

Esfera es la figura formada por los puntos de una superficie esférica y por todos sus puntos externos. La superficie será su *contorno* o *manto*.

Se puede considerar que una esfera se genera al efectuar una rotación completa de un semicírculo en torno a la recta que contiene a su diámetro. Los extremos de este diámetro reciben el nombre de *polos* de la superficie.

Teorema. “Un plano diametral interseca a la superficie esférica según una circunferencia, que tiene como centro y radio el centro y el radio de la superficie”.

En efecto, si un plano α pasa por el centro O de la superficie esférica de radio r , los puntos comunes del plano y de la superficie son todos puntos del plano que están a una distancia r del centro O y, por lo tanto, deben estar sobre una circunferencia C (O, r).

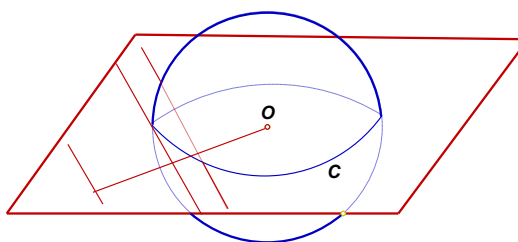
A las circunferencias que cumplen con este teorema, se las llaman *circunferencias máximas*, que son todas congruentes; sus correspondientes círculos son *círculos máximos* que son todos equivalentes.

Posiciones recíprocas de rectas, planos y superficie esférica.

Teorema. “Una recta tiene en común con una superficie esférica dos puntos, uno solo o ninguno, según que la distancia de la recta al centro de la superficie sea menor, igual o mayor que el radio de ella”.

En efecto, si la recta pasa por el centro, habrá dos puntos de intersección.

Si la recta no pasa por el centro, se considera el plano diametral que contiene a la misma recta; tal plano interseca a la esfera según un círculo y es evidente, ya que el teorema es análogo al referente a la intersección de rectas y circunferencias.

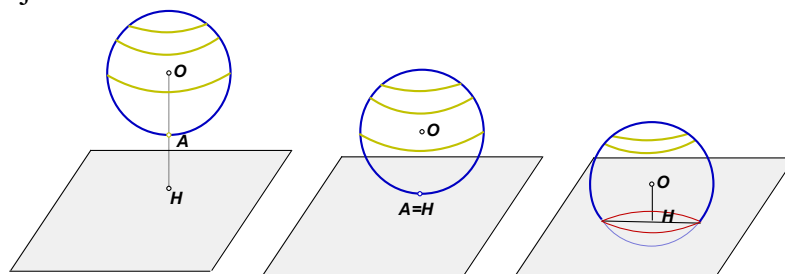


El teorema recíproco también es válido.

Una recta se dice que es *secante*, *tangente* o *externa* a una superficie esférica según corte a la circunferencia en dos, uno o ningún punto. El punto en común de la superficie con la recta tangente se llama *punto de tangencia*.

Teorema. “Un plano no tiene en común ningún punto con una superficie esférica, sólo un punto o una circunferencia según que su distancia al centro de la superficie sea mayor, igual o menor que el radio”.

Sólo se muestra el dibujo.

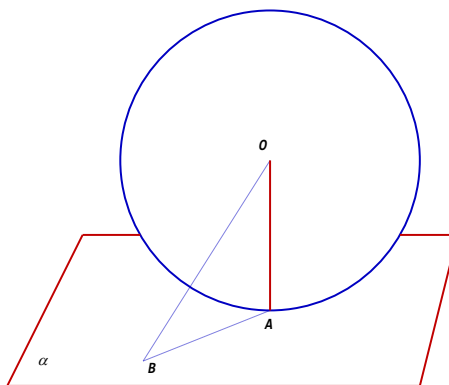


Un plano se dice que es *tangente*, *secante* o *externo* a una superficie esférica según que la corte en un punto, según una circunferencia o en ningún punto. El punto en común de la superficie con el plano tangente se llama *punto de tangencia*. El plano tangente a una superficie esférica es perpendicular al radio que corresponde al punto de tangencia.

Por un punto A de una superficie esférica se pueden construir infinitas tangentes que son perpendiculares al radio OA y pertenecen al plano tangente a la superficie esférica en el punto A.

Teorema. “Todo plano tangente a una esfera, es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia”.

Sea α un plano tangente a la esfera de centro O en el punto A. Siendo A el único punto común de la esfera y el plano, cualquier otro punto B de plano es exterior a la esfera. Por lo tanto $OB > OA$. Luego, $\overline{OA} \perp \alpha$. (La distancia más corta desde un punto a un plano es la del segmento perpendicular).



El teorema recíproco también es válido.

A la recta perpendicular al plano tangente a una esfera en el punto de tangencia, se le da el nombre de *normal a la esfera en un punto*.

El lugar geométrico de todas las rectas tangentes a una esfera en un punto de ella, es el plano tangente a la esfera en el punto.

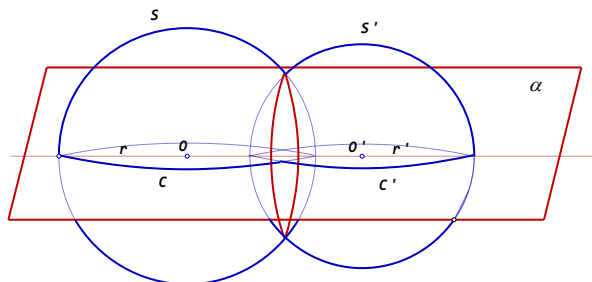
Los *paralelos* de una superficie esférica son circunferencias; cada uno de los planos a los que pertenecen son perpendiculares al eje de la superficie.

El radio de un paralelo puede considerarse el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio de la superficie y el otro cateto es la distancia desde el centro de la superficie al plano del mismo paralelo.

Ecuador es el paralelo correspondiente a un plano diametral.

Posiciones relativas de dos esferas

Sean S y S' dos superficies esféricas, de centros O y O' y radios r y r' ($O \neq O'$ y $r > r'$)
Un plano α que contenga a la recta $\overline{OO'}$ (de los centros) interseca a S y S' según dos circunferencias máximas C y C' .



Las dos superficies se pueden considerar como la figura generada por la rotación en 180° de C y C' en torno al eje $\overline{OO'}$. Se pueden considerar las cinco siguientes situaciones:

1. $OO' > r + r'$; 2. $OO' = r + r'$; 3. $OO' < r + r'$ 4. $r - r' < OO' < r + r'$; 5. $OO' < r - r'$.

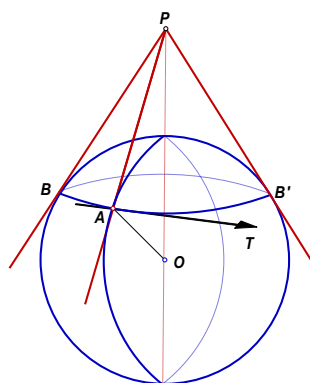
Por lo tanto, las dos superficies esféricas generadas:

- 1º No tendrán ningún punto en común (S y S' son exteriores una de la otra)
- 2º Tienen en común un solo punto (S y S' son tangentes externamente)
- 3º Tienen en común los puntos de una circunferencia (S y S' son secantes)
- 4º Tienen en común un solo punto y otro punto de la superficie esférica de radio menor e interior a la otra (S y S' son tangentes internamente)
- 5º No tienen en común ningún punto y los puntos de la superficie de radio menor son internos de la otra (S' es interior a S)

Figura inscrita y circunscrita a una superficie esférica y a una esfera.

Teorema “Los rayo tangentes construidos desde un punto P exterior a una superficie esférica forman una superficie cónica.

Sea S una superficie esférica de centro O . Desde el punto P se construye un rayo $\overrightarrow{PA}$ tangente a S , siendo A un punto cualquiera S . El plano formado por $\overrightarrow{PA}$ y el punto O , corta a la superficie esférica según un círculo máximo $(O, \overline{OA})$, al cual $\overrightarrow{PA}$ es tangente. En el triángulo rectángulo OPA son constantes las medidas de la hipotenusa $\overline{PO}$ y del cateto $\overline{AO}$.

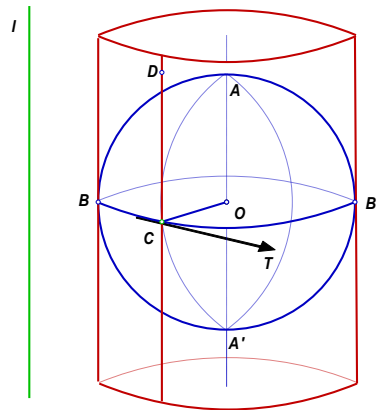


Por lo tanto la medida del $\angle OPA$ es constante, que es el ángulo de semi abertura de la superficie formada. Por lo tanto, la superficie formada es una superficie cónica.

Se dice que la superficie cónica es *circunscrita a la esfera* y la circunferencia BB' se llama *circunferencia de contacto*.

Teorema. “Las rectas paralelas a una recta dada y tangentes a una superficie esférica, forman una superficie cilíndrica; el lugar geométrico de los puntos de tangencia de dichas rectas es una circunferencia máxima cuyo plano es perpendicular a la recta dada”.

Sea l la recta dada y S una superficie esférica de centro O . Se traza $\overline{AA'} // l$, un diámetro de la superficie. Sea C , un punto cualquiera sobre la superficie esférica y $\overline{CD} // l$, tangente a la superficie. El plano determinado por $\overline{AA'}$ y $\overline{CD}$ corta a la superficie según un círculo máximo (O , $\overline{OC}$) al cuál $\overline{CB}$ es tangente. La medida de la distancia de $\overline{OC}$ permanecerá constante. Por lo tanto la figura formada será una superficie cilíndrica.



Se dice que la superficie cilíndrica es *circunscrita a la esfera* y la circunferencia BB' de llama *circunferencia de contacto*.

Una superficie cónica o una superficie cilíndrica se dice que son *circunscritas* a una superficie esférica, cuando sus generatrices son tangentes a dicha superficie. El lugar geométrico de los puntos de tangencia se llama *circunferencia de contacto*.

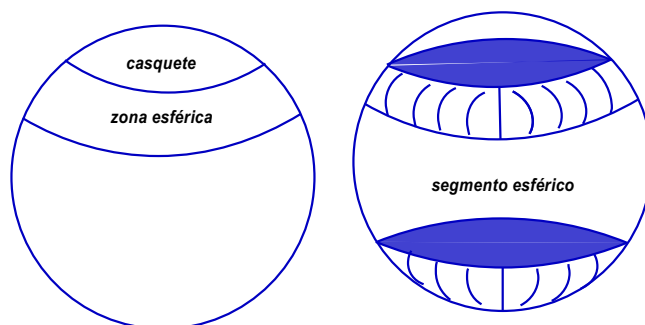
Un cono es *circunscrito* a una superficie esférica o a una esfera, cuando la superficie lateral es circunscrita a ella y el plano de la base es tangente a la misma superficie; y es *inscrito* cuando la circunferencia de la base y el vértice están en la superficie esférica.

Un cilindro (o un tronco de cono) se dice que es *circunscrito* a una superficie esférica, cuando la superficie lateral es circunscrita a ella y los planos de las bases son tangentes a la superficie esférica; y es *inscrito* cuando la circunferencia de las bases están en la superficie.

En general, un poliedro se dice *circunscrito* a una superficie esférica o a una esfera, cuando los planos de sus caras son tangentes a la superficie esférica, en puntos interiores de todas sus caras. Es *inscrito*, cuando sus vértices son puntos de la superficie esférica.

Zona esférica es la parte de la superficie esférica comprendida entre dos planos secantes a la superficie que son paralelos. Las secciones que la determinan, son las *bases* de la zona y la distancia entre ellas, es la *altura* de la zona.

La parte de la esfera comprendida entre dos planos secantes paralelos se llama *segmento esférico* de dos bases. Un segmento esférico es limitado por una zona esférica y por dos círculos.



Cada una de las partes en que una superficie esférica queda dividida por un plano secante, se llama *casquete esférico* y, la parte de la esfera correspondiente al casquete, es un *segmento esférico de una base*. Se puede considerar el casquete como una zona, en la cual, uno de los planos que lo limita es tangente a la esfera.

El diámetro de la esfera, perpendicular al plano de las bases de una zona o al plano de la base de un casquete, es el *eje* de la zona o del casquete. *Altura* del casquete es la distancia desde el punto en que su eje corta al casquete al plano de su base.

Una superficie esférica puede considerarse como una zona que tiene como altura su diámetro.

Una zona esférica puede generarse por la rotación de un arco de un círculo máximo, alrededor de uno de los diámetros.

Sector esférico es la parte de la esfera generada por la rotación completa de un sector circular en torno a uno de sus diámetros que esté en el plano del sector, pero que no lo atraviese. Se puede considerar como un cono cuyo vértice se encuentra en el centro de la esfera y su base es una parte de la superficie esférica correspondiente a una circunferencia de una sección plana.

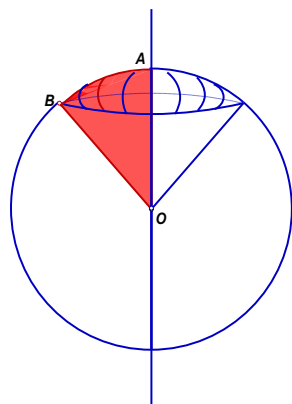


fig. 1

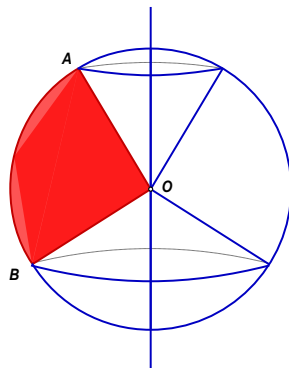


fig. 2

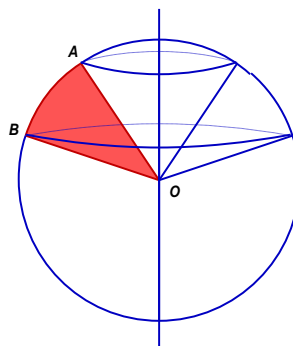
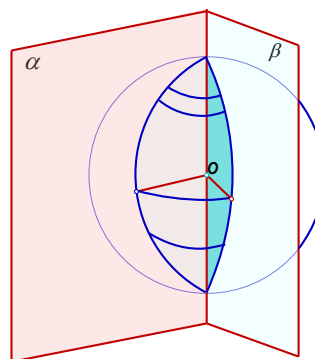


fig. 3

Si la rotación se genera en torno a uno de los radios que limita al sector circular, el sector esférico está limitado por un casquete esférico (base del sector esférico) y por la superficie lateral de un cono (figura 1). En el caso que el eje de la rotación no contiene a uno de los radios que limita al sector circular, el sector esférico está limitado por una zona esférica (base del sector esférico) y por una superficie cónica cuyo vértice está en el centro de la esfera (figuras 2 y 3).

Huso esférico es la parte de la superficie esférica limitada por dos semi planos que pasan por un mismo diámetro. El ángulo diedro de estos semiplanos es el *diedro o ángulo del huso*.

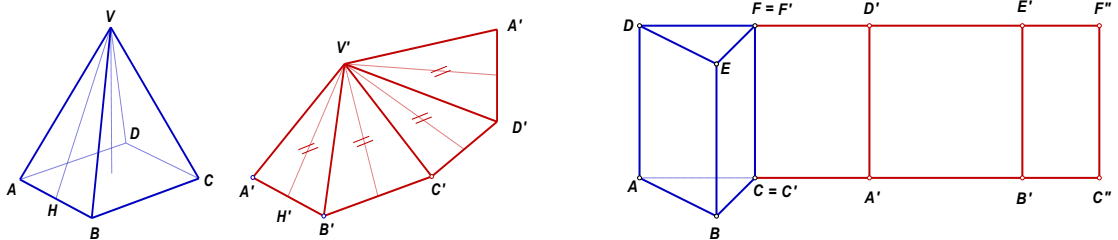
Las semicircunferencias que se forman al intersectar la superficie esférica con los semiplanos que determinan el huso son los *lados del huso* y forman su contorno. Considerando como eje de una superficie esférica el diámetro común a los semiplanos que determinan al huso, el arco intersecado por los lados del huso sobre el ecuador es el *arco ecuatorial del huso*.



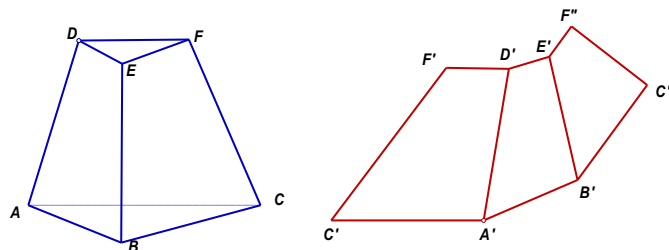
Se llama *inglete o cuña esférica* la parte de la esfera limitada por un huso y los dos semicírculos máximos correspondientes a sus lados. El radio correspondiente a la esfera a la que pertenece el huso o el inglete, es el *radio* de ellos.

Husos (ingletes) *congruentes* en una superficie esférica, son aquellos cuyos ángulos lineales son de igual medida. También se puede considerar las desigualdades y operaciones teniendo en cuenta las medidas de ángulos de los husos o ingletes.

Sean estos polígonos, cuyas áreas son la suma de las caras laterales, de una pirámide recta o de un prisma o de un tronco de pirámide, obtenidos como se muestra en los dibujos siguientes. Los polígonos resultantes reciben el nombre de *retículo o plantilla* de la superficie lateral de cada uno de



los cuerpos.



De la observación de cada uno de estos retículos, se pueden enunciar los siguientes teoremas:

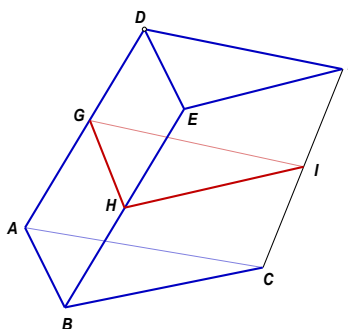
“1. La superficie lateral de una pirámide recta es equivalente a un triángulo que tiene como base el perímetro de la base y como altura la apotema lateral de la pirámide.”

2. La superficie lateral de un prisma recto es equivalente al rectángulo que tiene como medidas de sus lados el perímetro basal y la altura del prisma.

3. La superficie lateral de un tronco de pirámide recto es equivalente a la de un trapecio que tiene como bases los perímetros de cada una de las bases y como altura la apotema del tronco”.

Teorema. “La superficie lateral de un prisma oblicuo es equivalente al rectángulo construido sobre el perímetro de una sección normal del prisma y sobre una arista lateral”.

Sea GHI una sección normal del prisma, obtenida con un plano perpendicular a una de las aristas del prisma ($\overline{HG} \perp \overline{BE}$). El paralelogramo ABED es equivalente al rectángulo que tiene como base la arista $\overline{AD}$ y como altura $\overline{GH}$, lado de la sección normal. Esto, también, se cumple para las otras caras del prisma, ya que sus aristas son congruentes.



Por lo tanto, la suma de las medidas de las superficies de las caras laterales es equivalente al rectángulo construido sobre la suma de las medidas de los lados de la sección y de una arista cualquiera.

Medidas del área de la superficie lateral

Se considera como unidad de medida de área la de un cuadrado construido con la unidad de medida del segmento. Entonces se deducen los siguientes teoremas:

“1. La medida del área de la superficie lateral S_p de un prisma recto es igual al producto de la medida p del perímetro de la base por la medida h de la altura.

$$S_p = p h.$$

2. La medida del área de la superficie lateral S_p de una pirámide recta es igual al semiproducto de la medida p del perímetro de la base por la medida a de la apotema.

$$S_p = \frac{1}{2} p a.$$

3. La medida del área de la superficie lateral S_p de un tronco pirámide recta es igual al semiproducto de la medida $p + p'$ de los perímetros de las bases por la medida a de la apotema.

$$S_p = \frac{1}{2} (p + p') a.$$

Extensión a las áreas laterales de las superficies curvas

Intuitivamente, se puede extender lo analizado anteriormente, al estudio de las superficies de los cuerpos redondos.

Teorema. “La superficie lateral de un cilindro es equivalente a la de un rectángulo que tiene como dimensiones de los lados el perímetro de la circunferencia de la base del cilindro y la medida de su altura”.

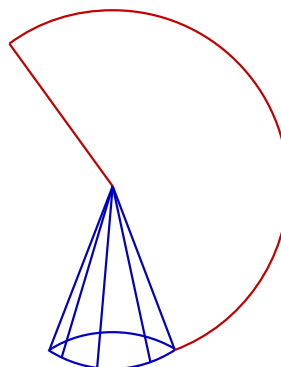
Demostración: Considerando el cilindro como un prisma recto de un número infinito de lados y al cortarlo a través de una generatriz, se obtiene su retículo, el cual es un rectángulo cuyas medidas de los lados son la longitud de la circunferencia basal y de la altura del cilindro.

Generalizando la fórmula del prisma recto, se tendrá la medida de la superficie lateral S_l del cilindro $S_l = 2 \pi r h$, siendo r el radio de su base y h su altura. Su área total será: $S_t = 2 \pi r h + 2 \pi r^2$.



Teorema. “La superficie lateral de un cono (*en función de la generatriz*) es equivalente a un triángulo que tiene como base el perímetro de la circunferencia de la base del cono y como altura su generatriz.

Demostración: Considerando el cono como una pirámide recta de un número infinito de caras y al cortarlo través de una generatriz, se obtiene su retículo, el cual es un triángulo cuya longitud la base es la de la circunferencia basal y la medida de su altura la de la generatriz del cono.



Generalizando la fórmula de la pirámide recta, se tendrá la medida de la superficie lateral S_l del cono: $S_c = \frac{1}{2} 2 \pi r g = \pi r g$, siendo r el radio de su base y g su generatriz. Su área total será: $S_{tc} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r (g + r)$.

Teorema. La medida de la *superficie lateral de un cono (en función de la altura)* es igual al producto de la medida de su altura por el perímetro de la circunferencia que tiene como radio la medida del segmento perpendicular trazado desde el punto medio de la generatriz y comprendido entre ésta y el eje (altura del cono)”.

Hipótesis Cono CAB, de generatriz $CB = g$;
radio basal $OB = r$; O el centro del círculo basal y
 $CO = h$ su altura (eje). $CE = EB$ y $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{CE}$.
 $EF = \rho$.

Tesis: $S_c = 2 \pi r \rho$

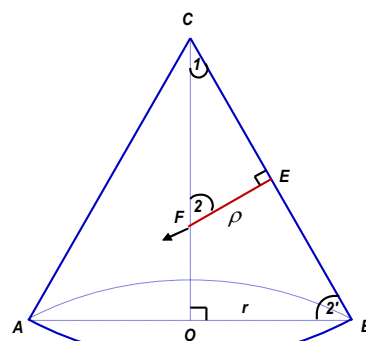
Demostración

1) En los triángulos CFE y CBO se tiene:
 $\angle FCE \cong \angle OBC$ ($\angle$ común); $\angle FEC \cong \angle BOC$ (hipótesis).

3) Luego : $EF : OB = CE : CO$; o sea

$$\rho : r = \frac{1}{2} g : h.$$

4) Por lo tanto $\frac{1}{2} g r = \rho h$.



2) Por lo tanto $\triangle CFE \cong \triangle CBO$ (AAA).

5) Multiplicando por 2π ambos miembros de la igualdad, queda: $2\pi \cdot \frac{1}{2}g r = 2\pi \cdot \rho h$. O sea:

$$\pi \cdot g r = 2\pi \cdot \rho h.$$

6) Pero, según el teorema anterior $\pi \cdot g r = S_C$. Por lo tanto: $S_C = 2\pi r \rho$ (tesis).

Teorema. “La superficie lateral de un tronco de cono (**en función de la generatriz**) es equivalente a un trapecio en el cual las medidas de las bases son los perímetros de las circunferencias basales del tronco por la apotema (generatriz) del mismo”.

Demostración: Considerando el tronco de cono como un tronco de pirámide recta de un número infinito de caras y al cortarlo través de una generatriz, se obtiene su retículo, el cual es un trapecio cuya longitud las bases son las de las circunferencias basales y la medida de su altura la de la apotema (generatriz) del tronco de cono.

Generalizando la fórmula del tronco de pirámide recta, se tendrá la medida de la superficie lateral S_l del tronco de cono, de radios basales r y r' y apotema g :

$S_{TC} = \frac{1}{2}(2\pi r + 2\pi r') \cdot g = \pi(r + r') \cdot g$, siendo r y r' los radios de sus bases y g su apotema (generatriz). Su área total será: $S_t = \pi(r + r') g + \pi r^2 + \pi r'^2$.

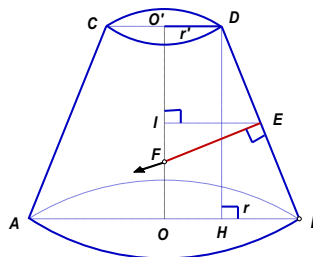
Teorema. “La medida de la superficie lateral de un tronco de cono (**en función de la altura**) es igual al producto de la medida de su altura por el perímetro de la circunferencia que tiene como radio la medida del segmento perpendicular trazado desde el punto medio de la generatriz y comprendido entre ésta y el eje (altura del tronco de cono)”.

Hipótesis: Tronco de cono ABDC, de generatriz

$DB = g$, r y r' los radios basales, O y O' los centros de los círculos basales y $OO' = h$ su

altura (eje). $DE = EB$ y $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DB}$.

$\overline{OO'} \cap \overline{EF} = \{F\}$ y $EF = \rho$.



Tesis: $S_{TC} = 2\pi \rho h$

Demostración

1) Se construyen $\overline{EI} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{DH} \perp \overline{OB}$.

2) Por lo tanto $OI = \frac{r + r'}{2}$ (mediana del trapecio OBDO').

3) En $\triangle EIF$ y $\triangle DHB$ se tiene: $\angle EIF \cong \angle DHB$ ($\angle$ recto); $\angle FEI \cong \angle BDH$ ($\angle$ s de lados respectivamente perpendiculares).

4) Por lo tanto $\triangle EIF$ y $\triangle DHB$ (AAA).

5) Luego: $EI : DH = EF : BD$.

6) Pero $EI = \frac{r + r'}{2}$ (mediana del trapecio)

7) Reemplazando hipótesis y 6) en 5) resulta $\frac{r + r'}{2} : h = \rho : g$.

8) Por lo tanto $\frac{1}{2}g(r + r') = \rho h$.

9) Amplificando 8) por 2π queda: $2\pi \cdot \frac{1}{2}g(r + r') = 2\pi \cdot \rho h$; o sea:

$$\pi \cdot g (r + r') = 2 \pi \cdot \rho h.$$

10) Pero, según el teorema anterior $\pi \cdot g (r + r') = S_{TC}$ y por lo tanto:

$$S_{TC} = 2 \pi \cdot \rho h. \text{ (Tesis)}$$

Teorema. “El área de una superficie esférica es igual al cuádruplo del área de un círculo máximo”.

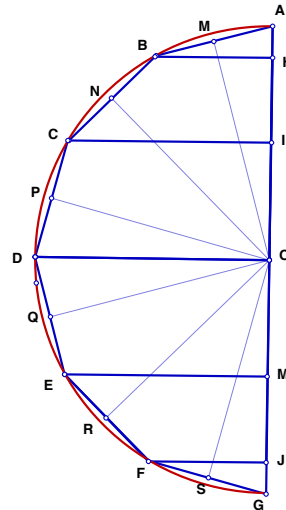
Hipótesis S_e es el área de la superficie esférica de radio r .

Tesis: $S_e = 4 \pi r^2$.

Demostración

1) ABCDEFG es una línea poligonal regular inscrita en una semicircunferencia de radio $AO = OG = r$.

2) Se construyen M, N, P, Q, R, S los puntos medios de los lados del polígono y $OM = ON = \dots$ apotemas del polígono regular.



3) Al hacer girar la línea poligonal en 360° , generará superficies.

3) $\overline{AB}$ generará la superficie de un cono de altura $\overline{AH}$.

4) $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF} \dots$ generarán superficies de troncos de conos de alturas $\overline{HI}, \overline{IO}, \overline{OK}, \overline{KJ}$, respectivamente.

5) $\overline{FG}$ generará una superficie del cono de altura $\overline{JG}$.

6) ρ es la apotema de cada uno de estos cuerpos.

7) La línea poligonal regular generará una superficie de área lateral S , que será la suma de las áreas laterales de todos los conos y troncos de conos formados.

8) Aplicando los teoremas anteriores, se tendrá:

$$S = 2\pi \rho \cdot AH + 2\pi \rho \cdot HI + 2\pi \rho \cdot IO + 2\pi \rho \cdot OK + 2\pi \rho \cdot KJ + 2\pi \rho \cdot JG$$

9) Por lo tanto $S = 2\pi \rho (AH + HI + IO + OK + KJ + JG)$.

10) Si el número de lados del polígono regular se hace infinito, se transforma en una circunferencia de diámetro $\overline{AG}$ y la medida del apotema ρ , se hace igual a r , medida del radio de la circunferencia. La suma del paréntesis de la fórmula resultante es igual a $2r$ (diámetro de la circunferencia). Como resultado, la superficie formada es una superficie esférica cuya superficie mide $S_e = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$ (Tesis).

Corolarios: 1. La medida del área esférica es igual al producto del perímetro de una circunferencia máxima de ella por el diámetro. $S_e = 2\pi r \cdot d$

2. La medida del área esférica es igual al producto de π por el cuadrado de su diámetro. $S_e = \pi \cdot d^2$.

20) La superficie esférica es equivalente a la de un rectángulo del cual uno de sus lados mide el perímetro de una circunferencia máxima y el otro el diámetro de la esfera.

Teorema. “El área de una zona esférica (casquete esférico) es igual al producto de una circunferencia máxima por la altura de la zona (casquete)”.

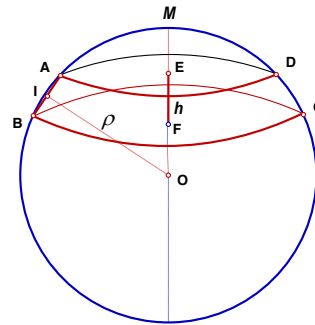
Hipótesis Sea la esfera con centro en el punto O y de radio r.

ABCD zona esférica de altura EF = h y de área S_z .

Tesis: $S_z = 2\pi r \cdot h$

Demostración

- 1) El área lateral del tronco de cono generado por la cuerda $\overline{AB}$ es igual a $2\pi \rho \cdot h$ (teorema).
- 2) Si se considera el arco AB formado por infinitos troncos de conos con , $\rho = r$, el área de la superficie engendrada rotando este arco, S_z , será



la suma de las áreas de los troncos de conos formados.
Por lo tanto $S_z = 2\pi r \cdot h$ (tesis).

Teorema. “El área de un huso esférico, es igual al producto de un círculo máximo de la superficie esférica a la cual pertenece por la razón $\frac{\alpha}{90^\circ}$, siendo α la medida del ángulo rectilíneo correspondiente al huso”.

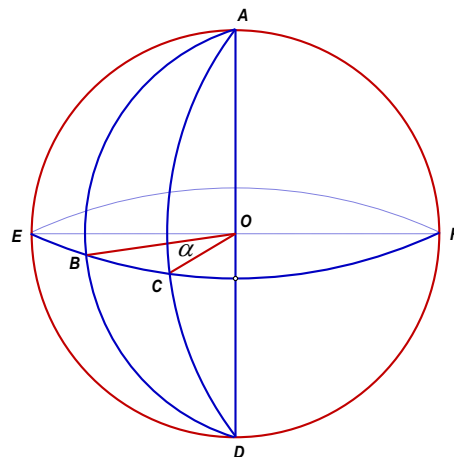
Hipótesis ABDC huso esférico de radio r, α medida de su ángulo rectilíneo y S_h la medida de su área.

Tesis: $S_h = \frac{\pi r^2 \alpha}{90^\circ}$.

Demostración

- 1) Se considera la superficie esférica como un huso completo y la medida de su ángulo rectilíneo es 360° .
- 2) Aplicando las propiedades de las proporciones, se tiene: $S_h : \alpha = S_e : 360^\circ$, siendo S_e el área de la superficie esférica.
- 3) Por el teorema anterior se sabe $S_e = 4\pi \cdot r^2$, siendo r el radio de la esfera. Reemplazando en la proporción queda: $S_h : \alpha = 4\pi \cdot r^2 : 360^\circ$. Por lo tanto, simplificando y despejando queda:

$$S_h = \alpha = 4\pi \cdot r^2 \alpha : 360^\circ = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{90} \text{ (Tesis).}$$



Observación: Si el ángulo α se mide en radianes es $\frac{\pi\alpha}{180}$, por lo tanto la medida del área de un huso esférico será: $2r^2 \alpha$.

Finalmente, si se anota la medida del arco ecuatorial del huso por m , se puede obtener el área del huso con la proporción $S_h : S_e = m : 2\pi r$; entonces, se obtendrá que $S_h = 2rm$. O sea, un huso esférico es equivalente a un rectángulo que tiene por base la medida de su arco ecuatorial y por altura la medida del diámetro de la esfera.

Taller 8-3

1. Dada la arista a de un cubo, determine la medida del área de la sección correspondiente a un plano que pasa por el centro del cubo y es perpendicular a una diagonal (es un hexágono regular).
2. En un paralelepípedo rectangular, la suma de sus aristas es m y sus dimensiones son proporcionales a los números a , b y c . Determine las dimensiones del paralelepípedo y la medida de su área total.
3. Calcule las dimensiones de un paralelepípedo rectangular, sabiendo que están en progresión aritmética. La diagonal mide d y su área total es $2s^2$.
4. Determine la razón en que están las aristas de un tetraedro regular con las de un cubo de superficie equivalente.
5. Una pirámide recta tiene como base un cuadrado cuya diagonal mide a y la arista lateral b . Determine la medida de la superficie total de la pirámide y su altura.
6. Un sólido está constituido por un cubo cuya cara superior es la base de una pirámide. La suma de la arista de cubo equivale al triple de la altura de la pirámide. Determine la medida del área total del sólido.
7. La superficie de un trapecio isósceles mide 1200 cm^2 . Su base mayor son los $7/3$ de la menor y $28/15$ de su altura. Determine la medida del área del cuerpo de revolución obtenido de una revolución completa del trapecio en torno a la base mayor.
8. Un trapecio rectángulo tiene la base menor congruente al lado oblicuo, el ángulo agudo mide 60° y su área mide a^2 . Determine la medida del área del sólido generado al hacer una rotación completa del trapecio en torno al lado perpendicular a las bases.
9. Determine la razón entre el área total de un cono equilátero con la de la esfera inscrita en él.
10. Inscriba en una esfera de radio r un cono de área lateral equivalente a la de un casquete esférico que tenga la altura congruente con la del cono.
11. Un bloque de piedra tiene forma de paralelepípedo recto de 768 cm^2 de área total. Sus dimensiones son proporcionales a los números 3 , 4 y 12 . Encuentre la razón en que están su superficie con la superficie de la esfera que tiene como medida de su diámetro la medida de la diagonal del paralelepípedo.
12. Dos cilindros son el uno inscrito y el otro circunscrito a un prisma triangular regular de 10 cm de arista basal y siendo la medida de la altura del prisma de 30 cm . Calcule la razón entre los volúmenes de los cilindros y la razón entre las áreas de ambos.
13. Determine las medidas del área de la superficie total y del volumen del cilindro y del cono equilátero, circunscritos a una esfera de radio R y, luego, determine la razón entre sus áreas con la de la esfera.

Extensión de los cuerpos sólidos. La relación de equivalencia entre sólidos: Medida de los volúmenes de los sólidos.

Intuitivamente, atribuimos una extensión a los poliedros, conos, cilindros, esferas y también a los elementos que se han analizados de ellos. A estas figuras generalmente, se las llama sólidos. Tales extensiones se denominan *extensión espacial* o simplemente *volumen*.

Dados dos sólidos A y B, y con el recurso del modelo empleado para estudiarlos, se dirá que los sólidos A y B *tienen extensiones iguales* o que los sólidos A y B *son equivalentes* y que los sólidos son de *mayor o menor extensión*.

Definición: La figura formada por todos los puntos comunes de sus contornos de dos o más sólidos dados, es la *suma* de los sólidos.

Considerando estos conceptos, se pueden enunciar los siguientes *axiomas*, análogos a los que sirvieron para caracterizar la equivalencia de la superficie.

1. *Dos sólidos que tienen sus superficies congruentes, son equivalentes (no es válido el recíproco).*
2. *Cada sólido es equivalente a sí mismo (reflexividad).*
3. *Si un sólido es equivalente a otro, éste es equivalente al primero (simetría).*
4. *Dos sólidos equivalentes a un tercero, son equivalentes entre sí (transitividad)*
5. *Dados dos sólidos cualesquiera, el primero puede ser equivalente o mayor o menor que el segundo (tricotomía).*
6. *Sumas de sólidos equivalentes, son equivalentes.*
7. *Cada sólido que es menor que otro está contenido completamente en él (Postulado de Dezolt).*

Según teoremas de la geometría plana, dos polígonos equivalentes (tienen la misma extensión) pueden descomponerse en partes dos a dos equivalentes (*equidescomposición*). Análogamente, el axioma 6, recién enunciado, equivale a decir que *dos sólidos equivalentes pueden equidescomponerse en partes equivalentes*. Generalmente, la propiedad reciproca no es verdadera.

Solamente para el prisma se demostrará que se puede equidescomponer. El matemático Max Dehm (1903) demostró el siguiente teorema: “dos pirámides pueden tener superficies equivalentes sin poder ser descompuestas en partes equivalentes”.

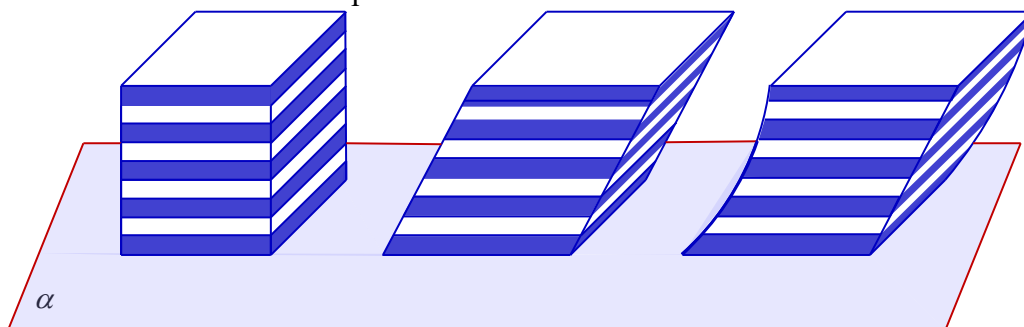
Para estudiar los volúmenes de dos sólidos, esto es, estudiar su equivalencia, se pueden seguir dos caminos.

1. Se puede probar que la equivalencia de los prismas se identifica con la equidescomposición, mientras que para los otros sólidos, se consideran como partes contiguas de un prisma (o sólido obtenido por la suma de prismas) y definir dos sólidos equivalentes cuando se pueden separar en clases contiguas prismáticas.
2. Introducir, además de los axiomas ya enunciados un nuevo axioma, el *Postulado o Principio de Cavalieri*, que permite tratar en forma válida la equivalencia de prismas, pirámides, sólidos de rotación, etc.

Bonventura Cavalieri, nacido en Milán el año 1598 y murió en Bolonia en 1647, Matemático jesuita, que difundió en Italia la teoría de los logaritmos, aplicándola a la trigonometría. Escribió, entre otros, los siguientes tratados: “Geometría de los indivisibles”, “Trigonometría”, “Secciones cónicas”.

Principio de Cavalieri

Se considera un paralelepípedo rectangular, construido por varias “capas” sobrepuestas y paralelas a las bases. Se transforma este paralelepípedo en otro oblicuo y luego en forma intuitiva, en otro con una cara curva, pero manteniendo invariante la base y la altura. Evidentemente se cambia la forma del sólido pero no su extensión.



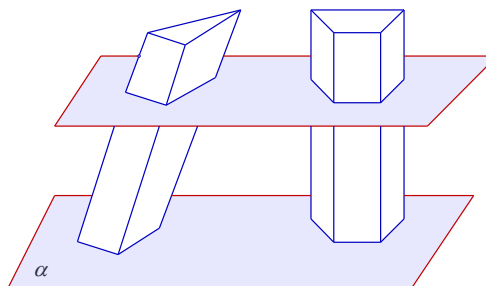
Análogamente se puede efectuar la misma experiencia con otros cuerpos, formados por un número grande de “capas” paralelas a un plano, obteniendo sólidos de diferentes formas pero equivalentes.

Se puede admitir que dos sólidos, se pueden mantener equivalentes, seccionándolos mediante planos paralelos a un plano fijo, resultando las secciones congruentes (secciones equivalentes). Enunciado del *Principio de Cavalieri*: “Si dos sólidos se pueden disponer, respecto a un plano dado, de modo que sus secciones paralelas con respecto a dicho plano sean equivalentes, entonces los dos sólidos son equivalentes”.

Teoremas de equivalencia de los sólidos

Teorema “Los prismas que tienen equivalentes las bases y congruentes las alturas, son equivalentes”.

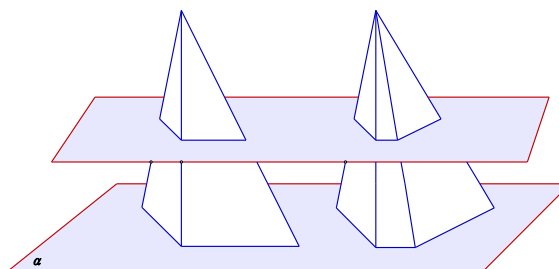
Efectivamente, si se ubican dos prismas de modo que sus bases estén sobre un mismo plano α , las secciones de los planos que corten a los prismas paralelamente a dicho plano son congruentes, ya que por hipótesis, las bases son equivalentes. Por lo tanto, aplicando el Principio de Cavalieri, se tendrá que los prismas son equivalentes.



Corolario: Un prisma es equivalente a un paralelepípedo rectangular de base equivalente e igual altura.

Teorema “Las pirámides que tienen equivalentes sus bases y congruentes sus alturas son equivalentes”.

Se ubican dos pirámides de modo que sus bases estén sobre un mismo plano α , las secciones de los planos que corten a las pirámides paralelamente a dicho plano

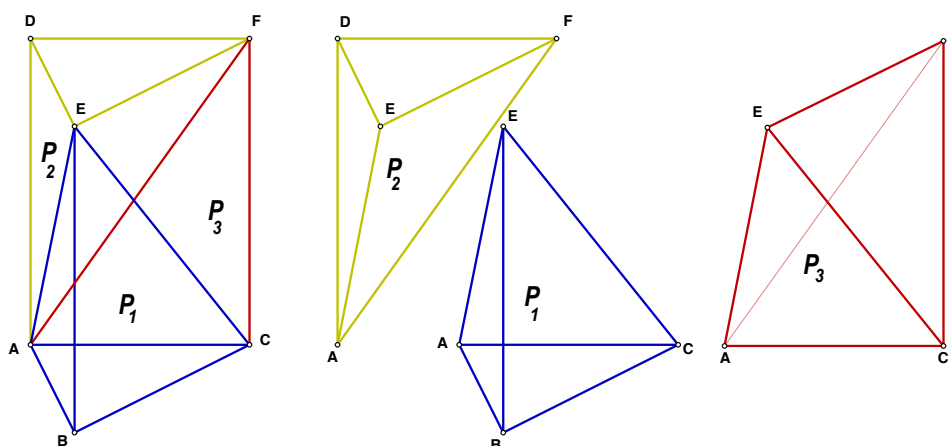


ya que, por hipótesis, las bases son equivalentes. Por lo tanto, aplicando el Principio de Cavalieri, se tendrá que las pirámides son equivalentes.

A continuación un teorema demostrado por Eudoxio de Cnidos, matemático que vivió en el siglo IV antes de C.

Teorema. (de Eudoxio). “*Todo prisma triangular puede dividirse en tres pirámides equivalentes*”

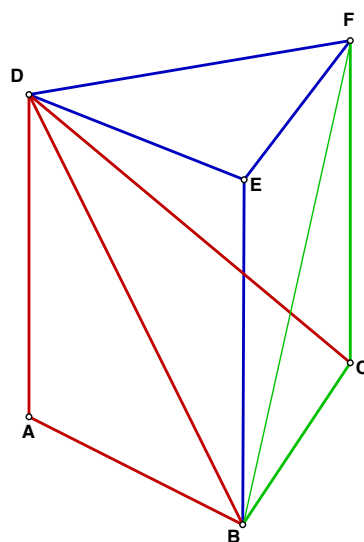
Sea el prisma triangular ABCDEF de la figura. Si se interseca el prisma por el plano formado por el punto E y la arista $\overline{AC}$, el prisma queda dividido en dos pirámides, una triangular E – ABC (P_1) y otra cuadrangular E – ACFD. Esta segunda pirámide, se interseca por el plano formado por el vértice E y la diagonal $\overline{AF}$ de su base, quedando dividida en dos pirámides triangulares E – AFD (P_2) y E – AFC (P_3).



Pero resulta que P_2 y P_3 son equivalentes, ya que tienen sus bases equivalentes (AFD y AFC) y misma altura desde la cúspide E, a estas bases. Pero también P_1 y P_2 también son equivalentes (bases equivalentes, DEF y ABC e igual altura, la del prisma). Aplicando el axioma de transitividad de la equivalencia, resulta la equivalencia $P_1 = P_2 = P_3$.

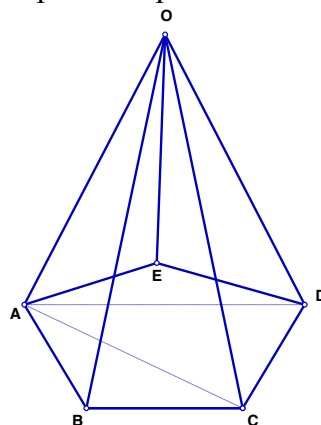
Teorema “*Una pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma de base y altura iguales a las de la pirámide*”.

Consideremos como primer caso una pirámide triangular $V-ABC$. Desde la cúspide V se traza un plano paralelo al plano determinado por la base ABC y desde los vértices B y C rectas paralelas a la arista $\overline{OA}$ que intersectan al plano trazado en los puntos E y D . Se obtiene, de esa manera, un prisma triangular de base ABC y de altura, la misma de la pirámide, que resulta de la pirámide triangular dada y de la pirámide cuadrangular $O-BCDE$. Se considera, ahora, el plano formado por las rectas $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$, que divide a la pirámide cuadrangular en dos pirámides triangulares, una $O-BED$ y la otra $O-BCD$, de bases congruentes (propiedades de los paralelogramos) y de misma altura. Por lo tanto son equivalentes.



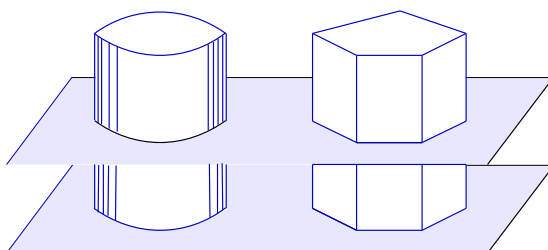
Además, cada uno de estas pirámides triangulares tiene la base congruente y altura igual a la de la pirámide dada. Por lo tanto son equivalentes. El tetraedro $B-OED$ también es equivalente con la pirámide dada (base congruente y altura igual). Por lo tanto el prisma triangular es la suma de tres pirámides equivalente y cada una equivale a la tercera parte del prisma formado.

Ahora, si como segundo caso, se considera una pirámide cualquiera, se puede descomponer en pirámides triangulares de igual altura, al dividir el polígono basal en regiones triangulares trazando las diagonales de la base. Cada una de estas pirámides equivale a la tercera parte de un prisma que tienen igual base e igual altura que la pirámide dada. La suma de ellas equivalen a la tercera parte del la suma de los prismas que forman el prisma dado.



Teorema. “Un cilindro que tienen equivalentes las bases y congruentes sus alturas, son equivalentes.

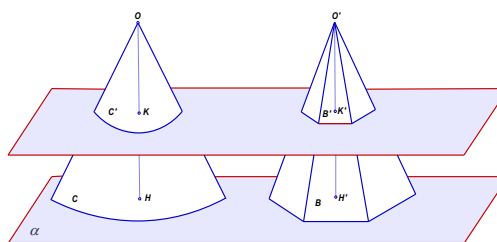
Si ubicamos la base del cilindro y del prisma sobre un mismo plano α y se intersectan con un plano paralelo a α , las secciones resultantes resultan congruentes a sus respectivas bases y, ya que por hipótesis,



las bases son equivalentes, entonces estas secciones son equivalentes entre sí. Aplicando el Principio de Cavalieri, se puede afirmar que los dos sólidos son equivalentes.

Teorema. Un cono y una pirámide que tienen las bases equivalentes y congruentes las alturas, son equivalentes”.

Ubicamos la base del cono y de la pirámide sobre un mismo plano α y se intersectan con un plano paralelo a α , las secciones resultantes resultan congruentes a sus respectivas bases. Sea C el círculo de la base del cono de altura $\overline{OH}$ y B la base de la pirámide de altura $\overline{O'H'}$, siendo congruentes estas alturas.

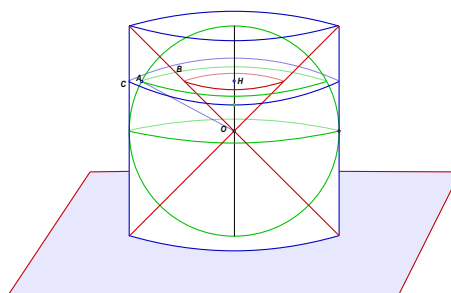


C' y B' las secciones en el plano paralelo α con distancias OH y $O'H'$ desde la respectiva cúspide.

Por teorema anterior, se tiene respectivamente:

$C : C' = (OH)^2 : (OK)^2$ y $B : B' = (O'H')^2 : (O'K')^2$. Además, por hipótesis, se sabe que $\overline{OH} \cong \overline{O'H'}$ y $\overline{OK} \cong \overline{O'K'}$, de lo cual se deduce que $C:C' = B : B'$. Por lo tanto C es equivalente a B y C' es equivalente a B' . Aplicando el Principio de Cavalieri, se puede afirmar que los dos sólidos son equivalentes.

Se estudia, a continuación, una figura que permitirá enunciar una nueva forma de equivalencia. Dada una esfera de centro O , se considera un cilindro equilátero circunscrito a ella y dos conos que tienen su vértice en O y las bases coincidentes con las del cilindro.



El sólido que se obtiene recibe el nombre de anticlesidra. Las bases del cilindro son las bases de ella. Se demuestra que la esfera es equivalente a la anticlesidra.

Para demostrarlo se traza una sección al nuevo sólido mediante un plano cualquiera paralelo a las bases del cilindro. Si este plano pasa por el centro de la esfera, corta a la esfera y a la anticlesidra según un círculo máximo. En caso contrario, tal plano, a la distancia HA del centro de la esfera, la cortará según un radio $\overline{AH}$ y a la anticlesidra, según una corona circular comprendida entre la circunferencia de centro H y radios $\overline{HB}$ y $\overline{HC}$, en que $\overline{HB}$ es el radio de un paralelo del cono y $\overline{HC}$ de un paralelo del cilindro. Se observa que la medida del área del círculo de radio $\overline{AH}$ es $\pi (HA)^2$ y la de la corona $\pi((HC)^2 - (HB)^2)$. Pero, HC coincide con el radio de la esfera (OA) y, por otra parte, el radio de la base del cono es congruente con su altura, esto es $\overline{HB} \cong \overline{HO}$, por lo tanto el área de la corona es $\pi((OA)^2 - (OH)^2)$.

Del triángulo OHA , rectángulo en H , se tiene que $(OA)^2 - (OH)^2 = (HA)^2$. La medida del área de la corona queda $\pi (HA)^2$, la cual es igual a la del círculo de la sección de la esfera y, por lo tanto, el círculo y la corona son equivalentes.

Corolario: *Un segmento esférico, obtenido cortando la esfera de radio r con dos planos paralelos, β y γ , es equivalente a la parte de la anticlesidra, que tiene las bases paralelas a los planos β y γ y comprendida entre estos planos que limitan al segmento.*

Se observa que esta parte de la anticlesidra es la diferencia entre un cilindro de radio r y altura h y la suma (fig. 1) o la diferencia (fig. 2) de dos conos, uno de radio r y altura h_1 y, el otro de radio r y altura h_2 .

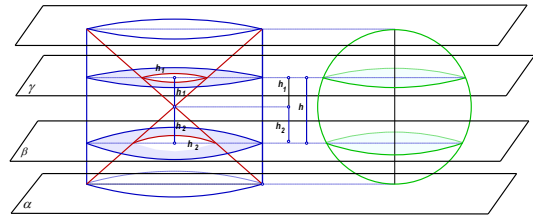


figura 1

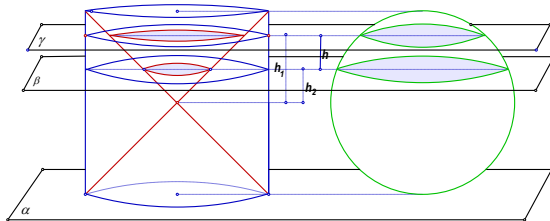


figura 2

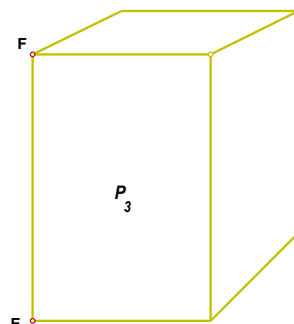
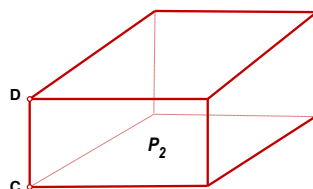
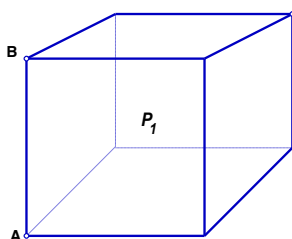
Medida del volumen de los sólidos

Se estudia, a continuación, la medida del volumen de un sólido, simplemente llamada medida de un sólido.

Se considera, primero, una unidad U que corresponde al volumen de un cubo en el cual la medida de su arista es u , que representa la unidad de longitud. En la práctica, dicha unidad es el metro o uno de sus submúltiplos decimales. Si la medida de la arista es de un metro, la unidad será un metro cúbico (1 m^3).

El teorema fundamental de la medida de los volúmenes de los sólidos se refiere a la medida del volumen de un paralelepípedo rectangular, que se enuncia de la manera siguiente: *Los paralelepípedos rectángulos que tienen bases equivalentes son proporcionales a sus respectivas alturas*”.

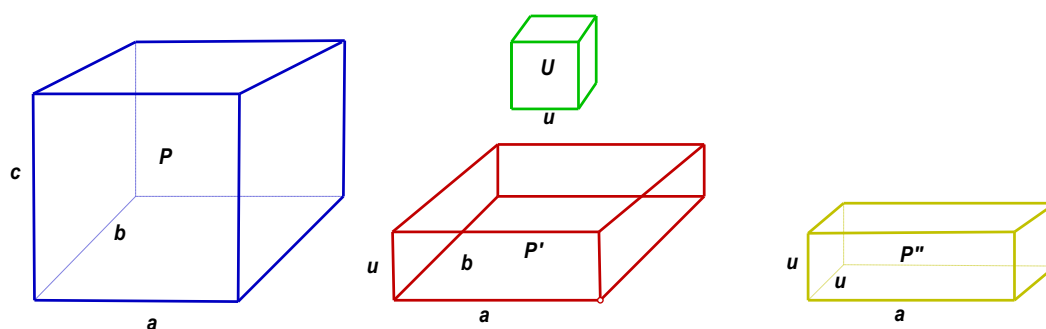
Los paralelepípedos P_1 , P_2 , P_3 ... tienen bases congruentes. Se quiere demostrar que son proporcionales a sus respectivas alturas AB , CD , EF ...



Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces los paralelepípedos P_1 y P_2 resultan congruentes. Supongamos que la altura del paralelepípedo P_3 sea la suma de los otros dos. Por ejemplo, $EF = AB + CD$. Entonces el paralelepípedo P_3 resulta de la suma de dos paralelepípedos congruentes con P_1 y P_2 . Aplicando el criterio general de la proporcionalidad se concluye que los paralelepípedos rectángulos son entre sí como sus respectivas alturas.

Teorema. *La medida del volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto de sus tres dimensiones (medidas de las aristas concurrentes a un mismo vértice)''.*

Sea P un paralelepípedo rectangular de dimensiones a, b, c . Sea U el cubo construido sobre la unidad de medida lineal u . Sean P' y P'' dos paralelepípedos auxiliares, el primero de dimensiones a, b, u y el otro de dimensiones a, u, u .



Por el teorema anterior, dos paralelepípedos que tienen respectivamente dos dimensiones congruentes también, necesariamente, las terceras son congruentes y se tiene:

$$P : P' = c : u ; p' : P'' = b : u ; P'' : U = a : u.$$

Sea m, n, p las medidas de a, b, c con respecto a la unidad u . Por lo tanto se tiene:

$$a : u = m, b : u = n, c : u = p. \text{ De las proporciones precedentes se deduce que}$$

$$P : P' = p, P' : P'' = n, P'' : U = m ; \text{ O sea, } P = p \cdot P' ; p' = n \cdot P'' \text{ y } P'' = m \cdot U \text{ y por lo tanto:}$$

$$P = m \cdot n \cdot p \cdot U.$$

De esta igualdad se deduce que la medida de p es función de U o sea, la medida del volumen de P , es igual a mnp .

Observación. Como el producto $m \cdot n$ representa la medida del área de una cara del paralelepípedo, la cual se puede considerar como base, se puede dar el siguiente enunciado: “*La medida del volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto de la medida del área de la base por la medida de su respectiva altura*”.

Corolario: *La medida del volumen de un cubo es igual a la tercera potencia de la potencia de su arista.*

Teorema. “*La medida del volumen de un prisma es igual al producto de la medida del área de la base por la media de la altura*”.

Se demostró anteriormente que un prisma es equivalente a un paralelepípedo rectangular que tienen sus bases equivalentes y sus alturas iguales y luego, aplicando el teorema anterior, la medida del volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la medida del área de su base por la medida de la altura.

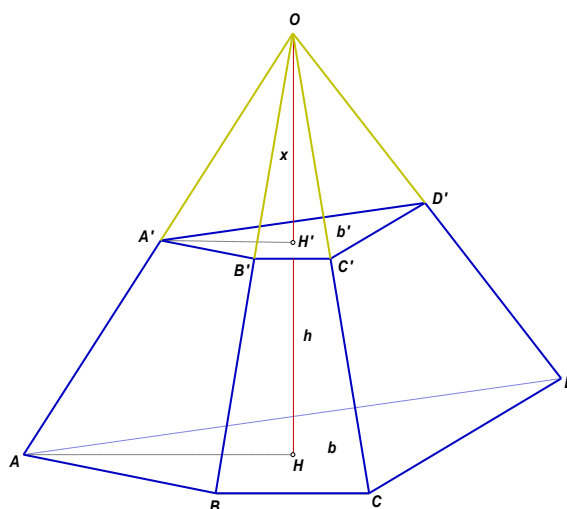
Teorema. “*La medida del volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto de la medida del área de la base por la medida de la altura*”.

Se demostró, anteriormente que una pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma de que tienen bases equivalentes y altura iguales. Luego se deduce lo que se quería demostrar.

Teorema. “La medida del volumen de un tronco de pirámide es igual a un tercio del producto de la medida de su altura por la suma de las medidas de las áreas de las bases y de la media geométrica de ellas”.

Sea O la cúspide de la pirámide a la cual pertenece el tronco de base ABCD, A'B'C'D' y de altura HH'. Sean b y b' las medidas respectivas de las bases, h la medida de la altura y x la medida de $\overline{OH'}$.

Se observa que el volumen del tronco de cono (V_{TC}) es la diferencia entre los volúmenes



Por lo tanto: (I) $V_{TC} = \frac{1}{3}b(h+x) - \frac{1}{3}b'x = \frac{1}{3}x(b-b')$.

Por teorema de la proporcionalidad: $b : b' = (h+x)^2 : x^2$, de lo que se deduce:

$$\sqrt{b} : \sqrt{b'} = (h+x) : x. \text{ Descomponiendo la proporción queda:}$$

$$(\sqrt{b} - \sqrt{b'}) : \sqrt{b} = h : x. \text{ Despejando } x, \text{ se obtiene: } x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{b'}}.$$

Racionalizando: $x = \frac{h\sqrt{b}(\sqrt{b} + \sqrt{b'})}{b - b'} = \frac{h(\sqrt{bb'} + b)}{b - b'}$. Sustituyendo este valor en (I), se tiene $V_{TC} = \frac{1}{3}$

$$bh + \frac{1}{3} \frac{h(\sqrt{bb'} + b')}{b - b'} * (b - b') = \frac{1}{3} h(b + b' + \sqrt{bb'}), \text{ que es la fórmula correspondiente al enunciado del teorema.}$$

La fórmula obtenida se puede descomponer de la siguiente manera:

$$V_{TC} = \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}hb' + \frac{1}{3}h\sqrt{bb'}.$$

Entonces, se puede deducir que el volumen de un tronco de pirámide es equivalente a la suma de los volúmenes de tres pirámides que tiene como altura la altura del tronco y las bases son equivalentes a las del tronco y a su media proporcional.

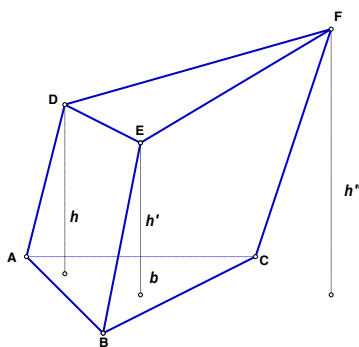
Un tronco de prisma es la parte del prisma comprendida entre una de sus bases y una sección no paralela a dicha base, que corta a todas las aristas laterales.

Teorema. “Un tronco de prisma triangular es equivalente a la suma de tres pirámides que tienen como base común una de las bases del prisma y por vértice los vértices de la otra base”.

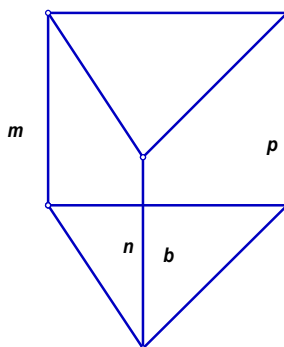
Sea b la medida del área de la base ABC y h , h' y h'' las medidas de las alturas desde los vértices D , E y F respectivamente a la base.

Entonces la medida V del volumen será: $V = b \cdot$

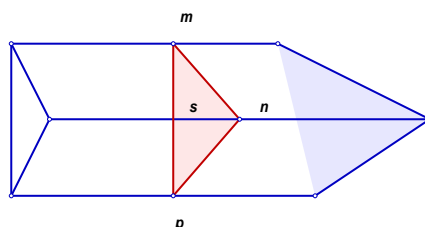
$$\frac{h + h' + h''}{3}.$$



- a) Si el tronco de prisma es recto, h , h' y h'' son las aristas laterales m , n y p ; por lo tanto, $V = b \cdot$



- b) Si es un tronco de prisma oblicuo, una sección S normal a las aristas divide al sólido



prismas rectos y, por lo tanto, sumando los volúmenes obtenidos, se llega a la fórmula

$$V = S \cdot \frac{m + n + p}{3}.$$

La medida de un tronco de prisma triangular es igual al producto de la medida del área de una sección normal por la media aritmética de las medidas de sus tres aristas laterales.

Volumen del cilindro

Se sabe que el volumen de un cilindro es equivalente al de un prisma de base equivalente e igual altura. Por lo tanto se puede enunciar el siguiente teorema:

“La medida del volumen de un cilindro, es igual al producto del área basal por la medida de la altura”.

Sea $V_{cil.}$ la medida del volumen, siendo la medida del radio del cilindro y h la de la altura, se obtiene la siguiente fórmula: $V_{cil.} = \pi r^2 h$.

Volumen de un cono

De manera idéntica, de la medida del volumen de una pirámide se puede enunciar el siguiente teorema: *“La medida del volumen de un cono es igual a un tercio del producto de la medida del área basal por la altura”.*

Sea V_{cono} la medida del volumen, siendo la medida del radio del cono y h la de la altura, se obtiene la siguiente fórmula: $V_{\text{cil.}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Volumen del tronco de cono

Se puede obtener con el mismo procedimiento para determinar el volumen de un tronco de pirámide. Sean r, r' y h las medida del radio de la base mayor, de la base menor y de la altura del tronco y V_{cono} la medida de su volumen. Las medidas de las áreas de las bases son πr^2 y $\pi r'^2$, por lo tanto resulta:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} h(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2}). \text{ Luego } V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi h(r^2 + r'^2 + rr').$$

Volumen de una esfera

Teorema. “La medida del volumen de una esfera es igual a un tercio del producto del radio por la medida de la superficie esférica”.

Sea la esfera de radio r y se considera la superficie esférica dividida en n infinitas partes pequeñas: $b_1, b_2, b_3 \dots b_n$. Sobre cada una de estas partes, consideradas como bases, se construyen pirámides con cúspide común en el punto O , centro de la esfera. En todas estas pirámides la medida de la altura es la del radio r de la esfera.

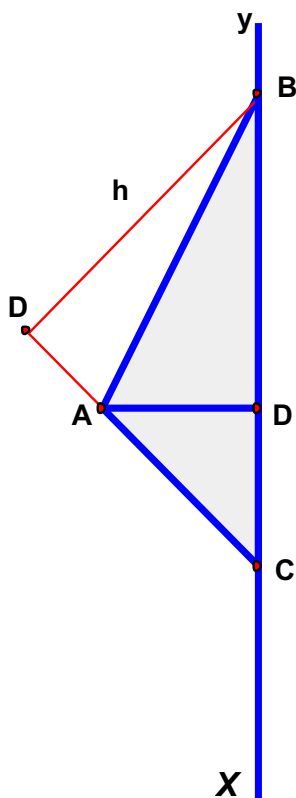
El valor del volumen de cada una de ellas será: $V_i = \frac{1}{3} b_i * r$, con $i = 1, 2, 3 \dots n$. La suma de ellas será:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3} r \sum_{i=1}^n b_i \text{ Pero la sumatoria } \sum_{i=1}^n b_i \text{ corresponde a la medida del área de la superficie esférica total}$$

y por lo tanto: $\sum_{i=1}^n b_i = 4 \pi r^2$: Reemplazando este valor en la fórmula obtenida queda $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$.

A continuación, se demuestra un teorema el cual entrega un procedimiento para determinar las medidas de las superficies y de los volúmenes de los cuerpos engendrados por la rotación de figuras planas en torno a un eje, situado en el mismo plano de las mismas.

Teorema. “La medida del volumen engendrado por la superficie triangular que gira alrededor de un eje, en el cual tiene uno de sus vértices y considerado en el plano correspondiente a la superficie, sin intersecarlo, es igual a un tercio del producto de la medida del área engendada por el lado opuesto al vértice situado sobre el eje, por la medida de la altura correspondiente a dicho lado”.



Sea el triángulo ABC cuya superficie gira alrededor del eje $\overrightarrow{XY}$. Se traza la altura $BH = h$ y $AD = r$, siendo $\overline{AD} \perp \overrightarrow{XY}$.

1^{er} caso. El lado $\overline{BC}$ coincide con el eje $\overrightarrow{XY}$ (figura 1). El volumen engendrado por la superficie triangular es la suma de los volúmenes de dos conos engendrados por los triángulos rectángulos ABD y ACD. Resulta, entonces:

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot BD + \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot CD = \frac{1}{3} \pi r^2 (BD + CD)$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot BC = \frac{1}{3} \pi r \cdot r \cdot BC$$

Pero $r \cdot BC$ es el doble del área del triángulo ABC.

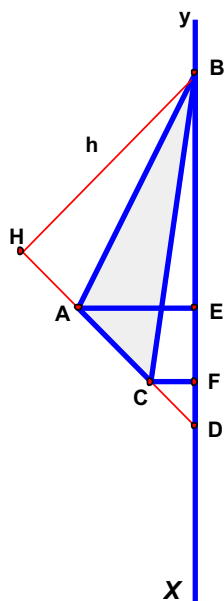
Por lo tanto: $r \cdot BC = AC \cdot h$

Reemplazando, se obtiene $V_{ABC} = \frac{1}{3} \pi r \cdot AC \cdot h$.

Además: $\pi r \cdot AC$ es la medida del área del cono engendrado por el lado $\overline{AC}$.

Luego: $V_{ABC} = \frac{1}{3}$ del área engendada por $\overline{AC} \cdot h$.

2^o caso.



El triángulo ABC tiene sólo un vértice común con el eje (figura 2).

Se traza $\overline{AC}$ tal que interseca a $\overrightarrow{XY}$ en el punto D.

Se tiene: $V_{ABC} = V_{ABD} - V_{CBD}$.

Aplicando el primer caso se obtiene:

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \text{área (AD)} \cdot BH - \frac{1}{3} \text{área (CD)} \cdot BH$$

$$= \frac{1}{3} (\text{área (AD)} - \text{área (CD)}) \cdot BH$$

$$\text{Luego: } V_{ABC} = \frac{1}{3} \text{área (AC)} \cdot BH$$

Observación: En el caso que $\overline{AC} \parallel \overrightarrow{XY}$ (figura 3), se lo considera como un caso límite del caso 2, en el cual el punto D se aleja indefinidamente sobre el eje $\overrightarrow{XY}$.

Teorema. “La medida del volumen engendrado por sector poligonal regular que gira en torno a un diámetro exterior al mismo, es igual a un tercio del producto de de la medida del área que engendra la línea poligonal regular por la medida de la apotema de la misma”.

Sea OABCD un sector poligonal regular que gira alrededor de un eje $\overleftrightarrow{XY}$.

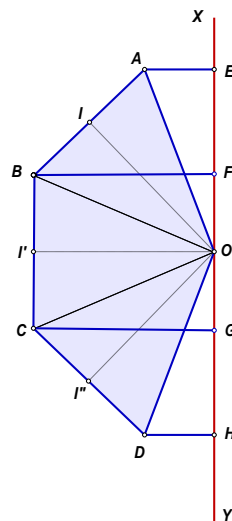
$$V_{AOB} = \frac{1}{3} \text{área}(AB) \cdot OI, \quad V_{BOC} = \frac{1}{3} \text{área}(BC) \cdot OI',$$

$$V_{COD} = \frac{1}{3} \text{área}(CD) \cdot OI''.$$

Pero las medidas de OI, OI' y OI'' son iguales (apotema de un polígono regular).

Por lo tanto,

$$V_{AABCD} = \frac{1}{3} (\text{área}(AB) + \text{área}(BC) + \text{área}(CD)) \cdot OI$$



Teorema. “La medida del volumen de un sector esférico es igual a un tercio del producto de la medida del área de la zona esférica correspondiente, por el radio de la esfera”.

En una esfera de centro O y de radio R, se considera el sector esférico OAB. El sector circular AOB es un sector poligonal de infinito número de lados. Igualmente, el volumen generado por el sector circular OAB, se puede considerar el límite del volumen generado por la línea poligonal de infinitos

lados. Por lo tanto se puede aplicar la fórmula deducida en el teorema anterior: $V_{AOB} = \frac{1}{3} S \cdot \rho$, siendo

S la medida del área generada por la línea poligonal y ρ la apotema del polígono. Pero en el límite considerado, $\rho = r$, radio de la esfera y

$$S = 2\pi rh. \text{ Reemplazando resulta: } V_{AOB} = \frac{1}{3} 2\pi rh \cdot r = \frac{2}{3} \pi r^2 h.$$

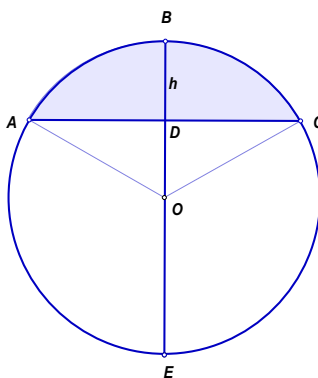
El volumen de la esfera se puede considerar generado por la rotación de un semicírculo en torno a su diámetro. En este caso S es la medida de toda la superficie esférica ($4\pi r^2$) y $h = r$. Luego

$$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ fórmula deducida anteriormente.}$$

Volumen de un segmento esférico

Teorema. “La medida del volumen de un segmento esférico, es equivalente a la diferencia entre las medidas de los volúmenes de un cilindro y de un cono, cuyas alturas miden lo mismo que el radio de la esfera y la altura del segmento, respectivamente; la medida del radio basal, en ambos cuerpos, es igual a la medida de la altura del segmento”.

1. *Segmento esférico de una base.* Sea el segmento esférico ABC, de altura DB = h en una esfera de centro O y radio r. $V_{\text{seg. esf}}$ es la medida del volumen del segmento. $V_{\text{seg. esf}}$ se obtiene de la diferencia entre el Volumen del sector esférico AOB ($\frac{2}{3}\pi r^2 h$) y del cono AOC ($\frac{1}{3}\pi (DA)^2 \cdot OD$).



Pero $(DA)^2 = DB \cdot DE$. O sea, $(DA)^2 = h(2r-h)$. Reemplazando queda:

$$V_{\text{seg. esf}} = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h(2r-h)(r-h). \quad V_{\text{seg. esf}} = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h).$$

Al resolver esta desigualdad se obtiene: $V_{\text{seg. esf}} = r\pi h^2 - \frac{1}{3}h \cdot h^2$.

2. *Segmento esférico de dos bases.* En este caso, la medida del volumen del segmento, se obtiene de la diferencia de las medidas de dos segmentos de una base.

Volumen de un inglete o cuña esférica

Para calcular la medida del volumen de una cuña esférica, basta aplicar, tal como se hizo en el tratamiento del huso esférico, la proporcionalidad de las medidas de volúmenes de cuñas esféricas con respecto a las medidas de sus ángulos diedros, considerando, como caso particular, la esfera entera, como una cuña.

Si $V_{\text{cuña esf}}$ es la medida del volumen y n° la medida del ángulo diedro de la cuña, se tiene la siguiente proporción: $V_{\text{cuña esf}} : V_{\text{esfera}} = n : 360^\circ$. O sea:

$$V_{\text{cuña esf}} : \frac{4}{3}\pi r^3 = n : 360. \quad \text{De donde: } V_{\text{cuña esf}} = \frac{4\pi r^3 n}{3 \cdot 360} = \frac{\pi r^3 n}{270}$$

De la fórmula $V_{\text{cuña esf}} = \frac{4\pi r^3 n}{3 \cdot 360}$ se tiene $V_{\text{cuña esf}} = \frac{4\pi r^3 n}{3 \cdot 360} \cdot \frac{r}{3} = s \cdot \frac{r}{3}$, siendo s la medida del área del huso esférico correspondiente a la cuña.

Se obtiene, por lo tanto, el siguiente enunciado: *La medida del volumen de una cuña esférica se obtiene del producto de la medida del área del huso correspondiente por un tercio de la medida del radio*”.

Semejanza en el espacio

Dos figuras en el espacio se dice que son semejantes, cuando se hace una relación punto a punto entre ellas de modo que la razón de las distancias entre dos puntos correspondientes se mantiene constante. La razón constante se llama *razón de semejanza*. Si esta razón es igual a la unidad, las dos figuras son congruentes.

Se podrían demostrar las siguientes proposiciones: La figura semejante a un segmento, a una recta, a un rayo son, respectivamente, un segmento, una recta, un rayo.

La figura semejante a un semiplano, un plano o a cualquier figura plana son respectivamente un semiplano, un plano y una figura plana. La figura semejante a un diedro y a un ángulo sólido son respectivamente un diedro congruente al dado o un ángulo sólido congruente al dado.

Igualmente se considera la *homotecia directa o inversa en el espacio*. Dos figuras se dice que son *homotéticas* cuando relacionadas punto a punto de modo que dos puntos A y A', con respecto a un punto fijo O, *centro de homotecia*, la razón OA : OA' es constante. Esta razón es la *razón de homotecia*. Si el dibujo de cada uno de los puntos correspondientes se encuentra sobre su semi rayo opuesto, se denomina homotecia inversa.

En figuras homotéticas la razón entre la distancia del dibujo de los puntos correspondientes es constante e igual a la razón de homotecia. De esto se deduce que la homotecia no es más que un caso particular de semejanza.

Teorema. “Si dos figuras son semejantes, cualquiera de ellas es igual a una figura homotética de la otra con respecto a un centro fijado arbitrariamente. Esto significa que, mediante un movimiento oportuno, dos figuras semejantes pueden ser dispuestas en el espacio de modo que lleguen a ser homotéticas”.

Teorema. “El área de dos superficies poliédricas semejantes son proporcionales al cuadrado de dos segmentos homólogos cualesquiera”.

Indicando como $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ las medidas caras del primer poliedro y como $F'_1, F'_2, F'_3 \dots$ las caras homólogas del segundo y como l y l' las medidas de dos segmentos homólogos cualesquiera. Como las caras homólogas son polígonos semejantes, sus áreas son entre sí como el cuadrado de los lados homólogos y, además la razón entre l y l' es constante. Por lo tanto se obtiene la siguiente relación: $F_1 : F'_1 = l^2 : l'^2; F_2 : F'_2 = l^2 : l'^2; F_3 : F'_3 = l^2 : l'^2 \dots$ y, por lo tanto: $F_1 : F'_1 = F_2 : F'_2 = F_3 : F'_3 = \dots$. Componiendo esta serie de razones se tiene: $(F_1 + F_2 + F_3 + \dots) : (F'_1 + F'_2 + F'_3 + \dots) = F_1 : F'_1$. Nominando A y A' las áreas de los dos poliedros y como $F_1 : F'_1 = l^2 : l'^2$, se tiene $A : A' = l^2 : l'^2$.

Por lo tanto se puede deducir que: $A : A' = \left(\frac{l}{l'}\right)^2$.

Otra forma de enunciar el teorema: “La razón entre las medidas de las superficies de dos poliedros semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza”.

Por ejemplo, si se construye un poliedro triplicando las dimensiones lineales de un polígono dado, su área se hace nueve veces mayor.

Este teorema puede aplicarse también a cilindros o conos semejantes.

Si consideramos dos cilindros semejantes en los cuales sus alturas y radios son segmentos correspondientes. Sean r, h, r' y h' las medidas de estos elementos y ρ la razón de semejanza, se tendrá: $r' : r = h' : h = \rho$. Por lo tanto: $r' = \rho r$ y

$h' = \rho h$. Si se denominan A y A' las medidas de las respectivas áreas totales, se tendrá: $A = 2\pi r(r + h)$ y $A' = 2\pi r'(r' + h') = 2\pi \rho r(\rho r + \rho h)$.

$A' = 2\pi r(r + h)\rho^2$. Luego, se deduce: $A' : A = \rho^2 = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$. De manera análoga se procede para la superficie lateral de dos conos semejantes.

Dos esferas son siempre tanto semejantes como nomotéticas y la demostración es análoga a la que se estudió con la circunferencia. Las medidas de las áreas de dos esferas de radios r y r' se expresan como $4\pi r^2$ y $4\pi r'^2$ y su razón será $\left(\frac{r}{r'}\right)^2$, esto es, el cuadrado de su razón de homotecia.

Volviendo, ahora a los volúmenes de los sólidos, se establecerá la razón entre los sólidos semejantes. Si se considera dos prismas semejantes, de alturas h y h' ; B y B' las medidas de las áreas basales y V y V' las medidas de sus respectivos volúmenes, se tiene que

$V = Bh$ y $V' = B'h'$ y, por lo tanto $V : V' = BH : B'h'$. Como las alturas son segmentos homólogos $B : B' = h^2 : h'^2$; luego $V : V' = h^3 : h'^3$. Entonces, *los volúmenes de dos prismas semejantes son entre sí como el cubo de dos segmentos homólogos.*

Análogamente se demuestra que el teorema es verdadero para los volúmenes de dos sólidos semejantes cualesquiera.

En particular, *los volúmenes de dos esferas son entre sí como los cubos de sus respectivos radios.*

Como complemento de lo desarrollado, se presenta un análisis del baricentro de los sólidos y del teorema de Guldino.

Se sabe, por la física que el centro de gravedad o baricentro de un cuerpo es el origen de la resultante de las fuerzas paralelas del peso de las moléculas que forman el cuerpo. Si el cuerpo gira, este centro no cambia y la fuerza peso se mantiene siempre paralela a sí misma. Igualmente se puede considerar el baricentro de una línea o de una superficie considerándolas como un conjunto de puntos homogéneos.

Si una línea, una superficie o un cuerpo tienen centro de simetría, en dicho centro estará situado el baricentro.

Por ejemplo, en un segmento, el baricentro es su punto medio; en una circunferencia y en un círculo su centro; en un paralelogramo, es el punto de intersección de sus diagonales; en un triángulo, el punto de intersección de las transversales medias.

En el caso de los sólidos de formas geométricas simples, se puede demostrar lo siguiente:

El baricentro de un prisma homogéneo es el punto medio del segmento que une los puntos que son baricentro de las bases.

El baricentro de un cilindro homogéneo circular recto es el punto medio del segmento que une los centros de las bases.

El baricentro de un tetraedro homogéneo se encuentra sobre el segmento que une la cúspide con el baricentro de la base y divide, tal segmento, en dos partes de modo que la parte que contiene al vértice es el triple de la otra.

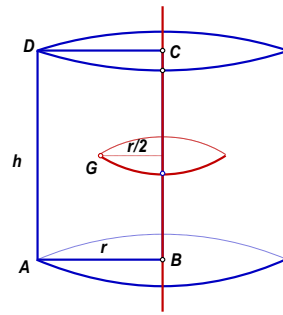
Para complementar el estudio de los cuerpos sólidos, a continuación, se enuncian y verifican dos teoremas que relacionan la superficie y el volumen de los sólidos de revolución con el baricentro de la línea meridiana.

Teorema de Guldino referido a la superficie de rotación

“La medida del área de la superficie de rotación generada por una figura plana mediante un giro completo en torno a una recta en su plano, al cual no atraviesa, está dada por la medida del perímetro de la figura multiplicada por la medida de la longitud de la circunferencia descrita por el baricentro del segmento”.

Con estos dos ejemplos, se verifica el teorema.

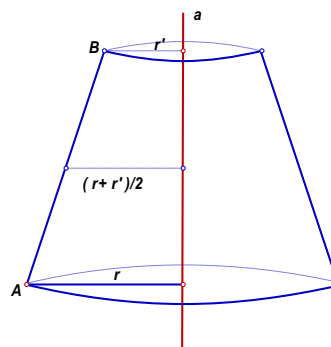
1. La superficie generada por el perímetro de un rectángulo ABCD en el cual $AB = r$ $BC = h$, que efectúa un giro completo con respecto al lado BC. La medida del perímetro del rectángulo es $2(h + r)$; la distancia del Se quiere determinar el área de la baricentro G del rectángulo al eje de



rotación es $\frac{r}{2}$. y la circunferencia descrita por el baricentro mide $2\pi \cdot \frac{r}{2} = \pi r$.

Aplicando el teorema de Guldino, se tiene que la medida S del área de la superficie del cilindro es $S = 2(h + r) \pi r = 2\pi r(h + r)$, que es, efectivamente la fórmula del área total del cilindro.

2. Se quiere determinar el área de la superficie lateral del tronco de cono generado por el segmento AB y cuyos extremos, A y B, están a la distancia r y r' del eje de rotación a. El baricentro G del segmento AB es su punto medio y su distancia al eje a es $\frac{r + r'}{2}$, de modo que



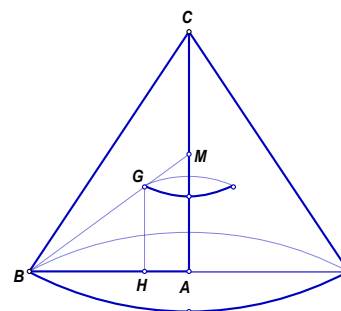
describe una circunferencia de perímetro $2\pi \frac{r + r'}{2}$, esto es, $\pi(r + r')$ y, aplicando el teorema de Guldino se tiene $S = \pi l(r + r')$, siendo l la longitud de $\overline{AB}$, que es la fórmula para el área del tronco de cono de radios r y r' y apotema l.

Teorema de Guldino con respecto al volumen de los sólidos de revolución

“La medida del volumen generado por una superficie plana que gira alrededor de un eje que no la atraviesa se obtiene por el producto de la medida de la superficie por la medida de la longitud de la circunferencia descrita por el baricentro”.

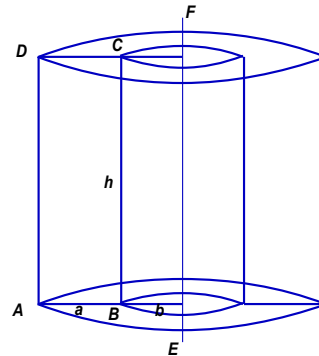
Se verifica el teorema con los siguientes ejemplos:

1. Se desea determinar el volumen del cono generado por la rotación completa de la región del triángulo ABC en torno al cateto $\overline{AC}$, dados $AB = r$ y $AC = h$ y el baricentro G. La medida del área del triángulo es $\frac{rh}{2}$.



Si se traza $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$, se obtiene que $HA = \frac{r}{3}$ y, por lo tanto la circunferencia descrita por el baricentro mide $2\pi \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\pi r$ y, aplicando el teorema de Guldino, la medida V del volumen del cono será: $V = \frac{rh}{2} \cdot \frac{2}{3}\pi r = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ que es la fórmula del volumen del cono.

Se desea determinar el volumen generado de la región del rectángulo ABCD de base AB = b y altura CB = h por una rotación completa en torno a la recta $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ a la distancia a desde el segmento. El sólido formado es la diferencia de dos cilindros de radios b + a, a y de altura h. Por lo tanto, la medida V de su volumen es :



$$V = \pi(b+a)^2 h - \pi a^2 h = \pi b^2 h + 2\pi abh = \pi bh(b+2a).$$

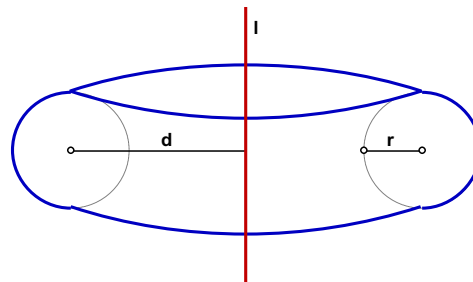
Si aplicamos el teorema de Guldino, se obtiene: área del rectángulo = bh. La medida de la circunferencia descrita por el baricentro distante $\frac{b}{2} + a = \frac{2a+b}{2}$ desde el eje de rotación es $\pi(2a+b)$ y la medida V del volumen del sólido es $V = \pi bh(2a+b)$

Por lo tanto, se verifica el teorema de Guldino

Aplicaciones del teorema de Guldino

Aplicación 1.

Se quiere determinar la superficie y el volumen del cuerpo llamado *toro*, que es el sólido generado por la rotación del círculo de radio r en torno a una recta en su plano y

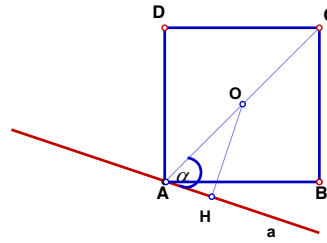


La medida del área de la superficie del anillo es: $S = 2\pi \cdot 2\pi d = 4\pi^2 rd$.

Y la medida de su volumen es: $V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d$.

Aplicación 2.

Se quiere determinar la superficie y el volumen del sólido generado por la rotación del cuadrado ABCD de lado l en torno a una recta l' en su plano y que no lo atraviesa y pasa por uno de los vértice (A).



Sea α el ángulo que la recta l' forma con la diagonal adyacente al vértice A. La distancia OH desde el baricentro (O) al eje de rotación es $\frac{l}{2}\sqrt{2}\sin\alpha$ por lo tanto, la medida S de la superficie generada

por el perímetro del cuadrado será: $S = 4l \cdot 2\pi \frac{l\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = 4\pi l^2 \sqrt{2}\sin\alpha$ y la medida V del volumen

del sólido generado por la región cuadrada será. $V = l^2 \cdot 2\pi \frac{l\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \pi l^3 \sqrt{2}\sin\alpha$. Para $\alpha = 45^\circ$, o sea que la recta l' coincide con un lado del cuadrado, tanto la superficie como el volumen son mínimos. Para $\alpha = 90^\circ$, esto es cuando la diagonal es perpendicular al eje de rotación, tanto la superficie como el volumen son máximos.

Aplicación 3.

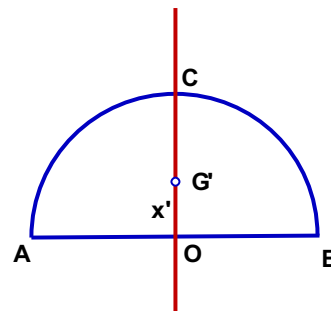
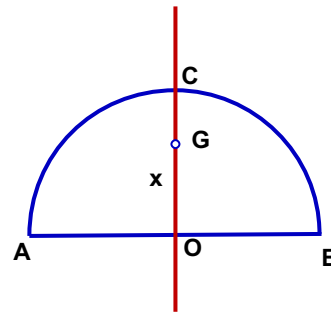
Se desea encontrar el baricentro de una semicircunferencia y de un semicírculo.

Tanto la semicircunferencia como el semicírculo de diámetro $\overline{AB}$ de longitud $2r$, tienen como eje de simetría el diámetro $\overline{OC}$, perpendicular al diámetro $\overline{AB}$, siendo G y G' baricentro de la semicircunferencia y del semicírculo. Haciendo $GO = x$ y $G'O = x'$, por el teorema de Guldino se tiene que la superficie y el volumen, generados al rotar la semicircunferencia y el semicírculo en torno a $\overline{AB}$, miden respectivamente: $S =$

$$4\pi r^2 = \pi \cdot 2\pi x \text{ y } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\pi x'.$$

De esto se deduce que

$$x = \frac{2r}{\pi} = 0.67\pi \text{ y } x' = \frac{4}{3\pi}r = 0.424\pi$$



Taller 8-4

1. Un tronco de prisma recto tiene por base un cuadrado de lado a ; dos aristas tienen por longitud a y las otras $2a$. Determine la medida del volumen y del área total.
2. Un tronco de pirámide de base triangular regular tiene la base inferior de $a \text{ cm}^2$, la de la base superior $b \text{ cm}^2$ y la altura $h \text{ cm}$. Calcule la medida del volumen de la pirámide complementaria.
3. Un prisma recto tiene como base un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 8 cm . Calcule la medida de su volumen sabiendo que su altura mide lo mismo que el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia basal.

4. Un prisma oblicuo tiene por base un rombo cuyo lado mide 10 cm y el ángulo agudo 30° . La arista lateral mide 20 cm y tiene una inclinación de 30° con respecto al plano basal. Determine la medida del volumen del prisma.
5. De un estanque cilíndrico de 8,80m de diámetro salen 2 litros de agua por segundo. ¿En cuánto habrá bajado el nivel del agua después de $\frac{3}{4}$ de hora?
6. Por el punto medio de la generatriz de un cono se hace pasar un plano paralelo a la base. ¿Qué parte del volumen del cono total es el volumen del tronco de cono formado?
7. Calcule la medida del volumen de una esfera inscrita en cubo cuyo volumen es de 216 cm^3 .
8. Calcule la medida del volumen de un cono cuya sección central es un triángulo equilátero de área 12 cm^2
9. Se hace girar un triángulo ABC alrededor del lado AB como eje. Calcule la medida del volumen cuerpo generado por la rotación sabiendo que $AB = 25$ $BC = 20$ y $AC = 15$.
10. Un triángulo equilátero de lado a se hace girar en torno a una recta paralela a uno de los lados que pasa por el vértice opuesto. Determine la medida de su volumen.
11. Calcule la medida del volumen del cuerpo que se obtiene al girar un cuadrado de lado a alrededor de una recta paralela a una de las diagonales y que pasa por uno de los vértices del cuadrado.
12. Calcule la medida del volumen del cuerpo obtenido al rotar un hexágono regular de lado a en torno a uno de sus lados.
13. Calcule la medida del volumen de un octaedro regular inscrito en una esfera de radio R.
14. Demostrar que si un cilindro y un cono son circunscritos a una esfera, el volumen del cilindro es media proporcional geométrica entre los volúmenes de la esfera y del cono.
15. En un cilindro recto cuya altura es de igual medida que su diámetro basal se hallan inscritos una esfera y un cono. Determine la razón que están los volúmenes de los tres cuerpos sólidos. El cono tiene bases equivalentes y alturas congruentes con el cilindro.
16. En un tronco de pirámide cuadrangular regular, la apotema de cada base es respectivamente $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{12}$ de los perímetros basales y la medida de su área total es de 751 cm^2 . Calcule la medida del volumen del tronco.