

Modelo Sintético de la Geometría Euclidiana del espacio

Ronald Manríquez

Universidad de Playa Ancha
ronald.manriquez@upla.cl

Segundo semestre 2023

Definición

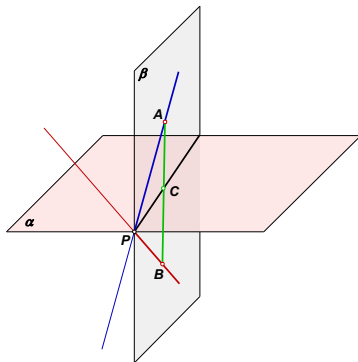
Se llama semiespacio de origen (o de contorno) α , a la figura constituida por los puntos del plano α y de aquellos puntos pertenecientes a una de las regiones determinadas por α .

Observación

- 1 Si un segmento AB tiene en común un solo punto C , (C entre A y B), con un plano α , los puntos A y B pertenecen a semiespacios opuestos con respecto al plano α .
- 2 Si una recta l tiene sólo un punto con un plano α , este punto da origen a dos semirrectas que pertenecen a semiespacios opuestos de α , (este punto se llama punto de intersección del plano y de la recta).

Theorem

Dos planos distintos que tienen en común un punto, tienen también en común una recta que contiene dicho punto.



- 1 Si dos planos tienen en común una recta, dicha recta se llama intersección (arista).

- 1 Si dos planos tienen en común una recta, dicha recta se llama intersección (arista).
- 2 Una recta en el espacio es contenida por infinitos planos. Este conjunto de planos forman un haz de planos. Y la recta es el eje del haz.

- 1 Si dos planos tienen en común una recta, dicha recta se llama intersección (arista).
- 2 Una recta en el espacio es contenida por infinitos planos. Este conjunto de planos forman un haz de planos. Y la recta es el eje del haz.
- 3 De la misma manera el conjunto de planos que contiene un punto se llama estrella de los planos y el punto se llama centro de la estrella.

Theorem

Si una recta es perpendicular a dos rectas que se intersecan, es perpendicular a cualquier otra recta del plano que contiene a ambas rectas y que contenga al punto de intersección.

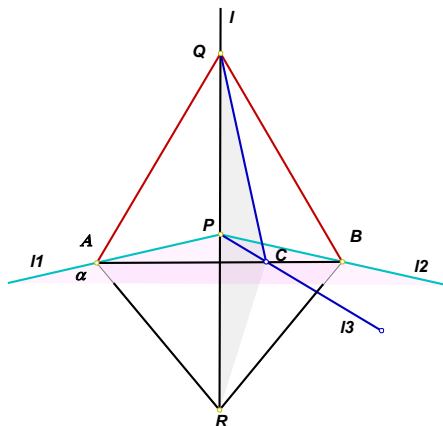


Figura: Representación del Teorema y demostración.

Theorem

El lugar geométrico de las rectas perpendiculares a una recta en un punto de ella, es un plano.

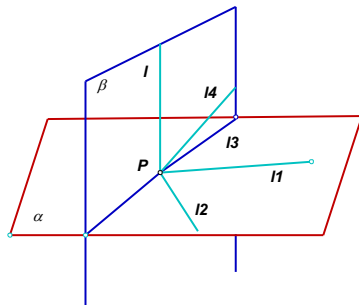


Figura: Representación del Teorema y demostración.

Definición

Una recta y un plano se dice que son perpendiculares cuando la recta intersecta al plano y es perpendicular a cualquier recta del plano que contenga al punto de intersección de ambos.

Definición

Una recta y un plano se dice que son perpendiculares cuando la recta intersecta al plano y es perpendicular a cualquier recta del plano que contenga al punto de intersección de ambos.

Observación

A este punto se le da el nombre de *pie de la perpendicular*.

Theorem (de las tres perpendiculares)

Si por el punto de intersección de una recta l con un plano perpendicular a ella, se construye la recta l_2 perpendicular a otra recta l_1 cualquiera del plano, l_1 resulta perpendicular al plano formado por las rectas l y l_2 .

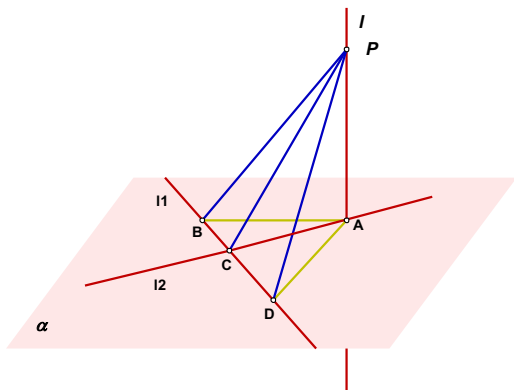
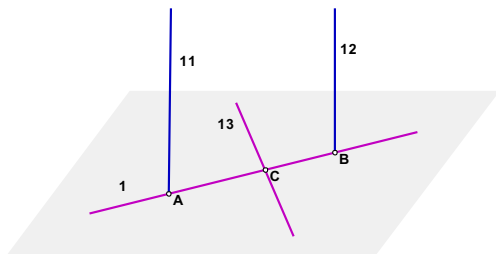


Figura: Representación del Teorema de las 3 perpendiculares

Theorem

Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas



Theorem

Si dos rectas son paralelas, un plano que interseca a una de ella interseca también a la otra.

Theorem

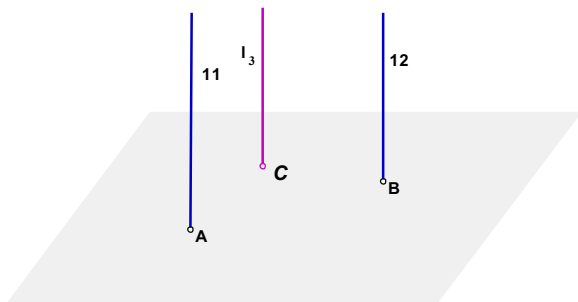
Si dos rectas son paralelas, un plano que interseca a una de ella interseca también a la otra.

Theorem

Si dos rectas son paralelas, un plano que es perpendicular a una de ella lo es también a la otra.

Theorem

Dos rectas paralelas a una tercera recta, son paralelas entre sí



Proyecciones y distancia. Ángulo formado por una recta con un plano

Definición

Se llama proyección de un punto sobre un plano al punto de intersección de la recta perpendicular trazada desde el punto hasta el plano.

Proyecciones y distancia. Ángulo formado por una recta con un plano

Definición

Se llama proyección de un punto sobre un plano al punto de intersección de la recta perpendicular trazada desde el punto hasta el plano.

Definición

Se llamará proyección de una figura sobre un plano la figura constituida por la proyección de cada uno de los puntos de ella sobre el plano.

Theorem

Si desde un punto situado en el exterior de un plano se construyen el segmento perpendicular al plano y varios otros segmentos oblicuos (no perpendiculares), se verifican las siguientes propiedades:

- 1 *La medida del segmento perpendicular es menor que la de cualquier segmento oblicuo. (fig. 1)*
- 2 *Dos segmentos oblicuos que tienen proyecciones congruentes en un mismo plano, son congruentes. (fig. 2)*
- 3 *Dos segmentos que tienen proyecciones desiguales son desiguales y el mayor de ellos es el que tiene la proyección mayor.*

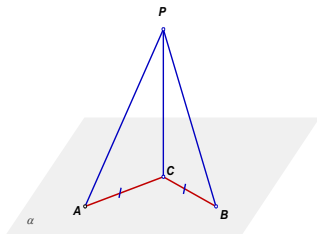


figura 1

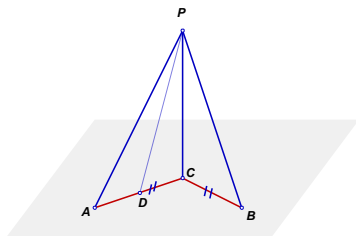


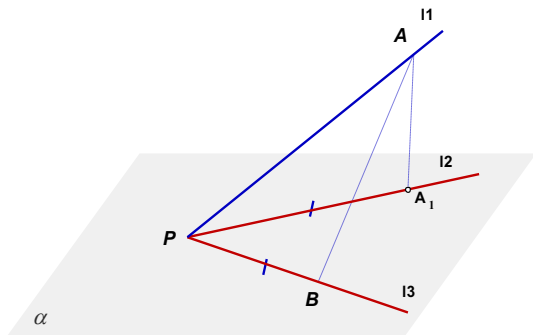
figura 2

Definición

La medida del segmento perpendicular a un plano trazado desde un punto exterior al plano, se llama distancia desde el punto al plano.

Theorem

La medida del ángulo agudo que forma una recta que intersecta a un plano con su proyección en el plano, es menor que la medida de cualquier otro ángulo que forma dicha recta con cualquier otra recta adyacente al plano, en el punto de intersección.

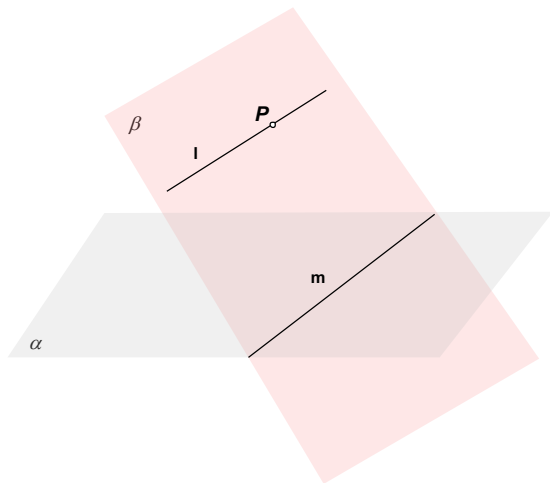


Definición

Una recta y un plano se dicen que son paralelos cuando no tienen ningún punto en común.

Theorem

Si una recta l contiene a un punto exterior de un plano y es paralela a una recta contenida en el plano, entonces l es paralela al plano.

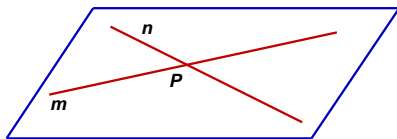


Definición

Dos planos se dicen que son paralelos cuando no tienen ningún punto en común

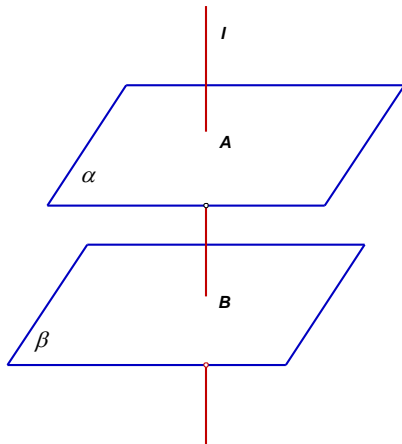
Theorem

Si dos rectas que se intersectan, son paralelas a un plano, el plano que forman estas dos rectas es paralelo al plano dado.



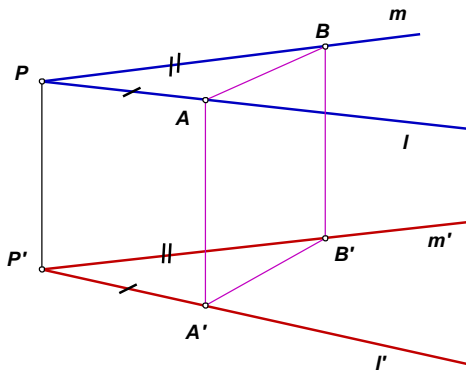
Theorem

Dos planos perpendiculares a una misma recta en puntos distintos, son paralelos.



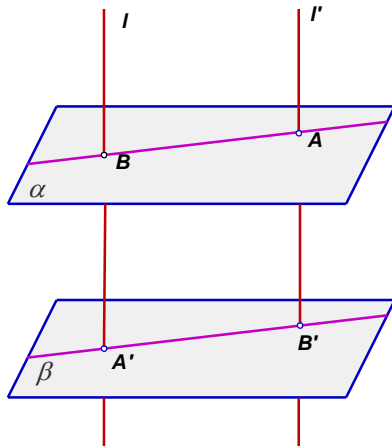
Theorem

Dos ángulos situados en el espacio (no coplanarios), que tienen sus lados respectivamente paralelos, son congruentes y los planos que los contienen son paralelos.



Theorem

Dos planos paralelos que intersectan a dos rectas paralelas, determinan sobre ellas segmentos congruentes.

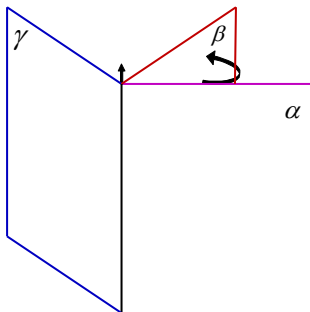


Definición

Al conjunto de planos paralelos a un plano dado se llama haz de planos paralelos.

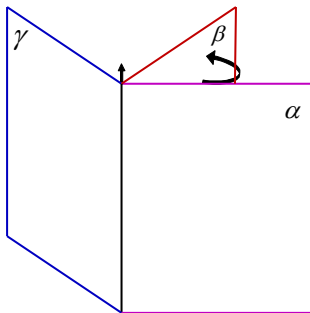
Diedros -Planos perpendiculares-ángulos sólidos.

- 1 Cualquier otro plano sigue al semiplano
- 2 De dos semiplanos β y γ , distintos de α , β precede a γ o γ sigue a β haciéndolos rotar con respecto a α .



Definición

- 1 Se llama ángulo diedro o simplemente diedro de dos semiplanos α y β a la abertura que queda entre los dos semiplanos. Se anotará $\angle(\alpha, \beta)$.
- 2 Los semiplanos reciben el nombre de caras y el eje común se llama arista del diedro.
- 3 Cada semiplano del diedro, distinto de las caras, se llama semiplano interno.



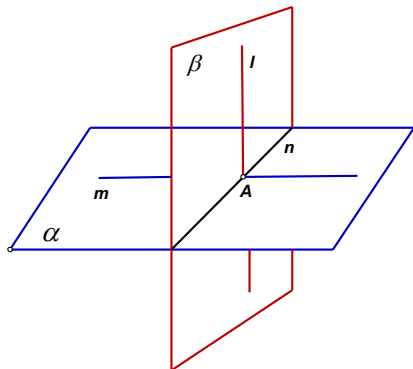
Si se traza un plano perpendicular a la arista del diedro, llamada sección normal, se forma un ángulo plano cuyos lados son las intersecciones de las caras del diedro con el plano normal. La medida del ángulo diedro es, precisamente, la medida de este ángulo plano. Mediante tal correspondencia podremos definir la congruencia y la relación de orden en las medidas de los diedros.

Definición

Dos planos que al intersectarse forman cuatro diedros congruentes, se dicen que son perpendiculares.

Theorem

Si una recta del plano β es perpendicular al plano α , entonces los dos planos α y β son perpendiculares.



Corolario 1 (Ejercicios)

Si una recta l es perpendicular a un plano α , cada plano del haz que contiene a la recta l es perpendicular al plano dado.

Corolario 2 (Ejercicios)

Si un plano α es perpendicular a una recta l del plano β , también es perpendicular al plano β .

Ejercicio 1: Demuestre que

Si dos planos son perpendiculares, cualquier recta que esté contenida en uno de ellos y perpendicular a la intersección de ellos, es también perpendicular al otro plano.

Ejercicio 2: Demuestre que

Si dos planos son perpendiculares y desde un punto cualquiera de uno de ellos, se traza una recta perpendicular al otro, esta recta también es perpendicular al primer plano.

Definición

La figura formada por los ángulos y por todos los rayos que están en dichos planos, se llama *superficie piramidal convexa* o superficie de los ángulos.

Ángulo poliedro o ángulo sólido

Definición

La figura formada por los ángulos y por todos los rayos que están en dichos planos, se llama *superficie piramidal convexa* o superficie de los ángulos.

Importante!

El punto de origen común se llama vértice de la superficie; las semirrectas se llaman aristas y cada ángulo se llama cara.

Los puntos del espacio que no pertenecen a la superficie y que se encuentran en una misma posición con respecto a cada una de las caras se llaman puntos internos; todos los otros puntos, excluyendo los de la superficie, se llaman puntos externos.

Definición

La figura formada por los ángulos y por todos los rayos que están en dichos planos, se llama *superficie piramidal convexa* o superficie de los ángulos.

Definición

Se llama ángulo poliédrico o ángulo sólido convexo la figura sólida formada por los puntos de la superficie piramidal convexa y todos sus puntos internos.

Definición

La figura formada por los ángulos y por todos los rayos que están en dichos planos, se llama *superficie piramidal convexa* o superficie de los ángulos.

Definición

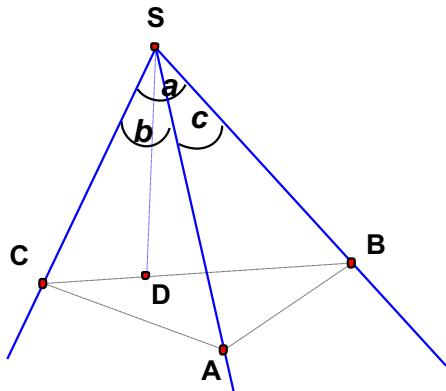
Se llama ángulo poliédrico o ángulo sólido convexo la figura sólida formada por los puntos de la superficie piramidal convexa y todos sus puntos internos.

Definición

Se denominan los ángulos poliedros: triedro, tetraedro, pentaedro... según su número de caras. Si todas las caras y todos sus diedros son congruentes, entonces el ángulo sólido se dice regular.

Theorem

Cada cara de un ángulo triedro es menor que la suma de las otras dos.



Theorem

La suma de las caras de un ángulo poliedro convexo es menor que 2π .

Poliedros

- Se llama superficie poliédrica a la figura formada por varios polígonos situados en planos distintos y dispuestos de tal modo que cada lado sea común a dos de ellos y, los planos formados, se cortan de dos en dos.

- Se llama superficie poliédrica a la figura formada por varios polígonos situados en planos distintos y dispuestos de tal modo que cada lado sea común a dos de ellos y, los planos formados, se cortan de dos en dos.
- El polígono, sus vértices y sus lados se llaman caras, vértices y aristas de la superficie poliédrica. Los puntos del espacio que no pertenecen a la superficie y se encuentran en la misma parte de la superficie respecto al plano de cada una de las caras se llaman puntos interiores de la superficie; todos los otros puntos, que no son internos y no pertenecen a la superficie, son puntos exteriores.

- Se llama superficie poliédrica a la figura formada por varios polígonos situados en planos distintos y dispuestos de tal modo que cada lado sea común a dos de ellos y, los planos formados, se cortan de dos en dos.
- El polígono, sus vértices y sus lados se llaman caras, vértices y aristas de la superficie poliédrica. Los puntos del espacio que no pertenecen a la superficie y se encuentran en la misma parte de la superficie respecto al plano de cada una de las caras se llaman puntos interiores de la superficie; todos los otros puntos, que no son internos y no pertenecen a la superficie, son puntos exteriores.
- Se llama poliedro (convexo) a la figura formada por la superficie poliédrica convexa y sus puntos interiores.

- Las caras, vértices y aristas de de la superficie serán las caras, vértices y aristas del poliedro. La figura formada por las superficies de las caras del poliedro se llamará contorno del poliedro.

- Las caras, vértices y aristas de de la superficie serán las caras, vértices y aristas del poliedro. La figura formada por las superficies de las caras del poliedro se llamará contorno del poliedro.
- Los diedros de los semiplanos correspondientes a cada una de las caras serán los diedros del poliedro. Se llamará ángulo sólido del poliedro al ángulo poliédrico que tiene como vértice algún vértice del poliedro y por aristas los rayos que contienen las aristas del poliedro adyacentes al vértice considerado.

- Las caras, vértices y aristas de de la superficie serán las caras, vértices y aristas del poliedro. La figura formada por las superficies de las caras del poliedro se llamará contorno del poliedro.
- Los diedros de los semiplanos correspondientes a cada una de las caras serán los diedros del poliedro. Se llamará ángulo sólido del poliedro al ángulo poliédrico que tiene como vértice algún vértice del poliedro y por aristas los rayos que contienen las aristas del poliedro adyacentes al vértice considerado.
- Se llamará diagonal de un poliedro el segmento que une dos vértices no situados sobre una misma cara.

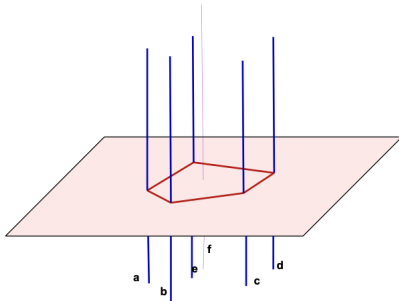
- 1 Un poliedro tiene a lo menos

- 1 Un poliedro tiene a lo menos **cuatro caras (tetraedro)**. Los poliedros se denominan según el número de sus caras: 5 pentaedro, 6 exaedro, 8 octaedro, 12, dodecaedro, 20 icosaedro, etc.

- 1 Un poliedro tiene a lo menos **cuatro caras (tetraedro)**. Los poliedros se denominan según el número de sus caras: 5 pentaedro, 6 exaedro, 8 octaedro, 12, dodecaedro, 20 icosaedro, etc.
- 2 Un poliedro es una parte finita del espacio, en el sentido que no contienen ni rectas ni rayos. Generalmente a esta región del espacio se le da el nombre de **sólido**.

Definición

Si se considera en el espacio un número n de rectas paralelas ($n \geq 3$), tales que, consideradas en cierto orden, tres de ellas no sean coplanarias, de modo que los planos formados, por dos de ellas consecutivas, se intersecten con los otros de dos en dos. Entonces, la figura que forma el trazado de los planos determinados por el dibujo de las rectas consecutivas se llama **superficie prismática indefinida**; los puntos de los n planos y las n rectas son las caras y las rectas de intersección de los diferentes planos son las aristas de la superficie.

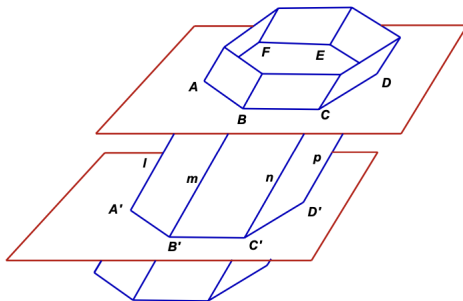


Prisma convexo

La figura formada por la superficie prismática y por sus puntos interiores se llama prisma convexo indefinido.

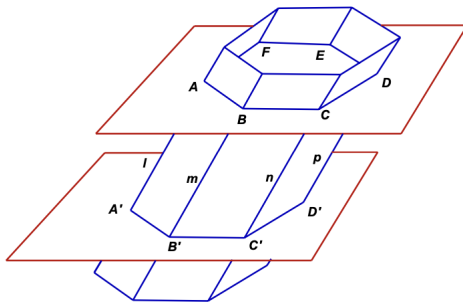
Secciones

Todo plano en el espacio que corta a una de las aristas del prisma, corta también a todas las otras y la intersección de dicho plano con el prisma convexo indefinido es un polígono que recibe el nombre de sección del prisma. Si el plano es perpendicular a una de las aristas, lo será también a las otras; en este caso la sección se llama *sección ortogonal* o *sección normal*.



Teorema

Las secciones de un prisma convexo indefinido que se forman al construir dos planos paralelos, son polígonos congruentes.



Definición

La figura formada por la intersección de las secciones paralelas a un prisma convexo infinito y la parte del prisma comprendida entre ellas se llama prisma finito o simplemente prisma. Los dos polígonos correspondientes a las secciones del prisma reciben el nombre de **bases del prisma**.

Definición

Los paralelogramos formados en cada una de las caras del prisma reciben el nombre de **caras laterales**. La figura formada por las caras laterales se llama **contorno del prisma**. La suma de las áreas laterales será el área lateral y el área total será la suma del área lateral y de las áreas de las bases. Las aristas comprendidas entre las bases se llaman **aristas laterales** y son todas congruentes.

Si las aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases del prisma se dice que éste es recto, en caso contrario es oblicuo.

Definición

Un prisma se dice que es regular si es recto y sus bases son polígonos regulares. En este caso las caras laterales son todas congruentes. La medida de la distancia entre las bases es la altura de un prisma. En el caso de un prisma recto, la altura coincide con las medidas de las aristas laterales ya que las caras laterales son rectangulares. El prisma recibe el nombre según el número de aristas de las bases que coincide con el número de caras laterales.

Teorema

Los contornos de dos prismas rectos, que tienen bases congruentes y alturas congruentes, son congruentes.

Teorema

Los contornos de dos prismas rectos, que tienen bases congruentes y alturas congruentes, son congruentes.

Teorema

Los contornos de dos prismas que tienen las bases y sus caras respectivamente congruentes son congruentes.

Definición

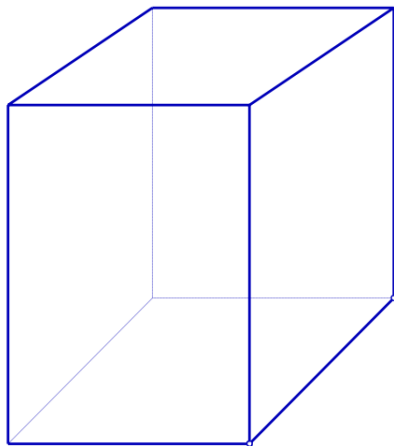
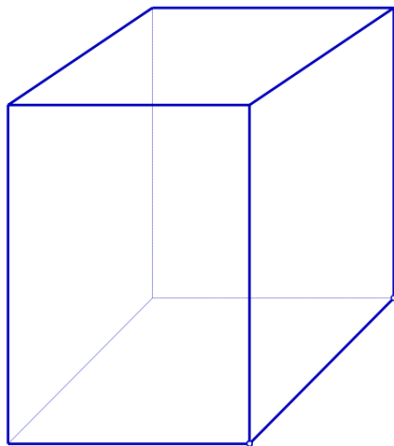
El prisma cuyas bases son dos paralelogramos, como también las caras laterales, es un paralelepípedo.

Definición

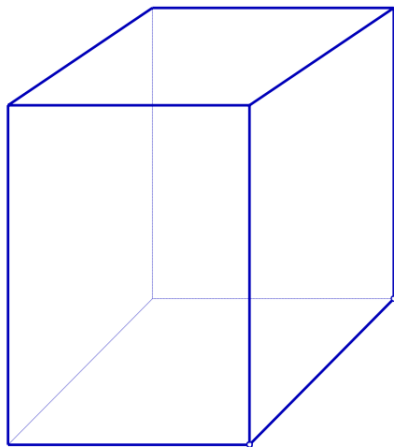
El prisma cuyas bases son dos paralelogramos, como también las caras laterales, es un paralelepípedo.

Un paralelepípedo está limitado por seis paralelogramos. En un paralelepípedo; dos caras son opuestas si no tienen algún vértice en común; dos vértices son opuestos si no pertenecen a la misma cara; los triedros que pertenecen a vértices opuestos se dicen que son opuestos. En un paralelepípedo cada vértice tiene dos vértices opuestos y tiene cuatro diagonales.

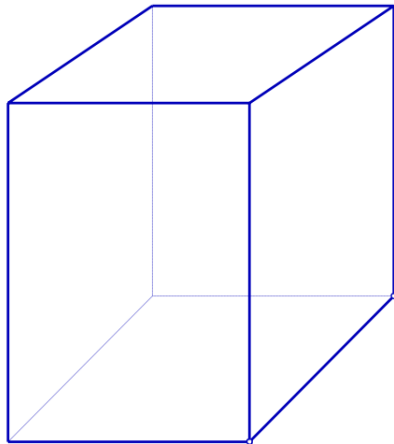
- 1 En el Paralelepípedo recto las aristas son perpendiculares a la base: El paralelepípedo rectangular es el paralelepípedo recto que tiene como base un rectángulo.



- 1 En el Paralelepípedo recto las aristas son perpendiculares a la base: El paralelepípedo rectangular es el paralelepípedo recto que tiene como base un rectángulo.
- 2 En un paralelepípedo recto, las medidas de las tres aristas adyacentes a un mismo vértice son sus dimensiones.
- 3



- 1 En el Paralelepípedo recto las aristas son perpendiculares a la base: El paralelepípedo rectangular es el paralelepípedo recto que tiene como base un rectángulo.
- 2 En un paralelepípedo recto, las medidas de las tres aristas adyacentes a un mismo vértice son sus dimensiones.
- 3 Si las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son congruentes recibe el nombre de cubo, las caras y las bases de un cubo son todas superficies cuadradas equivalentes.



Teorema

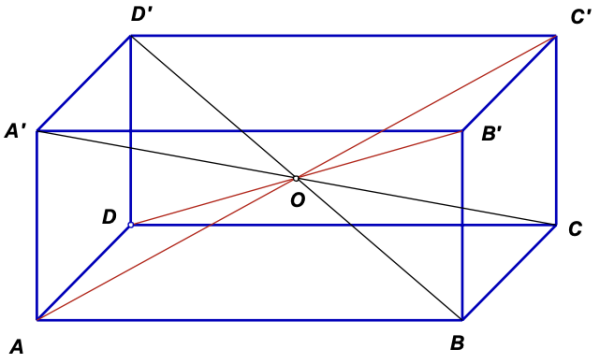
Las caras opuestas de un paralelepípedo son paralelas y congruentes.

Teorema

Las diagonales de un paralelepípedo se intersecan en su punto medio.

Teorema

Las diagonales de un paralelepípedo se intersectan en su punto medio.



Teorema

En un paralelepípedo rectangular las diagonales son congruentes.

Pirámides

Considere un plano α que intersecta a todas las aristas de un ángulo poliédrico convexo y sin que contenga a su vértice V .

Considere un plano α que intersecta a todas las aristas de un ángulo poliédrico convexo y sin que contenga a su vértice V .

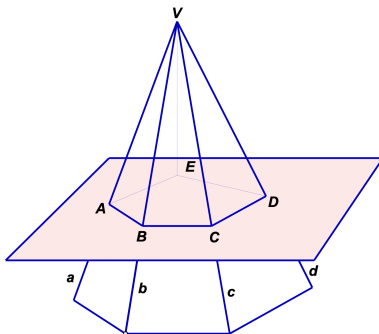
Definición

La figura formada por la intersección del semi espacio, que tiene como origen α y contiene al vértice V , con el ángulo sólido se llama *pirámide*.

Considere un plano α que intersecta a todas las aristas de un ángulo poliédrico convexo y sin que contenga a su vértice V .

Definición

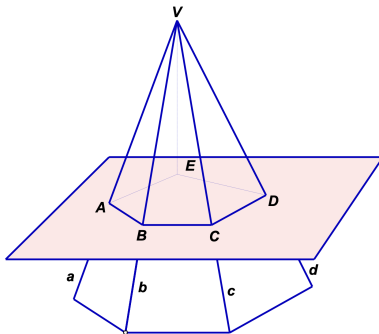
La figura formada por la intersección del semi espacio, que tiene como origen α y contiene al vértice V , con el ángulo sólido se llama *pirámide*.



Considere un plano α que intersecta a todas las aristas de un ángulo poliédrico convexo y sin que contenga a su vértice V .

Definición

La figura formada por la intersección del semi espacio, que tiene como origen α y contiene al vértice V , con el ángulo sólido se llama *pirámide*.



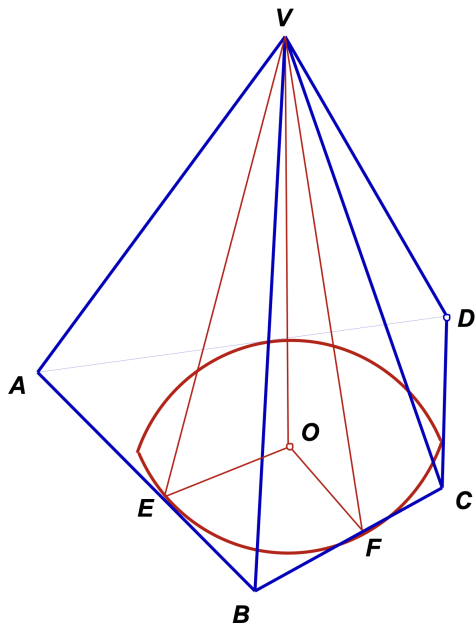
Una pirámide es un poliedro convexo.

- 1 La sección del ángulo sólido con el plano es una región poligonal que recibe el nombre de **base de la pirámide**.
- 2 El vértice y las aristas del ángulo sólido son el vértice y las aristas de la pirámide.
- 3 El vértice opuesto a la base es la **cúspide**.
- 4 La distancia desde la cúspide al plano de la base se llama **altura de la pirámide**.

- El plano de intersección determina sobre las caras del ángulo sólido regiones triangulares, que reciben el nombre de **caras laterales de la pirámide**;
- la suma de las áreas de las caras laterales y de la base se llama área total;
- la figura formada por las caras laterales y la base se llama **contorno de la pirámide**.
- Como los prismas, las pirámides reciben el nombre según la forma de su base: triangular, cuadrangular, pentagonal...
- Una pirámide triangular se llama tetraedro: tiene 4 vértices, cuatro caras triangulares, cada una de las cuales se puede considerar como base del tetraedro.
- Si la base de una pirámide es un polígono circunscrito a una circunferencia, cuyo centro coincide con la proyección de la cúspide sobre el plano basal recibe el nombre de **pirámide recta**.

Teorema

Si en una pirámide recta se une la cúspide con los puntos de intersección de los lados del polígono basal con la circunferencia inscrita a él, los segmentos formados son las alturas de las caras laterales y son congruentes.

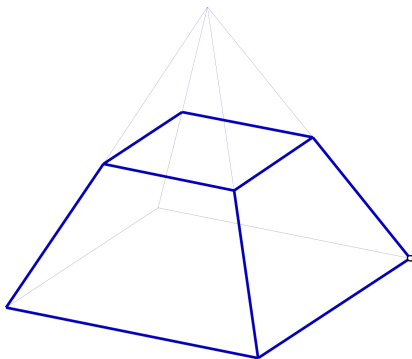


- 1 La altura común a todas las caras laterales de una pirámide recta se llama **apotema lateral de la pirámide**.
- 2 Si una pirámide recta tiene como base un polígono regular se llama **pirámide regular**.
- 3 Las aristas laterales de una pirámide regular son congruentes ya que sus proyecciones sobre el plano basal son radios de la circunferencia inscrita que son congruentes. Por lo tanto las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles congruentes.

Pirámide Truncada

Si se intersecta una pirámide con una sección paralela al plano de la base, que no contenga el vértice, se divide la pirámide en dos partes, una de las cuales es una pirámide y la otra se llama **tronco de pirámide o pirámide truncada**. La base de la pirámide y la sección que determinan el tronco se llaman **bases del tronco de pirámide**. La distancia entre las bases es la **altura del tronco**. A la pirámide superior correspondiente al tronco de cono, se le llama pirámide complementaria del tronco. Un tronco de pirámide se dice que es recto o regular si se obtiene de una pirámide regular. En un tronco

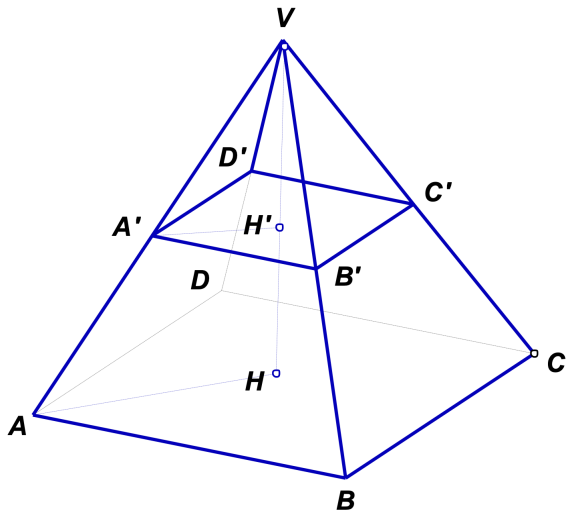
regular las caras laterales son trapezios isósceles congruentes cuya altura es la apotema lateral del tronco.



Theorem

Si se intersecta una pirámide con un plano paralelo al plano de la base:

- 1 *La base y la sección son polígonos semejantes.*
- 2 *La medida de sus lados y los perímetros de estos polígonos son proporcionales a la distancia de cada uno de los planos a la cúspide.*
- 3 *Las áreas de estas regiones poligonales son proporcionales al cuadrado de dichas distancias.*



Superficie

Se denomina superficie la región del plano que queda acotada por alguna figura.

Superficie

Se denomina superficie la región del plano que queda acotada por alguna figura. En el caso de los polígonos, se designa también con el nombre de región poligonal.

Superficie

Se denomina superficie la región del plano que queda acotada por alguna figura. En el caso de los polígonos, se designa también con el nombre de región poligonal.

Extensión

Se considera la extensión como una característica de la superficie.

Superficie

Se denomina superficie la región del plano que queda acotada por alguna figura. En el caso de los polígonos, se designa también con el nombre de región poligonal.

Extensión

Se considera la extensión como una característica de la superficie.

Axioma

A cada extensión de una superficie le corresponde un número real positivo, que es la medida de dicha extensión.

Superficie

Se denomina superficie la región del plano que queda acotada por alguna figura. En el caso de los polígonos, se designa también con el nombre de región poligonal.

Extensión

Se considera la extensión como una característica de la superficie.

Axioma

A cada extensión de una superficie le corresponde un número real positivo, que es la medida de dicha extensión.

Definiciones

- 1 La medida de la extensión de la superficie de una figura es su área.
- 2 Dos figuras cuyas áreas son iguales, son figuras equivalentes.

Teorema

Dos paralelogramos cuyas bases y alturas son respectivamente congruentes, sus regiones son equivalentes.

Teorema

Dos paralelogramos cuyas bases y alturas son respectivamente congruentes, sus regiones son equivalentes.

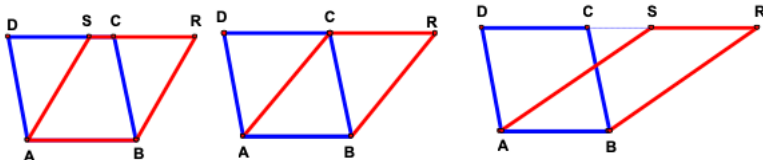


Figura: Demostración.

Teorema

Si un triángulo y un paralelogramo tienen sus bases y sus alturas respectivamente congruentes, entonces la región triangular es equivalente a la mitad de la del paralelogramo.

Teorema

El área de una región rectangular es igual al producto de las medidas de de dos lados contiguos (la base y la altura).

Teorema

El área de la región de cualquier paralelogramo es igual al producto de las medidas de su base y de su altura respectiva

Teorema

El área de una región triangular es igual al semi producto de las medidas de su base y de su respectiva altura.

Teorema

Si dos triángulos tienen un ángulo congruente, entonces las áreas de sus regiones, son entre sí como el producto las medidas de los lados que comprenden dicho ángulo.

Teorema

Las áreas de las regiones de dos triángulos semejantes, son entre sí como los cuadrados de las medidas de dos lados homólogos.

Teorema

Las áreas de las regiones de dos polígonos semejantes cualesquiera , son entre sí como el cuadrado de las medidas de dos de sus lados (elementos) homólogos.

Teorema

Si dos pirámides tienen bases equivalentes y alturas congruentes, las secciones paralelas y equidistantes de las bases, son equivalentes.

Definición

La medida de la superficie de los poliedros es la suma de las medidas de las regiones de los polígonos que lo forman (la suma de las áreas de sus caras).

Definición

La medida de la superficie de los poliedros es la suma de las medidas de las regiones de los polígonos que lo forman (la suma de las áreas de sus caras).

Área lateral

Cuando el poliedro es un prisma, pirámide o pirámide truncada, la medida de la superficie lateral es la suma de las áreas de sus caras laterales (no las bases).

¿Cómo calcular el área lateral de un prisma o pirámide?

¿Cómo calcular el área lateral de un prisma o pirámide?

Basta con determinar el área de un polígono que sea equivalente a dicha suma.

¿Cómo calcular el área lateral de un prisma o pirámide?

Basta con determinar el área de un polígono que sea equivalente a dicha suma.
Los polígonos resultantes reciben el nombre de *retículo* o *plantilla de la superficie lateral* de cada uno de los cuerpos.

Desarrollo de una superficie

¿Cómo calcular el área lateral de un prisma o pirámide?

Basta con determinar el área de un polígono que sea equivalente a dicha suma.
Los polígonos resultantes reciben el nombre de *retículo* o *plantilla de la superficie lateral* de cada uno de los cuerpos.

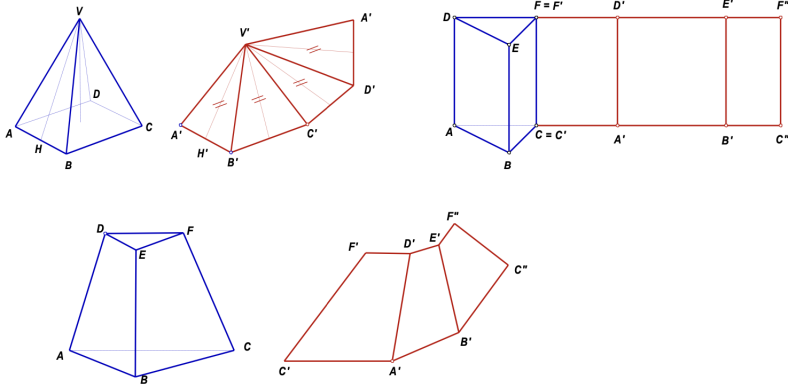


Figura: Ejemplo de desarrollo de superficies.

Se llama *desarrollo de una superficie prismática* a una zona plana comprendida entre dos segmentos paralelos.

Teorema

El área lateral de un prisma es el producto del perímetro de una sección recta y la medida de una arista lateral.

Teorema

El área lateral de un prisma es el producto del perímetro de una sección recta y la medida de una arista lateral.

Corolario

El área lateral de un prisma recto es el producto del perímetro de la base y la medida de su altura.

Definición

En una pirámide regular, la altura de uno de sus triángulos es llamada *apotema*.

Definición

En una pirámide regular, la altura de uno de sus triángulos es llamada *apotema*.

Teorema

El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto del perímetro de la base por la medida del apotema de la pirámide.

Definición

En una pirámide regular, la altura de uno de sus triángulos es llamada *apotema*.

Teorema

El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto del perímetro de la base por la medida del apotema de la pirámide.

Teorema

El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual a la semisuma de los perímetros de las bases por la medida del apotema de la pirámide.

Definición

Se llama volumen de un poliedro la extensión de la porción de espacio que ese poliedro ocupa.

Definición

Se llama volumen de un poliedro la extensión de la porción de espacio que ese poliedro ocupa.

Definición

Se dice que dos cuerpos geométricos son iguales cuando pueden coincidir. En este caso tendrán la misma forma e igual extensión. Se dice que son equivalentes, cuando tienen la misma extensión, pero distinta forma; no pueden entonces coincidir, mas sus volúmenes se expresan por el mismo número.

Definición

Medir un volumen es compararlo con otro que se toma como unidad.

Definición

Medir un volumen es compararlo con otro que se toma como unidad.

Definición

Unidad de volumen es el volumen de un cubo que tenga por arista un segmento con longitud igual a la unidad de longitud.

Teorema

Dos paralelepípedos rectos rectangulares de bases congruentes son proporcionales a sus respectivas alturas.

Teorema

Dos paralelepípedos rectos rectangulares de bases congruentes son proporcionales a sus respectivas alturas.

Teorema

Dos paralelepípedos rectos rectangulares que tienen una dimensión igual, son proporcionales al producto de las otras dos dimensiones.

Teorema

Dos paralelepípedos rectos rectangulares de bases congruentes son proporcionales a sus respectivas alturas.

Teorema

Dos paralelepípedos rectos rectangulares que tienen una dimensión igual, son proporcionales al producto de las otras dos dimensiones.

Teorema

Los volúmenes de dos paralelepípedos rectos rectangulares son proporcionales a los productos de sus tres dimensiones.

Teorema

El volumen de un paralelepípedo recto rectangular es igual al producto de sus tres dimensiones.

Principio de Cavalieri

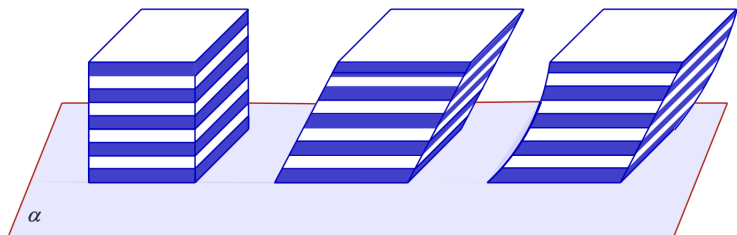


Figura: Principio de Cavalieri.

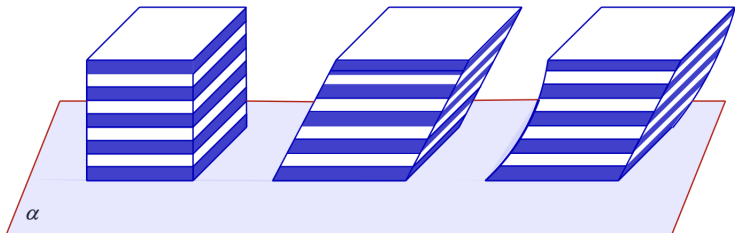


Figura: Principio de Cavalieri.

Enunciado del Principio de Cavalieri

Si dos sólidos se pueden disponer, respecto a un plano dado, de modo que sus secciones paralelas con respecto a dicho plano sean equivalentes, entonces los dos sólidos son equivalentes.

Teorema

Los prismas que tienen equivalentes las bases y congruentes las alturas, son equivalentes.

Teorema

Los prismas que tienen equivalentes las bases y congruentes las alturas, son equivalentes.

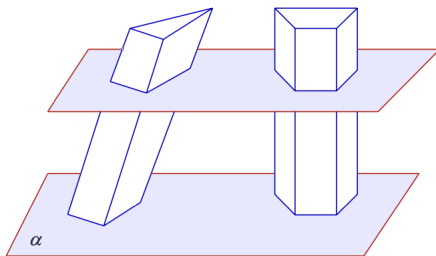


Figura: Esquema para la demostración.

Corolario

Un prisma es equivalente a un paralelepípedo recto rectangular de base equivalente y altura congruente.

Teorema

Las pirámides que tienen equivalentes sus bases y congruentes sus alturas son equivalentes.

Teorema

Las pirámides que tienen equivalentes sus bases y congruentes sus alturas son equivalentes.

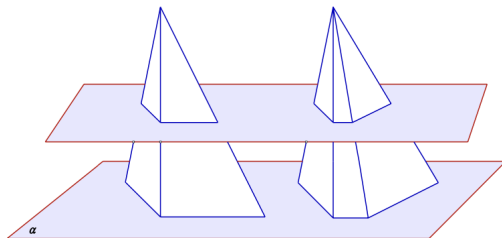


Figura: Esquema para la demostración.

Teorema

Una pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma de base y altura congruentes a las de la pirámide.

Teorema

Una pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma de base y altura congruentes a las de la pirámide.

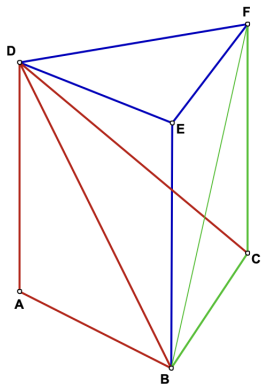


Figura: Demostración: caso 1.

Teorema

Una pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma de base y altura congruentes a las de la pirámide.

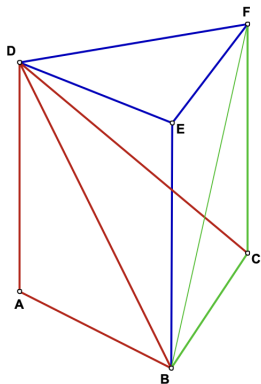


Figura: Demostración: caso 1.

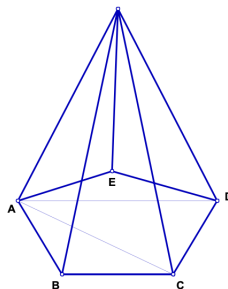


Figura: Demostración: caso 2.

Teorema

La medida del volumen de un prisma es igual al producto de la medida del área de la base por la medida de la altura.

Teorema

La medida del volumen de un prisma es igual al producto de la medida del área de la base por la medida de la altura.

Teorema

La medida del volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto de la medida del área de la base por la medida de la altura.

Teorema

La medida del volumen de un prisma es igual al producto de la medida del área de la base por la medida de la altura.

Teorema

La medida del volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto de la medida del área de la base por la medida de la altura.

Teorema

La medida del volumen de un tronco de pirámide es igual a un tercio del producto de la medida de su altura por la suma de las medidas de las áreas de las bases y de la media geométrica de ellas.

Demostración

