Mi primer paso al Análisis Matemático

Cálculo Diferencial en una variable

Ronald Manríquez Peñafiel

Héctor Lorca Soto

Cristian Carvajal Muquillaza

José González Campos

A nuestras familias

Índice general

Prefacio

Esta es la primera edición del texto, de introducción al Análisis Matemático, *Mi primer paso al Análisis Matemático*. Trabajo realizado en Lab[e]saM, Laboratorio [experimental] de saberes Matemáticos, de la Universidad de Playa Ancha, en la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas. No ha sido poco el esfuerzo dedicado a esta labor, pero nos alegramos de poder entregar un material que sin duda será de gran ayuda para nuestros estudiantes.

Queremos ser un aporte en facilitar el tránsito de la enseñanza media a la Universidad, pretendiendo ser un soporte teórico confiable, formal y que le permita al alumno hacer frente de manera exitosa a este cambio. Debemos destacar que una reprobación en primer año o una deserción universitaria, puede significar la pérdida de la oportunidad de finalizar su carrera, debemos pensar que este problema colisiona directamente con la esperanza de una familia y por supuesto con el futuro del estudiante. Por medio de este libro, queremos reaccionar de manera concreta ante esta necesidad y encaminar al alumno en el descubrir y desarrollar competencias que consoliden un soporte conceptual para caminar con éxito en el trayecto a la vida profesional.

Los autores.

Otoño de 2023

1

Conceptos Previos

"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber."

– Albert Einstein

1.1. Teoría de Conjuntos

En esta sección introduciremos las ideas básicas de la teoría de conjuntos y estableceremos la terminología y notación que usaremos durante el desarrollo del resto de estas páginas.

1.1.1. Nociones Elementales de Conjuntos

El concepto de conjunto es una noción primitiva, una *noción intuitiva*. Un conjunto está formado por una colección bien definida de objetos. Los objetos de un conjunto reciben el nombre de *elementos* del conjunto. El calificativo *bien definido* está referido al hecho de que cualquier elemento que consideremos, podamos determinar si es o no un elemento del conjunto.

Usualmente anotaremos los conjuntos con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas.

Notación 1 *Si a es un elemento del conjunto A, se anotará $a \in A$.*
Si a no es un elemento del conjunto A, se anotará $a \notin A$.
Los símbolos $\in$ y $\notin$ significan pertenece y no pertenece, respectivamente.

Deteminación de un Conjunto

Usualmente podemos definir un conjunto por extensión o por comprensión.

(I) Por extensión: consiste en describir todos los elementos del conjunto.

Ejemplo 2 *Si* $A = \{a, e, i, o, u\}$ *estamos diciendo que el conjunto* A *está formado por los elementos* a, e, i, o, u. *La determinación por extensión está ligada a la idea intuitiva de finitud.*

(II) Por comprensión: consiste en definir el conjunto dando una condición o propiedad que deban satisfacen los elementos que lo forman. Así podemos anotar $A = \{x \in U/p(x)\}$ como el conjunto de todos los elementos x del universo U, tales que verifican la propiedad o expresión abierta $p(x)$. La determinación por compresión está ligada a la idea intuitiva de no finitud.

Ejemplo 3 *Sea* $U = \mathbb{Z}$ *y* $p(x) : x < -1$ *la propiedad que deban cumplir los elementos* $x \in \mathbb{Z}$. *Así el conjuntode todos los elementos menores que* -1 *se anotaran por compresión como* $A = \{x \in \mathbb{Z}/x < -1\}$.

Conjunto Universo

Llamaremos conjunto universo al *universo del discurso*, si U es el universo del discurso, se cumple $x \in U \Leftrightarrow v$, donde v es una proposición tautológica. Por ejemplo, $x \in U \Leftrightarrow x = x$ o bien $x \in U \Leftrightarrow p(x) \vee \sim p(x)$.

Nótese que el conjunto universal es un conjunto relativo al universo de trabajo o del discurso, que puede ser $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, entre otros.

Conjunto vacío

Sea U el conjunto universo, llamaremos conjunto vacío a aquel conjunto formado con ningún elemento de U, lo representamos con el signo $\emptyset$ o también por $\{\}$. De este modo podemos notar que $x \in \emptyset \Leftrightarrow f$ donde f es una proposición contradictoria o universalmente falsa.

Ejemplo 4 *Sea* $x \in \emptyset \Leftrightarrow x \neq x$ *o bien* $x \in \emptyset \Leftrightarrow p(x) \wedge \sim p(x)$. *Si consideramos el conjunto* $a = \{x \in \mathbb{N}/3 + x = 2\}$, *observamos que el* -1 *es el único elemento que satisface la proposición, pero* $-1 \notin \mathbb{N}$, *luego* A *carece de elementos, por tal motivo* $A = \emptyset$.

Igualdad de Conjuntos

Diremos que dos conjuntos A y B de un universo U son iguales, lo que anotamos $A = B$, si cada elemento de A lo es de B y cada elemento de B también lo es A.

Podemos decir, además, que $A = B$ si las proposición abiertas $p(x)$ y $q(x)$ que definen a ambos conjuntos respectivamente, se satisfacen para los mismos elementos de U, así:

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in U)(p(x) \Leftrightarrow q(x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in U)(x \in A \Leftrightarrow x \in B). \end{aligned}$$

Ejemplo 5 *Si consideramos los siguientes conjuntos* $A = \{x \in \mathbb{Z}_0^+ / x \leq 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ *y* $C = \{0, 1, 1, 2, 3, 2\}$. *Observamos que los tres conjuntos dados son iguales, pues tienen los mismos elementos.*

1.1.2. Subconjuntos

Relación de Inclusión

Dados dos conjuntos A, B de un universo U, diremos que A es *subconjunto de* B, o que A *está incluido en* B, o que A *está contenido en* B, o que B *contiene a* A, lo que anotamos $A \subseteq B$ si todo elemento de A es también un elemento de B, es decir:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in U)(p(x) \Rightarrow q(x)) \end{aligned}$$

Observación 6 *Por la definición dada, la relación* $\subseteq$, *no excluye la igualdad de ambos conjuntos.*

Subconjunto Propio

Sean $A, B \subseteq U$, diremos que el conjunto A está contenido propiamente (estrictamente) en B, lo que anotamos $A \subset B$ si $A \subseteq B \wedge A \neq B$. En este caso,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \wedge (\exists y)(y \in B \wedge y \notin A).$$

Ejemplo 7 *Sean* $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ divide a } 6\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ divide a } 3\}$, *es claro que* $A = \{1, 2, 3, 6\}$ *y que* $B = \{1, 2, 3\}$, *sin duda alguna,* $B \subseteq A$.

Observación 8 *De lo anterior se desprende que dos conjuntos son iguales si ellos se contienen mutuamente. Esto es*

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Observación 9 *Diremos que dos conjuntos* $A, B \subseteq U$ *son comparables si* $A \subseteq B$ *o bien* $B \subseteq A$.

Ejemplo 10 *Los conjuntos del Ejemplo 7 son comparables, en cambio los conjuntos* $C = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es múltiplo de } 7\}$ *y* $D = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es múltiplo de } 5\}$ *no son comparables.*

Propiedades de la Inclusión

Proposición 11 *Sean $A, B, C \subseteq U$ conjuntos cualesquiera, entonces se verifica:*

1. *$\subseteq$ es refleja,*

2. *$\subseteq$ es antisimétrica y*

3. *$\subseteq$ es transitiva.*

Demostración. Ejercicio. ■

Observación 12 *El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, por lo que podemos decir que para cualquier subconjunto A de U, el vacío y el universo son sus cotas universales, es decir: $\emptyset \subseteq A \subseteq U$.*

1.1.3. Conjunto Potencia

Dado un conjunto arbitrario A, es posible definir un nuevo conjunto cuyos elementos serán todos los subconjuntos del conjunto A, se designa por $P(A)$ o bien por 2^A, y recibe el nombre de *conjunto potencia o conjunto de las partes* de A, esto es:

$$P(A) := \{X : X \subseteq A\}.$$

Ejemplo 13 *Si $A = \{1, 2, 3\}$, se tiene que:*
$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ y cada uno de sus elementos es un subconjunto de A.

Observación 14
1. *Nótese que $P(A) \neq \emptyset$, pues siempre $\emptyset$ y A son subconjuntos de A.*

2. *Si $A = \emptyset$, entonces $P(A) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.*

3. *Si $\#(A) = n$, entonces $\#P(A) = 2^n$.*

Del Ejemplo 13, $\#(A) = 3$, luego $\#P(A) = 2^3 = 8$.

Ejemplo 15 *Sea $B = \{a, b, c, d\}$, entonces:*

$$P(B) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \\ \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, B \end{array} \right\}$$

Nótese además que, $\#(B) = 4$ y $\#P(B) = 2^4 = 16$.

Proposición 16 *Sean $A, B \subseteq U$, entonces, $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Asumiendo que $A \subseteq B$, debemos demostrar que para cualquier $X \in P(A)$ entonces $X \in P(B)$, luego:

$$\begin{array}{rcll} \text{Sea } x \in P(A) & \Rightarrow & X \subseteq A & definición \\ & \Rightarrow & X \subseteq B & hipótesis \\ & \Rightarrow & X \in P(B) & definición \end{array}$$

$\Leftarrow]$ Ejercicio. ■

1.1.4. Operaciones y Propiedades Fundamentales con Conjuntos

En lo siguiente, cualquier conjunto se considerará un subconjunto de U.

Definición 17 *Unión de conjuntos. Sean $A, B \subset U$ dos conjuntos cualesquiera, la unión de A y B, anotada $A \cup B$ se define por:*

$$A \cup B := \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}.$$

Proposición 18 *Sean A, B, C conjuntos cualesquiera, entonces:*

1. $A \subseteq (A \cup B)$ *y* $B \subseteq (A \cup B)$
2. $A \cup A = A$ *Idempotencia para la unión*
3. $A \cup U = U$ *y* $A \cup \emptyset = A$ *Identidad para la unión*
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *Asociatividad*
5. $A \cup B = B \cup A$ *Conmutatividad*
6. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

Definición 19 *Intersección de conjuntos. Sean $A, B \subset U$ dos conjuntos cualesquiera, la intersección de A y B, anotada $A \cap B$ se define por:*

$$A \cap B := \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Observación 20 *En el caso que A y B no poseen elementos en común, expresaremos esto mediante*

$$A \cap B = \emptyset.$$

También diremos en esta situación que A y B son conjuntos disjuntos.

Proposición 21 *Sean A, B, C conjuntos cualesquiera, entonces:*

1. $A \cap B \subseteq A$ *y* $A \cap B \subseteq B$

2. $A \cap A = A$ *Idempotencia para la intersección*

3. $A \cap U = A$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$ *Identidad para la intersección*

4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *Asociatividad*

5. $A \cap B = B \cap A$ *Conmutatividad*

6. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

Definición 22 *Direfencia de conjuntos. Sean $A, B \subset U$ dos conjuntos cualesquiera, la diferencia de A y B, anotada $A \setminus B$ se define por:*

$$A \setminus B := \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Definición 23 *Diferencia simétrica de conjuntos. Sean $A, B \subset U$ dos conjuntos cualesquiera, la diferencia simétrica de A y B, anotada $A \triangle B$ se define por:*

$$A \triangle B := \{x \in U : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\},$$

o bien

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Observación 24 *Nótese que $(A \setminus B), (B \setminus A)$ y $(A \cap B)$ son mutuamente disjuntos.*

Proposición 25 *Sean A, B, C conjuntos cualesquiera, entonces:*

1. $A \setminus B \subseteq A$ *y* $A \setminus B \subseteq B$

2. $A \setminus B = A \cap B^c$

3. $A \triangle B \subseteq A \cup B$

4. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ *Asociatividad*

5. $A \triangle \emptyset = A$ *Existencia de elemento neutro*

6. $A \triangle A = \emptyset$

7. $A \triangle B = B \triangle A$ *Conmutatividad*

8. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ *Distributividad*

Definición 26 *Complemento. Sea A un conjunto cualquiera, el complemento de A (respecto del universo U) se define por:*

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Proposición 27 *Leyes de Complemento:*

1. $A \cup A^c = U$
2. $A \cap A^c = \emptyset$
3. $(A^c)^c = A$
4. $U^c = \emptyset$
5. $\emptyset^c = U$

Proposición 28 *Leyes de Morgan:*

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Proposición 29 *Distributividad:*

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Proposición 30 *Absorción:*

1. $A \cap (A \cup B) = A$
2. $A \cup (A \cap B) = A$

Proposición 31 *Son verdaderos los siguientes enunciados:*

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
3. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow B \cup A^c = U$

Observación 32 *Para las demostraciones, ver la sección de Ejercicios Resueltos y Propuestos.*

1.1.5. Familias de Conjuntos

Habitualmente nos encontramos con conjuntos cuyos elementos son a su vez conjuntos. Para simplificar este hecho diremos que estamos en presencia de una *familia F de conjuntos.*

Frecuentemente existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de F y los elementos de cierto conjuntos I (subconjunto de $\mathbb{N}$), esto es una ley que asocia a cada elemento $i \in I$ un elemento A de F de manera que cada elemento de F sea obtenido una y solo una vez. Diremos entonces que la familia F está indexada por el *conjunto de índices I* y es anotado por

$$F = \{A_i : i \in I\}.$$

Unión e Intersección de familias de conjuntos

Definición 33 *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, se define la unión de los elementos de $\{A_i\}_{i\in I}$ mediante la ecuación:*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in U : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Definición 34 *La intersección de los $\{A_i\}_{i\in I}$ se define por:*

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in U : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Proposición 35 *Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ dos familias de conjuntos. Si $A_i \subseteq B_i$ para todo $i \in I$, entonces:*

1. $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$
2. $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$

Proposición 36 *Leyes de Morgan generalizadas. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos, entonces:*

1. $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$
2. $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

Proposición 37 *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos, entonces para cualquier conjunto B se verifica:*

1. $\displaystyle B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$

2. $B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

3. $B \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \setminus A_i)$

4. $B \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \setminus A_i)$

1.1.6. Producto Cartesiano

Par Ordenado

Dados dos elementos a, b cualesquiera, podemos formar los conjuntos binarios $\{a, b\}$ y $\{b, a\}$, que evidentemente son iguales, pues el orden en que se dan dichos elementos en el conjunto no importan, no alteran la igualdad, sin embargo en la matemática, el orden interviene de modo esencial.

Definición 38 *Dados dos elementos a, b cualesquiera, se denomina par ordenado al conjunto binario $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ que denotamos por (a, b).*

Observación 39 *Si (a, b) es un par ordenado, a es la primera componente y b es la segunda componente, que también reciben el nombre de primera y segunda proyección respectivamente, y se anotan por $pr_1(a, b) = a$ y $pr_2(a, b) = b$.*

Definición 40 *Igualdad de pares ordenados: dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y solo si sus componentes respectivas son iguales, es decir:*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Producto Cartesiano

Definición 41 *Dados $A, B \subset U$ dos conjuntos cualesquiera, definimos su producto cartesiano, anotado $A \times B$, por:*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ejemplo 42 *Sea $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, entonces:*

$$A \times B = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (b, 1); (b, 2); (b, 3)\}$$

Observación 43

1. *Si $\#(A) = n$ y $\#(B) = M$, entonces $\#(A \times B) = n \cdot m$.*

2. *Al producto cartesiano $A \times A$ lo podemos anotar por A^2.*

Proposición 44 *Son verdaderas las siguientes propiedades:*

1. $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$
2. $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B \vee (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$
3. $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Leftrightarrow A \times B \subseteq C \times D$
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
6. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
7. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
8. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

1.1.7. Ejercicios Resueltos

1. Pruebe que $\forall A, B \in U, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

   Demostración.

$$\begin{aligned}
\text{Sea } x \in A \cup (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \vee \Big(x \in (B \cup C)\Big) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \vee \Big((x \in B) \vee (x \in C)\Big) \quad / \text{ Asoc de } \vee \\
&\Leftrightarrow \Big((x \in A) \vee (x \in B)\Big) \vee (x \in C) \\
&\Leftrightarrow \Big((x \in (A \cup B)\Big) \vee (x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C
\end{aligned}$$

   ■

2. Pruebe que $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$.

   Demostración.

$$\begin{aligned}
\text{Sea } x \in A &\Rightarrow \{x\} \in P(A) \\
&\Rightarrow \{x\} \in P(B) \\
&\Rightarrow x \in B
\end{aligned}$$

   ■

3. Pruebe que $\forall A, B \in U, P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Sea } X \in P(A \cap B) &\Rightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\Rightarrow (X \subseteq A) \wedge (X \subseteq B) \\ &\Rightarrow (X \in P(A)) \wedge (X \in P(B)) \\ &\Rightarrow X \in P(A) \cap P(B) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

4. Pruebe que $\forall A, B \in U, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

   Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A^c) \vee (x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

$\blacksquare$

5. Pruebe que $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

   Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in B^c &\Rightarrow x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \quad /\text{Hipótesis} \\ &\Rightarrow x \in A^c \end{aligned}$$

$\blacksquare$

6. Pruebe que $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$.

   Demostración.

   $\Rightarrow$] Asumamos que $A \subseteq B$, por demostrar que $A \cap B^c = \emptyset$. Para ello, lo haremos por el método del absurdo, supongamos que $A \cap B^c \neq \emptyset$, entonces:

$$\begin{aligned} \exists x \in A \cap B^c &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B^c \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \end{aligned}$$

   Contradicción con la hipótesis, pues $A \subseteq B$

   $\Leftarrow$] Asumimos como hipótesis $A \cap B^c = \emptyset$, de igual forma, supongamos por el absurdo que $A \not\subseteq B$, esto quiere decir que:

$$\begin{aligned} \exists y \in A \text{ tal que } y \notin B &\Rightarrow y \in A \wedge y \in B^c \\ &\Rightarrow y \in A \cap B^c \end{aligned}$$

   Contradicción con la hipótesis, pues $A \cap B^c = \emptyset$. $\blacksquare$

7. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ dos familias de conjuntos, si $A_i \subseteq B_i, \forall i \in I$, demuestre que $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$.

   Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in \bigcup_{i\in I} A_i &\Rightarrow x \in A_i, \quad \forall i \in I \qquad \text{/Hipótesis} \\ &\Rightarrow x \in B_i, \quad \forall i \in I \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I} B_i. \end{aligned}$$

   ■

8. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, demuestre que $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup A_i^c$.

   Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \\ &\Leftrightarrow x \notin A_i \qquad \text{/ para algún } i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in A_i^c \qquad \text{/ para algún } i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i^c \end{aligned}$$

   ■

9. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y sea $B \in U$, entonces demuestre que
   $B \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \setminus A_i)$.

   Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in B \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge \left(x \notin \bigcup_{i\in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \notin A_i \quad \forall i \in I) \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \in A_i^c \quad \forall i \in I) \\ &\Leftrightarrow x \in B \cap A_i^c \quad \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in B \setminus A_i \quad \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} B \setminus A_i \end{aligned}$$

   ■

10. Pruebe que $\forall A, B \in U$ si $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D) \Rightarrow (A \times B) \subseteq (C \times D)$.

    Demostración.

$$\begin{array}{rcll} \text{Sea } (x,y) \in (A \times B) & \Rightarrow & (x \in A) \wedge (y \in B) & /\text{Hipótesis} \\ & \Rightarrow & (x \in C) \wedge (y \in D) & \\ & \Rightarrow & (x,y) \in (C \times D) & \end{array}$$

■

1.1.8. Ejercicios Propuestos

1. Demuestre todas las proposiciones que han quedado como ejercicio en esta sección.

1.2. Inducción Matemática

Postulados de Peano e Inducción Matemática

En estricto rigor, la construción de los números reales comienza con el conjunto $\mathbb{N}$, de elementos llamados números naturales, los cuales cumplen las siguientes propiedades:

(I) $\mathbb{N}$ es no vacío,

(II) Existe una única función inyectiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $s(n) := n + 1$, donde $s(n)$ recibe el nombre de sucesor o siguiente de n.

(III) Existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ que no es sucesor de natural alguno, es decir, $s(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.

(IV) Distintos números naturales tienen distintos sucesores, es decir, si $n \neq m$ entonces $s(n) \neq s(m)$.

(V) **Principio de Inducción** El único conjunto que contiene a n_0 y a los sucesores de todos los elementos es $\mathbb{N}$, es decir, dado $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

i) $A \cap (\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})) \neq \emptyset$ y
ii) $s(A) \subseteq A$,

entonces $A = \mathbb{N}$.

Teorema 45 *Principio de Inducción Matemática y Formas Proposicionales Sean $F(0), \ldots, F(n)$ formas proposicionales en variable $n \in \mathbb{N}$, tal que:*

i) $F(0)$ es verdadera y

ii) para cada $n \in \mathbb{N}$, $F(n) \Rightarrow F(n+1)$,

entonces $F(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea

$$M = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera.}\}$$

Por la parte $i)$ sabemos que $0 \in M$, además por la parte $ii)$ sabemos que si $n \in M$ entonces $n + 1 \in M$, así $M = \mathbb{N}$ por el **V** Postulado de inducción. ■

Ejemplo 46 *Pruebe por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$F(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. *Lo primero que haremos, será definir un conjunto con todos los naturales que cumplan con nuestra proposición, luego definamos*

$$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \ \textit{es verdadera}\}$$

1. *Notar que* $0 \in A$, *pues* $0 = \dfrac{0 \cdot (0+1)}{2}$
2. *Notar que* $1 \in A$, *pues* $1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$
3. *Asumamos verdadero que* $F(n) : 1{+}2{+}3{+}\ldots{+}n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *(Hipótesis de inducción)*
4. *Por demostrar que* $F(n{+}1) : 1{+}2{+}3{+}\ldots{+}n{+}(n{+}1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$
5. *Demostración:*

$$\begin{aligned}\underbrace{1+2+\ldots+n}_{F(n)}+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1))}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Así $A = \mathbb{N}$

■

Formas Equivalentes

En la siguiente sección estudiaremos dos proposiciones equivalentes con el principio de inducción matemática. La primera proposición se conoce como el principio del buen orden:

Sea S *un subconjunto no vacío de* $\mathbb{N}$, *entonces* S *tienen un menor elemento, esto es, existe* $y \in S$ *tal que para cada* $x \in S, y \leq x$.

El segundo es conocido como el *el principio de inducción completa:*
Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

i) $0 \in S$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \{0,1,2,3,\ldots,n\} \subset S \Rightarrow n+1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$

No es difícil ver la cercanía del principio de inducción completo con el principio de inducción matemático, pero no parece tan evidente la relación con el principio del buen orden.

Teorema 47 *Suponga que el principio de inducción es verdadero y sea* S *un subconjunto no vacío de* $\mathbb{N}$. *Entonces* S *tienen un menor elemento.*

Demostración. Haremos la demostración mediante el método del absurdo, supongamos que S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ que no tiene menor elemento. Sea S^c el complemento de S, esto es, $S^c = \mathbb{N} \setminus S$. Se define:

$$T = \{x \in \mathbb{N} : \text{ para cada } y \leq x, y \in S^c\}.$$

Nótese que $0 \in S^C$, pues si $0 \in S$, entonces 0 debe ser el menor elemento de S ya que $\forall x \in \mathbb{N}, 0 \leq x$ por lo que $0 \in T$.
Supongamos ahora que $k \in T$, debido a la forma en que está definido T, sabemos que $0, 1, 2, \ldots, k$ son elementos de S^c.

Después de esto, supongamos que $k + 1 \in S$, entonces este debe ser el menor elemento de S, pues $0, 1, 2, \ldots, k \in S^c$ lo que no es posible, pues S no posee menor elemento, por lo tanto $k + 1 \in S^c$, por lo que $k + 1 \in T$.

Luego, por el principio de inducción matemático, $T = \mathbb{N}$, esto significa que $S^c = \mathbb{N}$ (por la definición de T) y esto significa que $S = \emptyset$ lo que es una contradicción, por tanto S debe tener un menor elemento. ■

Teorema 48 *Suponga que el principio del buen orden es verdadero y sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:*

1. $0 \in S$ *y*
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \{1, 2, 3, \ldots, n\} \subset S \Rightarrow n + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. Suponga que S posee las propiedades antes mencionadas y consideremos S^c. Si $S^c = \emptyset$ entonces $S = \mathbb{N}$. Supongamos que $S^c \neq \emptyset$.

Por el principio del buen orden, S^c tiene un menor elemento, digamos y. Observemos que $y \neq 0$ ya que por hipótesis $0 \in S$.

Nótese que $0, 1, 2, \ldots, y - 1 \in S$ pues de lo contrario ellos deberían ser el menor elemento de S en vez de y.

Así, por hipótesis $y \in S$, pero esto es una contradicción pues $y \in S^c$, luego $S^c = \emptyset$ lo que significa que $S = \mathbb{N}$ ■

Teorema 49 *Suponga que el principio de inducción es verdadero y sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:*

i) $0 \in S$ *y*

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \{0, 1, 2, \ldots, n\} \subseteq S \Rightarrow n + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. Suponga que S tiene las propiedades *i)* y *ii)* anteriores, usaremos el principio de inducción completa para probar que $S = \mathbb{N}$.

Ya que $\forall n \in \mathbb{N}, \{0,1,2,\ldots,n\} \subseteq S \Rightarrow n \in S$ es una proposición obviamente verdadera, por la parte ii) tenemos que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\{0,1,2,\ldots,n\} \subseteq S \Rightarrow n \in S) \wedge (n \in S \Rightarrow n+1 \in S),$$

lo que implica que $\forall n \in \mathbb{N}, \{0,1,2,\ldots,n\} \subseteq S \Rightarrow n+1 \in S$. Luego S satisface las hipótesis del principio de inducción completa y en consecuencia $S = \mathbb{N}$. ■

1.2.1. Ejercicios Resueltos

1. Pruebe por inducción que: $F(n) : 1^2+2^2+3^2+..+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   Demostración. Definamos

   $$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

   a) Notar que $0 \in A$, pues $\dfrac{0\cdot(0+1)\cdot(2\cdot 0+1)}{6} = 0$

   b) Notar que $1 \in A$, pues $\dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = 1$

   c) Asumamos verdadero que $F(n) : 1^2+2^2+3^2+..+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (Hipótesis de inducción)

   d) Por demostrar que

   $$F(n+1) : 1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

   e) Demostración:

   $$\begin{aligned}
   \underbrace{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}_{F(n)}+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
   &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\
   &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\
   &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
   &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
   \end{aligned}$$

   Así $A = \mathbb{N}$

■

2. Pruebe por inducción que $F(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

   Demostración. Definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

   a) Notar que $0 \in A$, pues $\dfrac{0^2(0+1)2}{4} = 0$

   b) Notar que $1 \in A$, pues $\dfrac{1^2(1+1)2}{4} = 1$

   c) Asumamos verdadero que $F(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (Hipótesis de inducción)

   d) Por demostrar que

$$F(n+1) :: 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

   e) Demostración:

$$\begin{aligned}
\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}_{F(n)} + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\left[n^2 + 4(n+1)\right]}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\left[n^2 + 4n + 4\right]}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

   Así $A = \mathbb{N}$

■

3. Pruebe por inducción que $F(n) : 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$

   Demostración. Definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

   a) Notar que $0 \in A$, pues $\dfrac{3^{0+1} - 1}{2} = 1$

b) Notar que $1 \in A$, pues $\dfrac{3^{1+1}-1}{2} = 4$

c) Asumamos verdadero que $F(n) : 1+3+9+27+81+3^n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ (Hipótesis de inducción)

d) Por demostrar que

$$F(n+1) : 1+3+9+27+81+3^n+3^{n+1} = \frac{3^{n+2}-1}{2}$$

e) Demostración:

$$\begin{aligned}
\underbrace{1+3+9+27+81+3^n}_{F(n)} + 3^{n+1} &= \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} \\
&= \frac{3^{n+1}-1+2\cdot 3^{n+1}}{2} \\
&= \frac{3\cdot 3^{n+1}-1}{2} \\
&= \frac{3^{n+2}-1}{2}
\end{aligned}$$

Así $A = \mathbb{N}$

■

4. Pruebe por inducción que $F(n) : 7^n - 1$ es divisible por 6.

Demostración. Definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

a) Notar que $0 \in A$, pues $7^0 - 1 = 0$

b) Notar que $1 \in A$, pues $7^1 - 1 = 6$

c) Asumamos verdadero que $F(n) : 7^n - 1$, es decir, que $7^n = 6k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$ (Hipótesis de inducción)

d) Por demostrar que $F(n+1) : 7^{n+1} - 6$ es divisible por 6, es decir, que $7^{n+1} - 1 = 6k'$ para algún $k' \in \mathbb{Z}$

e) Demostración:

$$\begin{aligned}
7^{n+1} - 1 &= 7^n \cdot 7 - 1 \\
&= 7 \cdot 7^n - 7 + 6 \\
&= 7(7^n - 1) + 6 \\
&= 7 \cdot 6k + 6 \\
&= 6(\underbrace{7k+1}_{k'})
\end{aligned}$$

Así $A = \mathbb{N}$

■

5. Pruebe por inducción que $F(n) : 2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9, en donde $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$

Demostración. Definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N}, n > 1 : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

a) Notar que $2 \in A$, pues $2^{2\cdot} - 3 \cdot 2 - 1 = 2^4 - 6 - 1 = 9$

b) Asumamos verdadero que $F(n) : 2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9, esto es que $2^{2n} - 3n - 1 = 9k$ con $k \in \mathbb{Z}$ (Hipótesis de inducción)

c) Por demostrar que

$$2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 = 9k' \text{ con } k' \in \mathbb{Z}$$

d) Demostración:

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 &= 2^{2n+2} - 3n - 3 - 1 \\ &= 2^{2n+2} - 3n - 4 \\ &= 2^2 \cdot 2^{2n} - 3n - 4 \\ &= 4 \cdot 2^{2n} - 12n - 4 + 9n \\ &= 4\underbrace{(2^{2n} - 3n - 1)}_{9k} + 9n \\ &= 4 \cdot 9k + 9n \\ &= 9(\underbrace{4k + n}_{k'}) \end{aligned}$$

Así $A = \mathbb{N}$

■

6. Pruebe por inducción que $F(n) : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9.

Demostración. Definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

a) Notar que $0 \in A$, pues $0^3 + 1^3 + 2^3 = 9$

b) Notar que $1 \in A$, pues $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$

c) Asumamos verdadero que $F(n) : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9, esto es, que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$ (Hipótesis de inducción) *d*) Por demostrar que $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ es divisible por 9, esto es que $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3 = 9k'$ con $k' \in \mathbb{Z}$

e) Demostración:

$$\begin{aligned}
& (n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 \\
\Rightarrow\ & (n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27 \\
\Rightarrow\ & \underbrace{[n^3+(n+1)^3+(n+2)^3]}_{k}+9(n^2+3n+3) \\
\Rightarrow\ & 9k+9(n^2+3n+3) \\
\Rightarrow\ & 9(\underbrace{k+n^2+3n+3}_{k'})
\end{aligned}$$

Así $A = \mathbb{N}$

■

7. Pruebe por inducción que $F(n) : 2^{n+4} \geq (n+4)^2$.

Demostración. Definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

a) Notar que $0 \in A$, pues $\underbrace{2^{0+4}}_{16} \geq \underbrace{(0+4)^2}_{16}$

b) Notar que $1 \in A$, pues $\underbrace{2^{1+4}}_{32} \geq \underbrace{(1+4)^2}_{25}$

c) Asumamos verdadero que $F(n) : 2^{n+4} \geq (n+4)^2$ (Hipótesis de inducción)

d) Por demostrar que

$$2^{n+5} \geq (n+5)^2$$

e) Demostración:

$$\begin{aligned}
2^{n+4} &\geq (n+4)^2 \qquad / \cdot 2 \\
2 \cdot 2^{n+4} &\geq 2(n+4)^2 \\
2^{n+5} &\geq 2(n^2+8n+16) \\
2^{n+5} &\geq 2n^2+16n+32 \\
2^{n+5} &\geq n^2+10n+25+n^2+6n+7 \\
\text{y como} & \\
n^2+10n+25+n^2+6n+7 &\geq n^2+10n+25 \\
\text{Entonces} & \\
2^{n+5} &\geq n^2+10n+25 \\
2^{n+5} &\geq (n+5)^2
\end{aligned}$$

Así $A = \mathbb{N}$

■

8. Pruebe por inducción que: $F(n) : 2n < n^2 + 2$ con $n \geq 1$

   Demostración. Definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

   a) Notar que $1 \in A$, pues $2 \cdot 1 < (1)^2 + 2$
   b) Asumamos verdadero que $F(n) : 2n < n^2 + 2$ (Hipótesis de inducción)
   c) Por demostrar que $F(n+1) : 2(n+1) < (n+1)^2 + 2$
   d) Demostración:

$$\begin{array}{rcl}
2n & < & n^2 + 2 \\
0 & < & n^2 + 2 - 2n \\
0 & < & n^2 + 1 + 1 + 2n - 4n \\
0 & < & (n^2 + 2n + 1) + 1 - 4n \\
0 & < & (n+1)^2 - 2n - 2n + 1 \\
\text{por transitividad, diremos:} & & \\
0 & < & 2n - 1 < (n+1)^2 - 2n \\
\text{puesto que } n \geq 1 & & \\
0 & < & (n+1)^2 - 2n \\
2n & < & (n+1)^2 \qquad / + 2 \\
2n + 2 & < & (n+1)^2 + 2 \\
2(n+1) & < & (n+1)^2 + 2
\end{array}$$

Así $A = \mathbb{N}$

■

9. Pruebe por inducción que $F(n) : 2^n > n^2 + 4n + 5$ con $n \geq 7$.

   Demostración. Definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

   a) Notar que $7 \in A$, pues $\underbrace{2^7}_{128} > \underbrace{7^2 + 4 \cdot 7 + 5}_{82}$
   b) Asumamos verdadero que $F(n)$: (Hipótesis de inducción)

c) Por demostrar que $F(n+1): 2^{n+1} > (n+1)^2 + 4(n+1) + 5$

d) Demostración:

$$\begin{array}{rcl} 2^n & > & n^2 + 4n + 5 \qquad / \cdot 2 \\ 2^{n+1} & > & 2n^2 + 8n + 10 \\ 2^{n+1} & > & n^2 + 6n + 10 + n^2 + 2n > n^2 + 6n + 10 \\ 2^{n+1} & > & n^2 + 6n + 10 \\ 2^{n+1} & > & n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 5 \\ 2^{n+1} & > & (n+1)^2 + 4(n+1) + 5 \end{array}$$

Así $A = \mathbb{N}$

■

10. Pruebe por inducción que $F(n): 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$, en donde $r \neq 1, n \neq 0$

Demostración. Definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : F(n) \text{ es verdadera}\}$$

a) Notar que $1 \in A$, pues $\dfrac{r^1 - 1}{r - 1} = \dfrac{r - 1}{r - 1} = 1$

b) Asumamos verdadero que $F(n): 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ (Hipótesis de inducción)

c) Por demostrar que $F(n+1): 1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}+r^n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$

d) Demostración:

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}}_{F(n)} + r^n & = & \dfrac{r^n - 1}{r - 1} + r^n \\ & = & \dfrac{r^n - 1 + r^n(r-1)}{r - 1} \\ & = & \dfrac{r^n(1 + r - 1) - 1}{r - 1} \\ & = & \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \end{array}$$

Así $A = \mathbb{N}$

■

1.2.2. Ejercicios Propuestos

1. Pruebe por inducción que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

2. Pruebe por inducción que

$$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

3. Pruebe por inducción que $6^{n+1}+4$ es divisible por 5, para todo $n\in\mathbb{N}$.

4. Pruebe por inducción que $n(n^2+5)$ es divisible por 3, para todo $n\in\mathbb{N}$.

5. Pruebe por inducción que $2^n>n+2$ con $n\geq 3$

6. Pruebe por inducción que $2^{3^n}>3^{2^n}$ con $n\geq 2$

7. Pruebe por inducción que $n!\geq 2^{n-1}$ con $n\geq 1$

8. Pruebe por inducción que

$$\sum_{i=1}^{n}(4i+1)=2n^2+3n$$

9. Pruebe por inducción que

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{n^2}$$

10. Pruebe por inducción que

$$\sum_{i=1}^{n-1}i^3<\frac{n^4}{4}<\sum_{i=1}^{n}i^3$$

1.3. Aplicaciones

1.3.1. Relaciones Binarias

Relaciones

Al establecer una correspondencia entre dos conjuntos, sus elementos deben satisfacer cierta propiedad, formando de esta manera un conjunto de pares ordenados que verifican la propiedad dada. Las diversas maneras mediante las cuales se pueden establecer los pares ordenados, constituyen una relación.

Ejemplo 50 *Considere los conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{1, 2\}$, *entonces el conjunto* $R = \{(x, y) \in A \times B / x + y \geq 4\}$ *constituye una relación binaria de* A *en* B. *Nótese que* $R = \{(2, 2); (3, 1); (3, 2)\} \subseteq A \times B$

Definición 51 *Diremos que* R *es una relación de* A *en* B *si y solo si*

$$R \subseteq A \times B.$$

Notación 52

1. *R es una relación de A en B también se anota por* $R : A \longrightarrow B$.
2. *Si el par (x, y) pertenece a R, se acostumbra a denotar de las siguientes formas:* $(x, y) \in R \vee xRy \vee y = R(x)$.

Dominio y Recorrido

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación, entonces:

Definición 53 *El dominio de la relación, anotado* $Dom(R)$ *corresponde a:*

$$Dom(R) = \{x \in A / \exists y \in B : xRy\}.$$

Definición 54 *El recorrido o Imagen de una relación, anotado por* $Rec(R)$ *o* $Im(R)$ *corresponde a:*

$$Rec(R) = \{y \in B / \exists x \in A : xRy\}.$$

Ejemplo 55 *Sea* $R : A \longrightarrow A$ *una relación, en donde* $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *dada por:*

$$R = \{(2, 2); (3, 5); (5, 5); (5, 8); (6, 10); (7, 9); (8, 9); (9, 10); (10, 10)\}$$

esta relación tiene un número finito de elementos y además note que $Dom(R) = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *y* $Rec(R) = \{2, 5, 8, 9, 10\}$.

Ejemplo 56 *Sea $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:*

$$S := \{(x, y)/2x + 5y = 12\},$$

esta es una relación con infinitos elementos y que $Dom(S) = Rec(S) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 57 *Sea $T : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por:*

$$T := \{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}.$$

Nótese que tanto x como y son números enteros, por tanto esta relación consta solo de 4 elementos, que son $\{(1, 0); (0, 1); (-1, 0); (0, -1)\}$ en donde $Dom(T) = Rec(T) = \{-1, 0, 1\}$.

En este mismo ejemplo, si en lugar de $\mathbb{Z}$ se toma $\mathbb{R}$ la relación contiene infinitos elementos y $Dom(T) = Rec(T) = [1, 1]$.

Composición de Relaciones

Definición 58 *Sea $R : A \longrightarrow B$ y $S : B \longrightarrow C$ dos relaciones. Se define la composición de R con S, anotada $S \circ R$, como:*

$$S \circ R := \{(x, y)/\exists z \in B : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}.$$

Ejemplo 59 *Sea $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ y $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Sean $R = \{(5, 5); (6, 7); (9, 6)\}$ y $S = \{(5, 1); (6, 7); (6, 9); (7, 3)\}$.*

Note que $S \circ R = \{(5, 1); (6, 3); (9, 9)\}$.

Ejemplo 60 *Sean R, S dos relaciones definidas por:*

$$R = \{(x, y)/y = 3x - 1\},$$

$$S = \{(x, y)/x = y^2\}.$$

$$\begin{array}{rcl} \textit{Note que } (x, y) \in S \circ R & \Leftrightarrow & \exists z \in \mathbb{R} : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \\ & \Leftrightarrow & y = 3x - 1 \wedge z = y^2 \\ & \Leftrightarrow & z = (3x - 1)^2 \end{array}$$

Luego $S \circ R = \{(x, y)/y = (3x - 1)^2\}$.

Observación 61 *La composición de relaciones no es conmutativa, es decir, $R \circ S \neq S \circ R$.*

Proposición 62 *Sean $R, S, T \subseteq A \times B$, entonces:*

1. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
2. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

Relación Inversa

Definición 63 *Sea $R : A \to B$ una relación. Se define R^{-1} como:*

$$R^{-1} = \{(x, y) \in B \times A/(y, x) \in R\}.$$

Observación 64 *Nótese que Dom(R^{-1}) = Rec(R) y Rec(R^{-1}) = Dom(R).*

Proposición 65 *Sean $R, S \subseteq A \times B$, entonces:*

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
3. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

1.3.2. Aplicaciones

El concepto de función o de aplicación es, probablemente, la noción más importante y universal presente siempre a través de la matemática moderna. Este concepto aparece cuando se relacionan cantidades mediante una relación determinada.

Definición 66 *Si A y B son conjuntos no vacíos, entonces una función de A en B es un subconjunto M de $A \times B$, tal que satisface:*

1. *Existencia: para todo elemento $a \in A$, existe $b \in B$ tal que el par ordenado $(a, b) \in M$.*
2. *Unicidad: Si $(a, b) \in M$ y $(a, c) \in M$, entonces $b = c$.*

Este concepto también se puede definir mediante lo siguiente:

Definición 67 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una relación, se dice que f es una función si y solo si:*

$$\forall x \in A, \exists! y \in B : y = f(x).$$

Ejemplo 68 *Definamos las siguientes relaciones:*

1. $f_1 = \{(a, 1); (b, 1); (d, 4)\}; \quad A = \{a, b, c, d\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4\}.$
2. $f_2 = \{(a, 1); (a, 2); (b, 3)\}; \quad A = \{a, b\}; \quad B = \{1, 2, 3\}.$
3. $f_3 = \{(a, 5); (b, 5); (c, 5); (d, 5)\}; \quad A = \{a, b, c, d\}; \quad B = \{4, 5, 8\}.$
4. $f_4 = \{(a, a); (b, c); (c, b); (d, e); (e, e)\}; \quad A = B = \{a, b, c, d, e\}.$

De estas relaciones sólo f_3 y f_4 son aplicaciones.

Ejemplo 69 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = \dfrac{5x-1}{x-3}$*, esta relación así definida no es una función, pues* $Dom(f) \neq \mathbb{R}$*, puesto que* $x = 3$ *no tiene imagen.*

Ejemplo 70 *Sea* f *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & si\ x \geq 5 \\ 5x & si\ x \leq 5 \end{cases}$$

Nótese que f *no es una función pues* $f(5)$ *no tiene una sola imagen.*

1.3.3. Tipos de Aplicaciones

Definición 71 *Una aplicaión* $f : A \to B$ *se dice inyectiva si y solo si* $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Ejemplo 72 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 5x + 2$*. Esta función es inyectiva, pues:*

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : \ Si\ f(x) = f(y) \ &\Leftrightarrow\ 5x + 2 = 5y + 2 \\ &\Leftrightarrow\ 5x = 5y \\ &\Leftrightarrow\ x = y. \end{aligned}$$

Ejemplo 73 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 - 7x + 12$*, nótese que que esta función no es inyectiva pues* $f(3) = f(4)$.

Ejemplo 74 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \geq 0 \\ 5x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Aparentemente esta función es inyectiva, pues lo es para $x \geq 0$ *como también para* $x \leq 0$*, pero no es suficiente, pues* $f(-5) = f(1)$.

Definición 75 *Una aplicaión* $f : A \to B$ *se dice epiyectiva o sobreyectiva si y solo si* $Im(f) = B$.

Ejemplo 76 *La función del Ejemplo 69 no es epiyectiva, pues para* $y = 5$ *no se tiene preimagen.*

Ejemplo 77 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty)$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x > 0 \\ x^2+1 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Nótese que esta función es epiyectiva, puesto que:

i) Si $x \leq 0$ entonces $y = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$ y como $x \leq 0$ se tiene que $x = -\sqrt{y-1}$ lo que es válido si y solo si $y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$.

ii) Si $x > 0$ entonces $y = x + 2 \Leftrightarrow x = y - 2$ y como $x > 0 \Rightarrow y - 2 > 0 \Leftrightarrow y > 2$.

Luego, de ambas condiciones resulta que $\mathrm{Dom}(f) = [1, \infty)$ lo que prueba que f es epiyectiva.

Definición 78 *Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es biyectiva si y solo si es inyectiva y epiyectiva a la vez.*

Ejemplo 79 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx + n$ donde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{R}$ es una función biyectiva.*

Proposición 80 *Sea $f : A \longrightarrow B$ un función, f es una biyección si y solo si f^{-1} es una función.*

Demostración. Ejercicio. ■

1.3.4. Compuesta de Aplicaciones

Sean las funciones $g : A \longrightarrow B$ y $f : B \longrightarrow C$, además $\mathrm{Im}(g) \subseteq B$,

$$\forall x \in A, \exists z \in B \text{ tal que: } z = g(x), \tag{1.1}$$

$$\forall x \in \mathrm{Im}(g), \exists y \in C \text{ tal que: } y = f(z). \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) se concluye que $y = f(g(x))$ lo cual se denotar por $y = (f \circ g)(x)$.

Ejemplo 81 *Definamos en $\mathbb{R}$ las siguientes funciones:*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 7 \\ g(x) &= 5x + 3 \end{aligned}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(5x + 3) \\ &= 2(5x + 3)^2 + 7 \\ &= 50x^2 + 60x + 25 \end{aligned}$$

y además que:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g\left(2x^2+7\right)\\ &= 5(2x^2+7)+3\\ &= 10x^2+38\end{aligned}$$

Observación 82 *Con el Ejemplo 81 es suficiente para decir que* $f\circ g\neq g\circ f$.

Proposición 83 *Sean* f,g,h *tres funciones con dominio e imagen adecuados, entonces* $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$.

Demostración. Ejercicio. ■

1.3.5. Aplicaciones Monótonas

Definición 84 *Sea* f *definida en un intervalo* A*, se dice que* f *es* **creciente** *en* A *si* $f(x_1)<f(x_2)$ *siempre que* $x_1<x_2$ *y* $x_1,x_2\in A$*. Análogamente,* f *es* **decreciente** *en* A *si* $f(x_1)>f(x_2)$ *siempre que* $x_1<x_2$ *y* $x_1,x_2\in A$.

Definición 85 *Una aplicación* f *se dice monótona en su dominio* D *si es creciente o decreciente en* D.

Teorema 86 *Si* $m>0$*, entonces* $y=f(x)=mx+n$ *es una aplicación creciente en cualquier intervalo.*

Demostración. Notemos que $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$, entonces para cualesquiera $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tales que $x_1<x_2$, debemos demostrar que $f(x_1)<f(x_2)$, luego:

$$\begin{aligned}\text{Si } x_1<x_2 &\Leftrightarrow mx_1<mx_2 \qquad /\cdot m>0\\ &\Leftrightarrow mx_1+n<mx_2+n \qquad /+n\\ &\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\end{aligned}$$

■

1.3.6. Aplicación Valor Absoluto

La aplicación valor absoluto se define de la siguiente manera:

Definición 87

$$\begin{aligned}|\cdot|:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+\\ x &\longmapsto |x|=\begin{cases} x & si\ x\geq 0\\ -x & si\ x<0\end{cases}\end{aligned}$$

Su gráfica se muestra en la Figura 1.1:

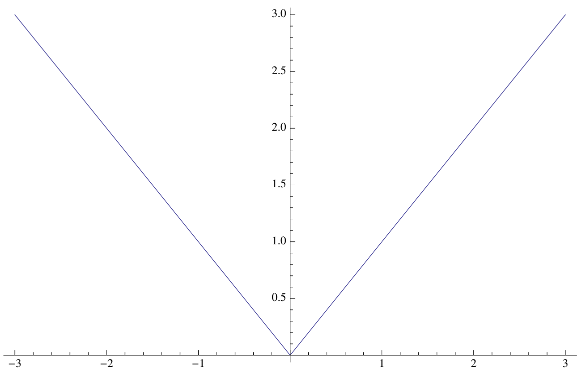

Figura 1.1: Gráfica función $f(x) = |x|$

1.3.7. Propiedades de Valor Absoluto

Proposición 88 *Para $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. *Si $a \geq 0$, entonces $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$*
4. *Si $a \geq 0$, entonces $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $|x| \geq a \Leftrightarrow -a \geq x \vee x \geq a$*
5. $-|x| \leq x \leq |x|$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$
7. $|xy| = |x| \cdot |y|$

Demostración. Demostraremos la *Propiedad 5* y la *Propiedad 6*

Propiedad 5.

Caso 1 Supongamos que $x \geq 0$, entonces $0 \geq -x$ y además $|x| = x$, luego:

$$-x = -|x| \leq 0 \leq x = |x|,$$

es decir,

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Caso 2 Supongamos que $x \leq 0$, entonces $0 \leq -x$ y además $|x| = -x$ o bien $-|x| = x$, luego:

$$-|x| = x \leq 0 \leq -x = |x|,$$

es decir,

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

■

Propiedad 6. Sabemos por la *Propiedad 5* que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

Sumando, se obtiene

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

y por la *Propiedad 3*, tenemos

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{1.3}$$

■

Las demas propiedades quedan de ejercicio. ■

1.3.8. Aplicación Parte entera

A continuación definiremos la función parte entera, que más adelante nos servirá para introducir el concepto de continuidad de una función.

Las funciones de parte entera son funciones que tienen como dominio los números reales y lo que *devuelven* es el número entero más próximo al él, ya sea por defecto o por exceso, ahora definiremos la función parte entera por defecto, también conocida como *función piso o suelo*

Definición 89

$$\begin{array}{rccl} \lfloor\cdot\rfloor : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor := \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \end{array}$$

La función Parte Entera también se puede expresea de la siguiente forma:

$$y = \lfloor x \rfloor := \{y \in \mathbb{Z} : x \in \mathbb{R} \wedge y \leq x < y + 1\}$$

y su gráfica es:

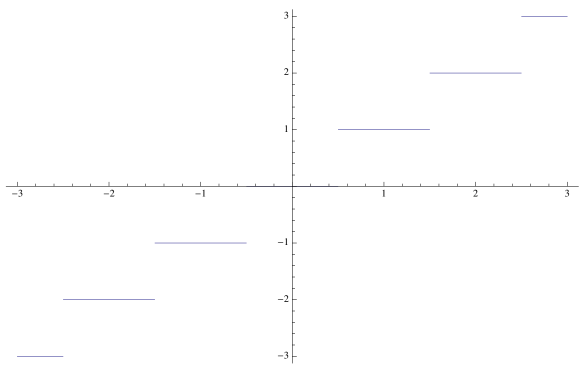

Figura 1.2: Gráfica de la función parte entera.

1.3.9. Aplicación Parte decimal

A continuación definiremos otra función que también es muy comuún para analizar continuidad y va estrechamente relacionada con la función Parte Entera, esta es la función Parte Decimal

Definición 90

$$\begin{array}{rccl} \{\cdot\}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \{x\} = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \end{array}$$

1.3.10. Aplicación Cuadrática

A continuación definiremos formalmente la función cuadrática en forma general, sin entrar en grandes detalles de la ecuación cuadrática ni su gráfica. Para ello, sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces definimos:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = ax^2 + bx + c \end{array}$$

Representación Gráfica

Si representamos todos los puntos $(x, f(x))$ de una aplicación cuadrática, obtenemos siempre una curva llamada *parábola*, es decir, que la parábola es la representación gráfica de la aplicación cuadrática.

Esta parábola tiene algunas características que dependen de los coeficientes de la ecuación asociada a la aplicación cuadrática, que pasamos a enumerar a continuación.

1. **Orientación de la parábola** o más precisamente, de la convexidad o de la concavidad. Si la función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$ entonces la orientación depende del valor de a, lo que se detalla:

    - Si $a > 0$ entonces la parábola es cóncava o con las ramas hacia arriba.

    Ejemplo 91 *Miremos la siguiente parábola en la Figura 1.3*

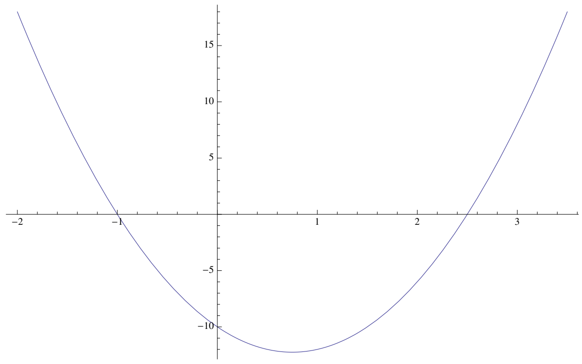

Figura 1.3: Gráfico f tal que $f(x) = 4x^2 - 6x - 10$.

- Si $a < 0$ entonces la parábola es convexa o con las ramas hacia abajo.

  Ejemplo 92 *La siguiente figura ilustra lo anterior:*

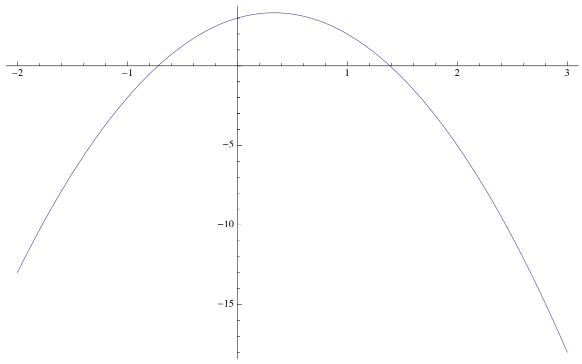

Figura 1.4: Gráfico de f tal que $f(x) = -3x^2 + 2x + 3$.

2. **Interceptos con el eje de las abscisas** lo que corresponde a las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática asociada, o bien a encontrar todos los $x \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) tales que $f(x) = 0$ y estas se pueden encontrar con la siguiente expresión, conocida como la fórmula para encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   Observación 93 *Dada la naturaleza de esta fórmula, es necesario tener presente que la cantidad subradical, denotada generalmente por $\Delta = b^2 - 4ac$, juega un papel importante las raíces o soluciones de nuestra aplicación cuadrática, así:*

   - *si $\Delta > 0$ existen dos soluciones reales y distintas, es decir, que la gráfica corta el eje X en dos puntos,*

- *si* $\Delta = 0$ *tambieén existen dos soluciones reales, pero son iguales, es decir que la gráfica corta en sólo un punto el eje* X*,*
- *si* $\Delta < 0$ *existen dos soluciones, pero son complejas* $(\mathbb{C})$*, es decir, que la gráfica on corta el eje* X*.*

3. **Intercepto con el eje de las ordenadas**, para encontrar este punto, es necesario utilizar el hecho que en el eje Y, la abscisa es 0, luego, el punto buscado es $(0, f(0))$ o simplemente $(0, c)$.

4. **Eje de simetría:** corresponde a una recta vertical que se encuentra en:
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$
en donde x_1 y x_2 corresponden a las raíces de la ecuación cuadrática asociada, o bien se puede encontrar mediante sus coeficientes:
$$x = -\frac{b}{2a}$$

5. **Vértice**: corresponde al punto de intersección entre la parábola y el eje de simetría, y corresponde al máximo o mínimo de la parábola (dependiendo de su orientación). Se puede encontrar mediante la expresión:
$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Observación 94 *También se puede realizar un estudio detallado de la parábola, desde el punto de vista de las secciones cónicas (Geometría Analítica), tema que no trataremos en este texto.*

Propiededades de las raíces o Soluciones

Sabiendo que las raíces de una ecuación cuadrática son x_1, x_2, entonces:

1. **Suma de las raíces:**
$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Demostración.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-b + \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}} + -b - \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a} \\
&= \frac{-b - b}{2a} \\
&= -\frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

■

2. **Producto de las raíces:**

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Demostración. Ejercicio. ■

1.3.11. Aplicación Raíz Cuadrada

En este apartado definiremos la Aplicación Raíz cuadrada, sin dejar de mencionar que la raíz puede definirse para cualquier orden, solo se debe prestar atención en el dominio de la función cuando el orden de la raíz es par.

Definición 95

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Veamos su gráfica en la Figura 1.5

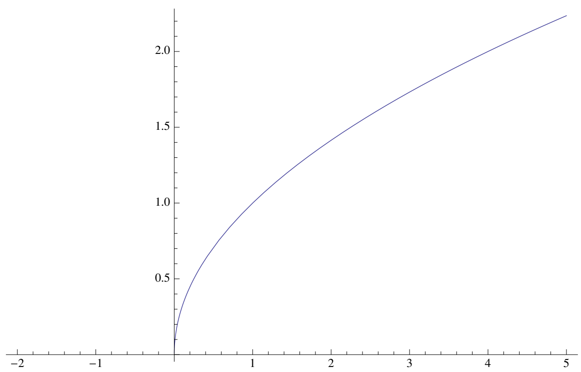

Figura 1.5: Gráfico de f tal que $f(x) = \sqrt{x}$.

1.3.12. Aplicación Exponencial

Definición 96 *Para poder definir la Aplicación Exponencial, primero fijemos un número real que actuará como base, sea $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, entonces*

$$\begin{array}{rccl} exp_b(\cdot): & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & exp_b(x) := b^x \end{array}$$

Como ejemplo, observemos la gráfica de $\exp_2$

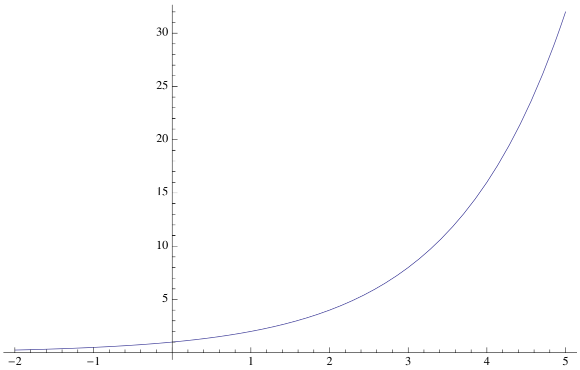

Figura 1.6: Gráfico de $\exp_2$

Observación 97 *Cuando $b = e$, donde e es el número de Euler, simplemente anotaremos exp.*

Observación 98 *El número e, conocido a veces como número de Euler o constante de Napier, fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático. Es considerado el número por excelencia del cálculo, así como π lo es de la geometría y el número i del análisis complejo. Su valor aproximado truncado es $e = 2,71828182845904\ldots$*

1.3.13. Aplicación Logarítmica

Al igual que con la aplicación exponencial, para poder definir la aplicación logarítmica, fijemos una base $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, luego:

Definición 99

$$\begin{array}{rccl} log_b: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & log_b(x) = a \Leftrightarrow b^a = x \end{array}$$

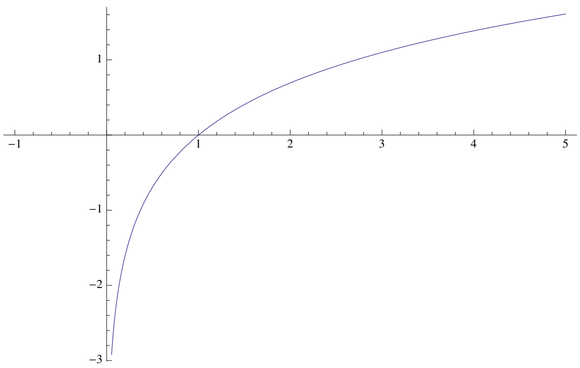

Figura 1.7: Aplicación definida por $\log_2(x)$

Proposición 100 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ y sean $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
2. $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
3. $\log_b(x)^p = p\log_b(x) \quad$ *con* $p \in \mathbb{R}$
4. $\log_b(x) = \dfrac{\log_c(x)}{\log_c(b)} \quad$ *Teorema de Cambio de Base*
5. $b^{\log_b(x)} = x$
6. $\log_b(b) = 1$
7. $\log_b(1) = 0$

Observación 101 *Si la base de la aplicación logaritmo es $b = e$, el número de Euler, anotaremo ln, es decir $log_e(x) = ln(x)$, y es llamado logarítmo natural.*

1.3.14. Aplicaciones Trigonométricas

Definición 102 *Llamamos circunferencia unitaria o trigonométrica a aquella cuyo centro coincide con el origen de un sistema de coordenadas y su radio es unitario.*

Observación 103 *Sea $t \in \mathbb{R}^+$. A partir del punto $A(1, 0)$ y sobre la circunferencia podemos considerar un movimiento positivo (en sentido antihorario) de t unidades, obtenemos así un punto de la circunferencia, que llamamos punto trigonométrico y que designamos por $M(t)$; el movimiento puede ser negativo también, esto es en sentido horario. Con esta descripción hemos definido la función movimiento P tal que:*

$$\begin{array}{rccl} M: & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & M(t) = (x, y) \end{array}$$

donde $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 = 1\}$.

Ejemplo 104 *Como la longitud de la circunferencia unitaria es 2π entonces es fácil determinar las imagenes de los números reales que sean múltiplos de $\frac{1}{2}\pi$, así: $M(\frac{1}{2}\pi) = (0, 1)$, $\quad M(\pi) = (-1, 0)$, $\quad M(-\frac{1}{2}\pi) = (0, -1)$.*

Definición 105 *Dada la función de movimiento $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto M(t) = (x, y)$ donde $x^2 + y^2 = 1$, podemos definir las funciones trigonométricas como sigue:*

$$\begin{array}{rcccccl} cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & M(x,y) & \mapsto & pr_1(x,y) = x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccl} sen: & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & M(x,y) & \mapsto & pr_2(x,y) = y, \end{array}$$

donde cos *es llamada coseno y* sin *es llamada seno.*

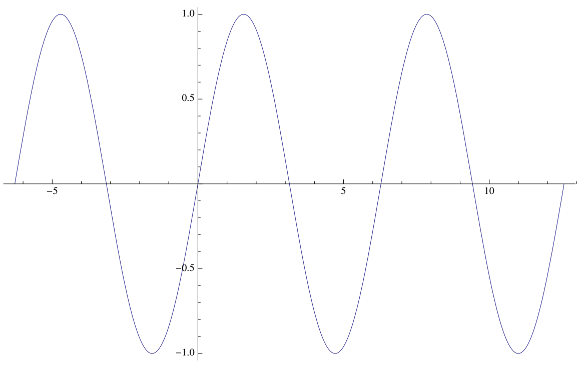

Figura 1.8: Función Seno

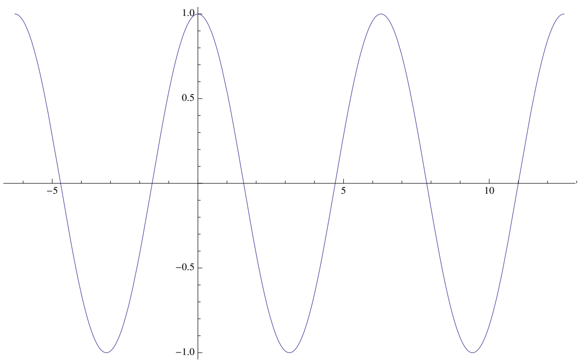

Figura 1.9: Función Coseno

1.3.15. Ejercicios Resueltos

1. Sean $R, S \subseteq A \times B$, pruebe que $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\text{Sea } (x,y) \in (R \circ S)^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in (R \circ S) \\
&\Leftrightarrow (\exists z)\,((y,z) \in R \wedge (z,x) \in S) \\
&\Leftrightarrow (\exists z)\left((z,y) \in R^{-1} \wedge (x,z) \in S^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow (\exists z)\left((x,z) \in S^{-1} \wedge (z,y) \in R^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in S^{-1} \circ R^{-1}.
\end{aligned}$$

■

2. Sean $R, S \subset A \times B$, pruebe que $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

   Demostración.

$$\begin{aligned}
\text{Sea } (x,y) \in (R \circ S)^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in (R \circ S) \\
&\Leftrightarrow (\exists z)\,((y,z) \in S \wedge (z,x) \in R) \\
&\Leftrightarrow (\exists z)\left((x,z) \in R^{-1} \wedge (z,y) \in S^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

■

3. Dada la siguiente relación:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$$

   Determine $\mathrm{Dom}(R)$, $\mathrm{Rec}(R)$ y R^{-1}.

   Solución. Para determinar el dominio de esta relación, despejaremos y en función de x y haremos restricción si es necesario, luego:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 &\Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9} \\
&\Leftrightarrow \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{9 - x^2}{9}} \\
&\Leftrightarrow y = 2\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}
\end{aligned}$$

   Luego, la restricción es:

$$\begin{aligned}
9 - x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 \leq 9 \\
&\Leftrightarrow |x| \leq 3 \\
&\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3
\end{aligned}$$

   Por lo tanto $\mathrm{Dom}(R) = [-3, 3]$.

Ahora para determinar el recorrido, despejaremos x en función de y y haremos restricción si es necesario, luego:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}=1-\frac{y^2}{4}\\
&\Leftrightarrow \frac{x}{3}=\sqrt{\frac{4-y^2}{4}}\\
&\Leftrightarrow y=3\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}.
\end{aligned}$$

Luego, la restricción es:

$$\begin{aligned}
4-y^2\geq 0 &\Leftrightarrow y^2\leq 4\\
&\Leftrightarrow |y|\leq 2\\
&\Leftrightarrow -2\leq y\leq 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\operatorname{Rec}(R)=[-2,2]$.

Por último, la relación inversa corresponde a:

$$\begin{aligned}
R^{-1} &= \{(x,y)/(y,x)\in R\}\\
&= \left\{(x,y):\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1\right\}.
\end{aligned}$$

■

4. Sean las relaciones definidas en $\mathbb{R}$,

$$R=\{(x,y)/y=2x\} \text{ y } S=\{(x,y)/y=2x^3\},$$

determine $S\circ R$ y $R\circ S$.

Solución.

$$\begin{aligned}
S\circ R &= \{(x,y)/\exists z\in\mathbb{R}:(x,z)\in R\wedge(z,y)\in S\}\\
&= \{(x,y)/z=2x\wedge y=2z^3\}\\
&= \{(x,y)/y=2(2x)^3\}\\
&= \{(x,y)/y=16x^3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R\circ S &= \{(x,y)/\exists z\in\mathbb{R}:(x,z)\in S\wedge(z,y)\in R\}\\
&= \{(x,y)/z=2x^3\wedge y=2z\}\\
&= \{(x,y)/y=2(2x^3)\}\\
&= \{(x,y)/y=4x^3\}
\end{aligned}$$

■

5. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$,

   a) Si $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1]$, determine $\mathrm{Rec}(f)$,

   b) Si $\mathrm{Rec}(f) =]1, 2]$, calcule $\mathrm{Dom}(f)$.

Solución.

a)

$$\begin{aligned}
\text{Como } y = \frac{x+1}{x} &\Rightarrow xy = x + 1 \\
&\Rightarrow xy - x = 1 \\
&\Rightarrow x(y-1) = 1 \\
&\Rightarrow x = \frac{1}{y-1} \\
\text{y como } x \in (-\infty, -1] &\Rightarrow \frac{1}{y-1} \leq -1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{y-1} + 1 \leq 0 \\
&\Rightarrow \frac{1+y-1}{y-1} \leq 0 \\
&\Rightarrow \frac{y}{y-1} \leq 0
\end{aligned}$$

	$(\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
y	-	+	+
y-1	-	-	+
	+	-	+

Por lo tanto $\mathrm{Rec}(f) = [0, 1[$.

b)

$$\begin{aligned}
\text{Como } y \in]1, 2] &\Leftrightarrow 1 < y \leq 2 \\
&\Leftrightarrow 1 < \frac{x+1}{x} \leq 2 \\
&\Leftrightarrow 1 < \frac{x+1}{x} \quad \wedge \quad \frac{x+1}{x} \leq 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} - 1 > 0 \quad \wedge \quad \frac{x+1}{x} - 2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0 \quad \wedge \quad \frac{1-x}{x} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow x > 0 \quad \wedge \quad (x < 0 \vee x \geq 1) \\
&\Leftrightarrow x \geq 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Dom}(f) = [1, \infty)$.

■

6. Pruebe que la función:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{x-3}{1+2x} \end{array}$$

es biyectiva y calcule su inversa.

Demostración. Primero verifiquemos que f es inyectiva, luego:

$$\begin{array}{rcl} \text{Si } f(x)=f(y) & \Leftrightarrow & \dfrac{x-3}{1+2x}=\dfrac{y-3}{1+2y} \\ & \Leftrightarrow & (x-3)(1+2y)=(1+2x)(y-3) \\ & \Leftrightarrow & x+\cancel{2yx}-\cancel{3}-6y=y-\cancel{3}+\cancel{2xy}-6x \\ & \Leftrightarrow & 7x=7y \\ & \Leftrightarrow & x=y \end{array}$$

Ahora determinemos el recorrido de f para verificar que sea epiyectiva, luego:

$$\text{Rec}(f) \quad = \quad \left\{y\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}/\exists x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}:f(x)=y\right\}$$

despejando x en función de y, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} y=f(x) & \Leftrightarrow & y=\dfrac{x-3}{1+2x} \\ & \Leftrightarrow & (1+2x)y=x-3 \\ & \Leftrightarrow & y+2xy=x-3 \\ & \Leftrightarrow & 2xy-x=-y-3 \\ & \Leftrightarrow & x(2y-1)=-y-3 \\ & \Leftrightarrow & x=\dfrac{y+3}{1-2y} \end{array}$$

Luego la única restricción es $y\neq\dfrac{1}{2}$, por lo que

$$\text{Rec}(f)=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\},$$

así f es epiyectiva.

Por último, ya asegurada la biyectividad, la inversa quedará definida por:

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{1-2x} \end{array}$$

■

7. Dada la función $f(x) = x^2+7x+10$, encuentre el dominio, el recorrido y la inversa de esta función si existe.

   Solución. Primero, digamos que una función cuadrática es una función polinomial, y como tal, su dominio es $\mathbb{R}$, luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

   Para encontrar el recorrido, escribiremos $y = x^2 + 7x + 10$ y despejaremos x en función de y para hecer restricciones si es pertinente, entonces:

$$\begin{aligned} y = x^2 + 7x + 10 \quad &\Leftrightarrow \quad y = x^2 + 7x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 10 \\ &\Leftrightarrow \quad y = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad y + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{y + \frac{9}{4}} = \left|x + \frac{7}{2}\right| \end{aligned}$$

   La restricción es

$$y + \frac{9}{4} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq -\frac{9}{4}$$

   Por tanto, $\text{Rec}(f) = \left[-\frac{9}{4}, \infty\right)$.

   Por último, para que exista inversa, la función debe ser inyectiva, verifiquemos si esta función posee esta caracterítica.

$$\begin{aligned} \text{Si } f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad x^2 + 7x + 10 = y^2 + 7y + 10 \\ &\Rightarrow \quad \left(x + \frac{7}{2}\right) - \frac{9}{4} = \left(y + \frac{7}{2}\right) - \frac{9}{4} \\ &\Rightarrow \quad \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow \quad \left|x + \frac{7}{2}\right| = \left|y + \frac{7}{2}\right| \end{aligned}$$

   De esta igualdad obtenida, notemos que $x_0 = -\frac{7}{2}$ es un punto crítico de la función, y no podemos concluir que $x = y$ como nos pide la condicción de inyectividad, por tanto no puede existir una función inversa, no obstante, con los datos que hemos recorrido hasta ahora, podemos definir f por tramos que sean biyectivos para encontrar inversas locales, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1 : \quad \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right] \quad &\longrightarrow \quad \left[-\frac{9}{4}, \infty\right) \\ x \quad &\longmapsto \quad f_1(x) = x^2 + 7x + 10 \end{aligned}$$

y

$$\begin{array}{rccc} f_2: & \left[-\dfrac{7}{2},\infty\right) & \longrightarrow & \left[-\dfrac{9}{4},\infty\right) \\ & x & \longmapsto & f_2(x) = x^2+7x+10 \end{array}$$

Luego, las inversas locales respectivas son:

$$\begin{array}{rccc} f_1^{-1}: & \left[-\dfrac{9}{4},\infty\right) & \longrightarrow & \left(-\infty,-\dfrac{7}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & f_1^{-1}(x) = -\dfrac{7}{2}-\sqrt{y+\dfrac{9}{4}} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} f_2^{-1}: & \left[-\dfrac{9}{4},\infty\right) & \longrightarrow & \left[-\dfrac{7}{2},\infty\right) \\ & x & \longmapsto & f_2^{-1}(x) = -\dfrac{7}{2}+\sqrt{y+\dfrac{9}{4}} \end{array}$$

Observación 106 *En capítulos siguientes, se desarrollará un método más eficientes para encontrar el punto crítico aquí mencionado.*

■

8. Considere las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad g(x) = \frac{x-1}{x+1},$$

determine $f \circ g$ y $g \circ f$. Explicite sus dominios.

Solución. Primero, el dominio de cada función es

i) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
ii) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ahora, para determinar las compuestas con sus respectivos dominios son:

a) $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) / g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$
De esto, se deduce que:

- $x \in \mathrm{Dom}(g) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
- $g(x) \in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
  De este último punto se desprenden dos condiciones más:
  - Restricción: $x \neq -1$
  - $\dfrac{x-1}{x+1} \neq 1 \Leftrightarrow x-1 \neq x+1 \Leftrightarrow -1 \neq 1$ Tautología.

  Por tanto $g(x) \in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Luego,

$$\mathrm{Dom}(f) = (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

Para explicitar $f \circ g$, haremos lo siguiente:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1} - 1} = \frac{x+1}{-2}$$

b) $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) / f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$ Procederemos de la misma forma, luego:

- $x \in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $f(x) \in \mathrm{Dom}(g) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ Nuevamente, de este punto se desprenden dos condiciones:
  - Restrición: $x \neq 1$
  - $\dfrac{1}{x-1} \neq -1 \Leftrightarrow 1 \neq -x + 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

  Por tanto, $f(x) \in \mathrm{Dom}(g) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Luego,

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Por último, explicitemos la compuesta:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{x-1} - 1}{\frac{1}{x-1} + 1} = \frac{2-x}{x}$$

■

9. Sean $f(x) = 5 - 3x$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ funciones reales, encuentre $g \circ f^{-1}$.

Solución. Primero necesitamos encontrar f^{-1} para dar respuesta al problema, entonces:

Lema 107 *La función $f(x) = 5 - 3x$ es biyectiva.*

Demostración. Ejercicio. ■

Sabiendo que f es biyectiva, se tiene:

$$\begin{aligned} y = 5 - 3x &\Leftrightarrow y - 5 = -3x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5-y}{3}. \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \dfrac{5-x}{3} \end{array}$$

Para encontrar $g \circ f^{-1}$, haremos:

$\mathrm{Dom}(g \circ f^{-1}) = \{x \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) / f^{-1}(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$, luego:

- $x \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
- $f^{-1}(x) \in \mathrm{Dom}(g) \Leftrightarrow \dfrac{5-x}{3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Luego $\mathrm{Dom}(g \circ f^{-1}) = \mathbb{R}$ Para explicitar la compuesta, se tiene:

$$\left(g \circ f^{-1}\right)(x) = g\left(f^{-1}(x)\right) = g\left(\frac{5-x}{3}\right) = \sqrt{\left(\frac{5-x}{3}\right)^2 + 1}$$

Así:

$$\begin{array}{rccl} g \circ f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g \circ f^{-1} = \sqrt{\left(\dfrac{5-x}{3}\right)^2 + 1} \end{array}$$

■

10. Sea $f :]-1, \infty]$, tal que $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

    a) Pruebe que f es creciente,

    b) Demuestre que f es acotada superiormente.

Demostración.

a) Sean $x_1, x_2 \in]-1, \infty]$ tal que $x_1 < x_2$, luego:

$$\begin{array}{rcl} f(x_2) - f(x_1) & = & \dfrac{x_2}{x_2+1} - \dfrac{x_1}{x_1+1} \\ & = & \dfrac{x_2(x_1+1) - x_1(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)} \\ & = & \dfrac{x_2 \cdot x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 - x_1}{(x_1+1)(x_2+1)} \\ & = & \dfrac{x_2 - x_1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0 \end{array}$$

Por tanto $f(x_1) \leq f(x_2)$.

b) Dado $x \in]-1, \infty]$, se tiene:

$$\begin{array}{rcll} 0 & \leq & 1 & / + x \\ x & \leq & x+1 & / : (x+1) > 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \leq & 1 & \\ f(x) & \leq & 1, & \forall x \in]-1, \infty] \end{array}$$

Por lo tanto f está acotada superiormente.

■

1.3.16. Ejercicios Propuestos

1. Dados $m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$, pruebe que la función:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = mx + n \end{array}$$

   es una función biyectiva. Determine f^{-1}.

2. Demuestre que $f(x) = mx + n$ es una aplicación decreciente si y solo si $m < 0$.

1.4. Sucesiones

Definición 108 *Una sucesión es una aplicación con dominio en* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *y recorrido en* $\mathbb{R}$*, tal que a cada número natural le corresponde un un número real, es decir:*

$$\begin{array}{rccl} s: & \mathbb{N} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & s(n) := a_n \end{array}$$

En general, si $k \in \mathbb{N}$, diremos que a_k es el término $k-$ésimo o término general de la sucesión

Ejemplo 109 *Sea S la sucesión dada por* $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

Aquí, $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, \ldots$

Esta sucesión está formada por los números impares, por lo que podemos escribir:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 2 \cdot 1 - 1 \\ a_2 & = & 2 \cdot 2 - 1 \\ a_3 & = & 2 \cdot 3 - 1 \\ & \vdots & \\ a_n & = & 2 \cdot n - 1 \end{array}$$

Donde a_n es el término general de esta sucesión.

1.4.1. Formas de Determinar una Sucesión

1. **Enumeración de los primeros términos** Tal y como lo indica el nombre, corresponde a escribir los primeros términos de la sucesión.

   Ejemplo 110 *Algunas de las sucesiones más comunes que podemos encontrar son las siguientes:*

   - $2, 4, 6, 8, \ldots$
   - $7, 14, 21, 28, \ldots$
   - $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
   - $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$
   - $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

2. **En forma descriptiva** Consiste en describir con palabras la ley que formará la sucesión.

   Ejemplo 111 *Según los ejemplos anteriores, cada sucesión se definiría como:*

   - *sucesión de los núneros pares,*
   - *sucesión de los múltiplos de 7,*
   - *sucesión de los cuadrados de los números naturales (a partir de 1),*
   - *sucesión formada a partir de la suma de los dos términos anteriores (Sucesión de Fibonacci)*
   - *sucesión de los números primos.*

3. **Forma Explícita** Consiste en dar una fórmula que defina el término general de la sucesión de función del índice, dando información acerca del valor inicial del índice.

   Ejemplo 112 *Veamos cuales son las fórmulas que definen los ejemplos anteriores:*

   - $2n, \quad n \geq 1$
   - $7n, \quad n \geq 1$
   - $n^2, \quad n \geq 1$
   - $\dfrac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}, \qquad \text{donde } \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
   - *Imposible, no se ha descubierto aún si hay un patrón para generar números primos, solo se sabe que son infinitos.*

4. **Forma Recursiva** Consiste en dar los k primeros términos de la sucesión (los que reciben el nombre de condiciones iniciales) y luego se estable como construir el término $n-$ésimo de la sucesión a partir de los anteriores.

   Ejemplo 113 *Dados los ejemplos anteriores, podemos definir:*

   - $a_1 = 2$
     $a_n = a_{n-1} + 2, \quad n \geq 2$
   - $b_1 = 7$
     $b_n = b_{n-1} + 7, \quad n \geq 2$
   - *No es posible definir esta sucesión en forma recursiva*
   - $c_1 = 1$
     $c_2 = 1$
     $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \quad n \geq 3$
   - *Nuevamente no es posible definir los números primos en forma recursiva, pues no conocemos una relación entre primos consecutivos.*

1.4.2. Tipos de Sucesiones

Sucesiones Monótonas

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera, diremos que:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **creciente** si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, a_n \leq a_{n+1}$
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **estrictamente creciente** si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, a_n < a_{n+1}$

Análogamente, podemos definir:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **decreciente** si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, a_n \geq a_{n+1}$
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **estrictamente decreciente** si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, a_n > a_{n+1}$

Sucesiones Acotadas

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera, diremos que:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **acotada superiormente** si $\exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq K$
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **acotada inferiormente** si $\exists H \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \geq H$
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **acotada** si $\exists H, K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, H \leq |a_n| \leq K$

1.4.3. Ejercicios Resueltos

1. Encuentre una fórmula para el término general de las siguientes sucesiones:

   a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

   b) $1, 8, 27, 64, \ldots$

   c) $-3, -1, 1, 3, 5, \ldots$

   d) $2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \ldots$

   e) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5} \ldots$

   f) $4, 1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}, \ldots$

   g) $5, 15, 25, 35, \ldots$

   Demostración.

   a) $a_n = (-1)^{n+1} \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$

   b) $a_n = n^3 \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$

   c) $a_n = 2n - 5 \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$

   d) $a_1 = 2, a_2 = 5$ y para $n > 3, a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

   e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$

   f) $a_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2} \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$

   g) $a_n = 10(n-1) + 5 \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$

   ■

2. Dada la sucesión $d_h = \dfrac{h^2}{h+1}, h \geq 1$. Encuentre d_3, d_5, d_j y d_{h+1}.

   Demostración. Usando la fórmula dada $d_h = \dfrac{h^2}{h+1}, h \geq 1$, se obtiene:

   - $f_3 = \dfrac{3^2}{3+1} = \dfrac{9}{4}$
   - $f_5 = \dfrac{5^2}{5+1} = \dfrac{25}{5}$
   - $f_3 = \dfrac{j^2}{j+1}$
   - $f_3 = \dfrac{(h+1)^2}{h+2}$

   ■

1.4.4. Ejercicios Propuestos

1. Encuentre una fórmula para el término general de las siguientes sucesiones:

    a) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
    b) $4, 9, 14, 19, 24, \ldots$
    c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
    d) $0, 5, 10, 15, 20, \ldots$
    e) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{17}, \dfrac{1}{26}, \ldots$
    f) $0, -4, 8, -12, 16, -20, \ldots$

2. Dada la sucesión $f_1 = -2, f_2 = 1, f_k = 3f_{k-1} - f_{k-2}, k \geq 3$. Encuentre $f_t, f_{j+2}, f_{k-3}, f_{h+1}$.

3. Estudie la monotonía de las siguientes sucesiones definidas por su término general:

    a) $a_n = 2n - \dfrac{7}{n}$,
    b) $a_n = 2 - \dfrac{7}{5^n}$,,
    c) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n^2}$

4. Algunas calculadoras utilizan un algoritmo similar al siguiente para calcular $\sqrt{n}$, para un número n real positivo: sea $x_1 = \dfrac{n}{2}$ y encuentra aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$ mediante la siguiente fórmula: $x_k = \dfrac{1}{2}\left(x_{k-1} + \dfrac{n}{x_{k-1}}\right)$ hasta obtener la precisión deseada. Utilice este método para calcular $\sqrt{5}$ y $\sqrt{18}$ con 6 decimales de precisión.

5. La **Sucesión de Bode,** definida por la ecuación $a_1 = \dfrac{4}{10}$ y para $k \geq 2$ se define $a_k = \dfrac{3 \cdot 2^{k-2} + 4}{10}$, puede emplearse para calcular las distancias de los planetas al Sol. El tercer término de la sucesión es $a_3 = 1$ unidad astronómica (que equivale a 92,900,000 millas) y corresponde a la Tierra. Aproxime los primeros cinco términos de la sucesión.

6. Considere la sucesión de Fibonacci definida anteriormente ($a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ y $a_1 = a_2 = 1$). Los términos de la sucesión $r_k = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ dan progresivamente mejores aproximaciones para r la razón de oro. Aproxime los primeros diez términos de esta sucesión.

7. Sea la sucesión definida por $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n^2}$.

a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_n$ y a_{n+1} son del mismo signo. Deducir que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_n \geq 0$.

b) Estudie la monotonía de la sucesión.

8. Estudie la acotación de las siguientes sucesiones:

   a) $a_n = 2 - \dfrac{7}{n}$,

   b) $a_n = 2 - \cos(n)$,

   c) $a_n = \dfrac{6n-7}{3n+1}$,

   d) $a_n = |n - n^2|$

2

Axiomas de los Números Reales

"Dios hizo los números naturales; el resto es obra del hombre."
– Leopold Kronecker

2.1. Axiomas de Cuerpo

Un cuerpo es un conjunto no vacío (en nuestro caso será $\mathbb{R}$) en el cual se han definido dos operaciones, la *adición* (o suma) y el *producto* (o multiplicación) que cumple con los siguientes axiomas, llamados Axiomas de Cuerpo

Axioma 114 *Axiomas de Adición*

(A1) *Si* $x, y \in \mathbb{R}$ *entonces* $x + y = y + x$ *(Conmutatividad)*

(A2) *Si* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *entonces* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(Asociatividad)*

(A3) *Existe* $0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x \in \mathbb{R}$*, se cumple* $0 + x = x + 0 = x$ *(Neutro Aditivo)*

(A4) *Para cualquier* $y \in \mathbb{R}, \exists! -y \in \mathbb{R}$*, tal que* $y + (-y) = (-y) + y = 0$ *(Opuestos Aditivos)*

Axioma 115 *Axiomas de Multiplicación*

(M1) *Si* $x, y \in \mathbb{R}$ *entonces* $x \cdot y = y \cdot x$ *(Conmutatividad)*

(M2) *Si* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *entonces* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(Asociatividad)*

(M3) *Existe* $1 \in \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x \in \mathbb{R}$*, se cumple* $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ *(Neutro Multiplicativos o Identidad)*

(M4) *Para cualquier* $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \exists! \dfrac{1}{y} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *tal que* $y \cdot \left(\dfrac{1}{y}\right) = \left(\dfrac{1}{y}\right) \cdot y = 1$ *(Inversos Multiplicativos o Recíprocos)*

Axioma 116 *Axiomas de Distributividad*

(D) *Para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *se cumple* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + y \cdot x$.

Los Axiomas 114, 115 y 116 o Axiomas de Cuerpo, entregan como resultados los siguientes grupos de proposiciones:

Proposición 117 *Propiedades de la Adición: para* $x, y, z \in \mathbb{R}$

1. *Si* $x + y = x + z$, *entonces* $y = z$
2. *Si* $x + y = x$, *entonces* $y = 0$
3. *Si* $x + y = 0$, *entonces* $y = -x$
4. $-(-x) = x$

Demostración.

1. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x + y = x + z$, entonces

$$\begin{array}{rcll} y &=& 0 + y & \\ &=& (-x + x) + y & /\text{Asociatividad} \\ &=& -x + (x + y) & /\text{Hipótesis} \\ &=& -x + (x + z) & /\text{Asociativid} \\ &=& (-x + x) + z & \\ &=& 0 + z & \\ &=& z & \end{array}$$

El resto de la proposición se puede obtener sin mucha dificultad como Corolarios de la Proposición 117.1 recientemente demostrada, por lo que queda como Ejercicio.

■

Proposición 118 *Propiedades del la Multiplicación: Para* $x, y, z \in \mathbb{R}$

1. *Si* $x \neq 0$ *y* $x \cdot y = xz$ *entonces* $y = z$
2. *Si* $x \neq 0$ *y* $x \cdot y = x$ *entonces* $y = 1$
3. $x \neq 0$ *y* $x \cdot y = 1$ *entonces* $y = \dfrac{1}{x}$

4. *$x \neq 0$ entonces $\dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$*

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 119 *Los Axiomas de Cuerpo implican las siguientes afirmaciones: Para $x, y, z \in \mathbb{R}$*

1. $0 \cdot x = 0$
2. *Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces $xy \neq 0$*
3. $(-x)y = -(xy) = x(-y)$
4. $(-x)(-y) = xy$

Demostración.

1. Sabemos que $0 + 0 = 0$, luego multiplicando por x esta igualdad, se obtiene

$$\begin{array}{rcll} (0+0)x & = & 0 \cdot x & \text{/Distributividad} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot x & = & 0 \cdot x & \text{/ Por Porposición 117.2} \\ 0 \cdot x & = & 0 & \end{array}$$

2. Supongamos que $x \neq 0$ y que $y \neq 0$, pero que $xy = 0$, luego

$$\begin{array}{rcll} xy \cdot \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{y} & = & 1 & \text{/Axioma 115.4} \\ 0 \cdot \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{y} & = & 1 & /\mathit{Hipótesis} \\ 0 & = & 1 & \text{/Proposición 119.1} \end{array}$$

Una contradicción, por tanto $xy \neq 0$

El resto se deja de Ejercicio. ■

2.2. Números Reales como Conjunto Ordenado

Definición 120 *Dado un conjunto no vacío R, diremos que un orden en R es una relación representada por "$<$"que tiene las siguientes propiedades:*

1. *Si $x, y \in R$ una u solo una de las propiedades siguientes es verdadera:*

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x$$

2. *Si $x, y, z \in R$, tal que $x < y \wedge y < z$, entonces $x < z$.*

Observación 121

1. *La proposisición $x < y$ se lee 'x es menor que y'.*
2. *A veces es conveniente escribir $y > x$ en vez de $x < y$.*
3. *La notación $x \leq y$ indica que $x < y$ o $x = y$.*

Definición 122 *Un conjunto ordenado es aquel en el que se ha definido un orden.*

Definición 123 *Un cuerpo ordenado es un cuerpo que a su vez es un conjunto ordenado, que cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, entonces $x + z < y + z$,*
2. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x, y > 0$, entonces $xy > 0$.*

Esto significa que existe un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ llamado conjunto de los *números reales positivos*. Además si indicamos como $\mathbb{R}^-$ al conjunto de los números $-x$, donde $x \in \mathbb{R}^+$ concluimos que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

Proposición 124 *En todo cuerpo ordenado, en nuestro caso $\mathbb{R}$, las siguientes proposiciones son verdaderas: dados $x, y, z \in \mathbb{R}$*

1. *Si $x > 0$, entonces $-x < 0$ y viceversa*
2. *Si $x > 0 \wedge y < z$, entonces $x \cdot y < x \cdot z$.*
3. *Si $x < 0 \wedge y < z$, entonces $x \cdot y > x \cdot z$.*
4. *Si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$.*
5. *Si $0 < y < x$, entonces $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.*

Demostración.

1. Si $x > 0$, entonces por Definición 123 se tiene que $0 = -x + x > -x + 0$ así $0 > -x$
2. Dado que $z > y$ entonces $z - y > y - y = 0$ y además $x(z - y) > 0$ (Definición 123) y por Axioma 116 se tiene:

$$x \cdot z = x \cdot z - x \cdot y + x \cdot y = x \cdot (x - z) + x \cdot y > 0 + x \cdot y = x \cdot y$$

   El resto queda de ejercicio

■

Ejemplo 125 *Desigualdad de Bernoulli: Para todo número real $x \geq -1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Demostración. La desigualdad es obvia si $n = 0$ o $n = 1$, supongamos que la desigualdad es válida para n, entonces:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1+nx+x+nx^2\\ &= 1+(n+1)x+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

■

2.3. Axiomas de completitud

Al momento de comparar o distinguir los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ nos daremos cuenta que existen similitudes entre ellos, ambos son cuerpos con las operaciones usuales, ambos son conjuntos ordenados, incluso entre dos racionales siempre existe otro racional, pero en definitiva existe una diferencia muy grande entre ellos, la *completitud*.

Comencemos por demostrar esto último que se ha mencionado un poco 'a la ligera':

Proposición 126 (Densidad de $\mathbb{Q}$) *Dados dos racionales cualesquiera $p, q \in \mathbb{Q}$, tal que $p < q$, existe otro racional $r \in \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$.*

Demostración. Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ tal que $p < q$, si sumamos p a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$2p < p + q,$$

ahora a la misma desigualdad $p < q$ sumemos q, para obtener:

$$p + q < 2q,$$

de lo que se obtiene:

$$2p < p + q < 2q,$$

por último, si multiplicamos la cadena de desigualdades por $\frac{1}{2}$, se obtiene:

$$p < \frac{p+q}{2} < q,$$

obviamente $r = \dfrac{p+q}{2}$, como se quería probar. ■

Como ya hemos mencionado, la completitud juega un rol de mucha importancia en el análisis, pero todavía no hemos mencionado algo que nos haga pensar que efectivamente $\mathbb{Q}$ no sea completo, para dar una respuesta a esto, veamos la siguiente proposición:

Proposición 127 *No existe racional alguno tal que* $p^2 = 3$.

Demostración. Supongamos por el absurdo que si existe un racional $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$p^2 = 3$$

por lo que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ primos relativos tal que $p = \frac{m}{n}$, entonces:

$$\begin{aligned} p^2 &= 3 \qquad\qquad \text{pero } p^2 = \frac{m^2}{n^2} \\ \frac{m^2}{n^2} &= 3 \\ m^2 &= 3n^2 \end{aligned}$$

Por lo que m^2 es un múltiplo de 3.

Lema 128 *Dado $a \in \mathbb{Z}$, a es múltiplo de* $3 \Leftrightarrow a^2$ *es múltiplo de 3.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Si a es múltiplo de 3, podemos escribir $a = 3k$ con $k \in \mathbb{Z}$, luego $a^2 = (3k)^2 = 3(3k^2)$ luego a^2 es multiplo de 3.

$\Leftarrow]$ Nuestra hipótesis es que a^2 es mútiplo de 3, supongamos por el absurdo que a no es múltiplo de 3, por ello $a \neq 3k, \forall k \in \mathbb{Z}$, elevando al cuadrado, se obtiene $a^2 \neq (3k)^2 \neq 3(3k^2)$ lo que nos dice que a^2 no es múltiplo de 3, contradiciendo la hipótesis, completando la demostración. ■

Ahora, por el Lema 128 podemos afirmar que m es múltiplo de 3, y por ello podemos escribirlo como $m = 3h$ con $h \in \mathbb{Z}$, entonces retomando la demostración, se tiene:

$$m^2 = 3n^2 \tag{2.1}$$

$$(3h)^2 = 3n^2 \qquad / \cdot \frac{1}{3} \tag{2.2}$$

$$3h^2 = n^2 \tag{2.3}$$

Por lo que n^2 es múltiplo de 3, y el Lema 128 nos asegura que n también es múltiplo de 3. !Contradicción¡ pues habíamos escogido a m y n primos relativos, luego no existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p^2 = 3$. ■

Como hemos visto existen algunos números o cantidades que no pueden ser representadas mediante números racionales, lo que suguiere que existen cierto 'vacíos' en $\mathbb{Q}$, y estos son 'llenados' con el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) los que nos permitirán desarrollar sólidamente nuestros argumentos desde el punto de vista analítico.

Definición 129 (Conjuntos Acotados) *Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente cuando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in A$. Nótese que en este caso, b recibe el nombre de cota superior*

Se puede definir en forma análoga cuando un conjunto es acotado inferiormente.

Definición 130 *Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es acotado cuando está acotado superior e inferiormente, esto significa que A está contenido en algún intervalo de la forma $[a,b]$ o equivalentemente que existe $k > 0$ tal que si $x \in A$ entonces $|x| < k$.*

Definición 131 (Supremo de un Conjunto) *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente, un número $s \in \mathbb{R}$ se denomina supremo de A cuando es la menor de las cotas superiores. Explícitamente, definimos $s = \sup A$ si y solo si:*

(S1) *Para todo $x \in A$ se cumple que $x \leq s$.*

(S2) *Si $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in A$, entonces $s \leq c$.*

Esta última condición también puede ser expresada mediante la siguiente reformulación:

(S2') *Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $s - \epsilon < x$.*

Definición 132 *Se dice que un número $M \in A$ es el máximo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando $M \geq x$, para todo $x \in A$. Esto quiere decir que M es una cota superior de X que pertenece a A.*

Ejemplo 133 *Consideremos el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, su máximo es b, pues es cota superior que pertenece a $[a,b]$.*
Sin embargo, el intervalo $[a,b) \subset \mathbb{R}$ no posee máximo

Observación 134 *Nótese que si un conjunto posee máximo, este mismo corresponde al supremo. El concepto de supremo sirve para sustituir al máximo de un conjunto cuando este no existe*

Con esto llegamos al punto cúlmine de la completitud, representada en el siguiente axioma.

Axioma 135 (C) *Dado un conjunto no vacío $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente, entonces A posee un supremo $a = \sup A$.*

Ejemplo 136 *Si consideramos el conjunto:*

$$A = \{p \in \mathbb{Q} : p^2 = 3\}$$

El conjunto A no posee máximo, pero efectivamente si posee supremo, que corresponde a $\sqrt{3}$, pues no podemos pensar en la idea intuitiva de 'un poco más pequenõ que $\sqrt{3}$' por la Densidad de $\mathbb{Q}$ (Proposición 126)

Teorema 137 *Dada una sucesión decreciente* $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ *de intervalos cerrados y acotados,* $I_n = [a_n, b_n]$*, entonces que existe al menos un real* $s \in \mathbb{R}$ *tal que* $s \in I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*.*

Demostración. La sucesión de inclusiones $I_n \supset I_{n+1}$ indican que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

por ello el conjunto $A = \{a_i \ / \ i : 1, 2, 3, \ldots\}$ está acotado superiormente, por lo que posee supremo, sea $s = \sup A$, por definición $a_n \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, además cada b_n es cota superior de A, así $s \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Concluimos que para cualquier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se cumple que $a_n \leq s \leq b_n$, por lo que $s \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. ■

2.4. Propiedad Arquimediana

El siguiente teorema muestra la caracterización de $\mathbb{R}$ como un *Cuerpo Arquimediano*, propiedad muy importante dentro del análisis matemático por las poderosas conclusiones que nos entrega, la presentamos a continuación en tres partes:

Teorema 138

(a) El conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *de los números naturales no está acotado superiormente.*

(b) El ínfimo del conjunto $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ *es igual a* 0*.*

(c) Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $na > b$*.*

Demostración.

1. Supongamos por el absurdo que $\mathbb{N}$ está acotado, por ello existiría $c = \sup \mathbb{N}$, entonces $c - 1$ no es cota superior, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > c - 1$, de donde $n + 1 > c$ por lo que c no puede ser cota superior, contradiciendo el hecho que lo escogimos como el supremo de $\mathbb{N}$.

2. Es evidente que 0 es una cota inferior de X, entonces basta probar que para cualquier $c > 0$, no es una cota inferior de X, entonces:

   Por (a), sabemos que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{c}$, de donde $\frac{1}{n} < c$ por lo que c no es cota inferior, así 0 es el ínfimo de X.

3. para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$, usando la parte *1*, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$, luego $na > b$, completando la demostración.

■

2.4.1. Ejercicios Resueltos

1. Pruebe que si $x < 0$ y $y < z$, entonces $xy < xz$.

   Demostración. Como $x < 0$,entonces $-x > 0$. Además, $-x(z-y) > 0$ por tanto $x(z-y) < 0$ y en consecuencia:

   $$xz = xz - xy + xy = x(x-z) + xy < 0 + xy = xy$$

   ■

2. Pruebe que para $x, y \in \mathbb{R}$, si $x + y = x$, entonces $y = 0$

   Demostración. Sabemos que si $x + y = x + z$ entonces $y = z$ por la Proposición 117, entonces basta tomar $z = 0$ para obtener que $y = 0$ ■

3. Pruebe que entre dos números reales existe un número racional.

   Demostración. Para ello, sean $x, y \in \mathbb{R}$ dos números reales distintos tales que $x < y$, entonces $y - x < 0$, luego consideremos $\frac{1}{y-x}$. Como $\mathbb{N}$ no está acotado, se asegura la existencia de un número $n \in \mathbb{N}$ natural tal que $n > \frac{1}{y-x}$, es decir

   $$\underbrace{y - x > \frac{1}{n}}_{(1)}$$

   Sea $p \in \mathbb{Z}$ la parte entera de nx, entonces podemos asegurar que

   $$p \leq nx < p + 1 \Rightarrow \underbrace{\{\frac{p}{n} \leq x\}}_{(2)} \wedge \underbrace{\{x < \frac{p+1}{n}\}}_{(3)}$$

   Luego, usando los resultados obtenidos se tiene que:

   $$\begin{array}{rcll} y & = & (y - x) + x & \\ & > & \dfrac{1}{n} + \dfrac{p}{n} & \text{por la condición (1) y (2) respectivamente} \\ & = & \dfrac{p+1}{n} & \\ & > & x & \text{por la condición (3)} \end{array}$$

   Es decir que

   $$x < \frac{p+1}{n} < y$$

   donde $\frac{p+1}{n}$ es un número racional, pues $p \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ ■

4. Pruebe que $1 + \sqrt{5}$ es irracional.

Demostración. Supongamos por el absurdo que $1+\sqrt{5}$ es racional, como $\mathbb{Q}$ es un cuerpo, al sumar dos racionales el resultado debe ser racional, entonces:

$$\underbrace{1+\sqrt{5}}_{\in\mathbb{Q}}+\underbrace{(-1)}_{\in\mathbb{Q}}=\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$$

Contradicción, pues ya demostramos que $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$, por tanto $1+\sqrt{5}\in\mathbb{I}$ ■

5. Pruebe que entre dos números reales existe un número irracional.

   Demostración. Sean x e y dos números reales, con $x<y$ por las propiedades de orden en $\mathbb{R}$ se tiene que

   $$\frac{x}{\sqrt{2}}<\frac{y}{\sqrt{2}}$$

   Por el previo, existe $r\in\mathbb{Q}$ un número racional tal que

   $$\frac{x}{\sqrt{2}}<r<\frac{y}{\sqrt{2}}$$

   de donde

   $$x<\sqrt{2}r<y$$

   siendo $\eta=\sqrt{2}r$ un número irracional, pues $r\in\mathbb{Q}$ y $\sqrt{2}\in\mathbb{I}$ ■

6. Sean $A\subset\mathbb{R}$ y $B\subset\mathbb{R}$ dos conjuntos acotados y no vacíos. Sean $a=\sup A$ y $b=\sup B$. Definamos

   $$C=\{x+y\in\mathbb{R}/x\in A,y\in B\}.$$

   Demuestre que $\sup C=a+b$.

   Demostración. Probaremos que $\sup(C)=a+b$, mediante la caracterización del supremo, es decir

   $$a+b=\sup(C)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{array}{l} i)(a+b)\text{ es cota superior de }C\\ ii)\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,c_0\in C:(a+b)-\epsilon<c_0\end{array}$$

   En efecto:

   i) $a+b$ es cota superior de C

      Sea $c\in C$, entonces $c=x+y$, $x\in A$, $y\in B$. Ahora, por definición de supremo, se tiene que:

$$\sup(A) = a \geq x;\ \forall x \in A$$

$$\sup(B) = b \geq y;\ \forall y \in B$$

Luego por propiedades de orden de los números reales, podemos sumar ambas desigualdades y así:

$$a + b \geq x + y;\ \forall x \in A, \forall y \in B$$

esto quiere decir que

$$a + b \geq c;\ \forall c \in C$$

De manera que $a + b$ es una cota superior de C.

ii) $\forall \epsilon > 0,\ \exists c_0 \in C : (a + b) - \epsilon < c_0$

Para esto, sea $\epsilon > 0$.

Luego, dado que $a = \sup(A)$ y $b = \sup(B)$, podemos asegurar que:

$$\exists x_0 \in A : a - \frac{\epsilon}{2} < x_0$$

y

$$\exists y_0 \in B : b - \frac{\epsilon}{2} < y_0$$

Así al sumar ambas expresiones se tiene que

$$\begin{aligned} a + b - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} < &\quad x_0 + y_0; \quad x_0 \in A, y_0 \in B \\ (a + b) - \epsilon < &\quad c_0; \quad c_0 \in C \end{aligned}$$

Luego, $(a + b)$ es la menor de las cotas superiores de C

Entonces, de i) y ii), podemos concluir que $(a + b) = \sup(C)$

■

2.4.2. Ejercicios Propuestos

1. Pruebe que para todo $p \in \mathbb{Z}$, con p número primo, $\sqrt{p}$ no es un número racional.
2. Pruebe que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.
3. Dados $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ y $x \in \mathbb{I}$ demuestre que $x + q$ y xq son irracionales.
4. Apartir de las definiciones es este capítulo, defina:
   a) Conjunto Acotado inferiormente
   b) Ínfimo de un Conjunto
   c) Reformule la definición de Ínfimo usando $\epsilon > 0$.
5. Encuentre el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:
   a) $A = \{x \in \mathbb{R}/x^2 \leq 9\}$
   b) $A = \{x \in \mathbb{R}/x^2 \leq 7\}$
   c) $A = \{x \in \mathbb{R}/|2x + 1| \leq 5\}$
   d) $A = \{x \in \mathbb{R}/\left(x^2 + 1\right)^{-1}\}$
   e) $A = \{x \in \mathbb{Q}/x^2 \leq 11\}$
6. Sean A y B dos conjuntos acotados y definamos
$$C = \{xy \in \mathbb{R}/x \in A \wedge y \in B\}$$
   . Dar un ejemplo en que $\sup C = \sup A \cdot \sup B$ y un ejemplo en que $\sup C < \sup A \cdot \sup B$.
7. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Definamos
$$B := \{-x \in \mathbb{R}/x \in A\}$$
   . Demuestre que $\inf A = -\sup B$.
8. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado y no vacío. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Definamos
$$C = \{ax + b \in \mathbb{R}/x \in A\}$$
   . Encuentre y demuestre fórmulas para $\inf C$ y $\sup C$ en términos de $\inf A$ y $supA$.
9. Demostrar la desigualdad de Minkowski:
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

2.5. Los Números Reales como Espacio Métrico

2.5.1. Espacios Métricos

Definición 139 *Sea $d : A \times A \to \mathbb{R}_0^+$, $A \times A$ no vacío. Diremos que d es una distancia o métrica si cumple con las siguientes condiciones: dados $p, q, r \in A$*

1. - $d(p,q) > 0$ *si* $p \neq q$
   - $d(p,q) = 0$ *si* $p = q$
2. $d(p,q) = d(q,p)$
3. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

Observación 140 *Uno de los ejemplos más importantes, y precisamente el que más nos interesa, son los espacios euclideanos, especialmente $\mathbb{R}$, la distancia queda definida por*

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = |x-y| \end{array}$$

donde esta es la función valor absoluto, definida en 87 y cumple con las condiciones de la Definición 139 gracias a la Proposición 88

2.5.2. Conjuntos Abiertos y Cerrados en $\mathbb{R}$

A continuación daremos algunas de las definiciones más usuales y recurrentes que podemos encontrar en el estudio de los conjuntos abiertos y cerrados, conceptos básicos de la topología sobre $\mathbb{R}$.

Recordemos que un intervalo abierto se define como

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

Conjuntos Abiertos

Definición 141 *Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\epsilon > 0$, una vecindad o una bola de x respecto del radio ϵ, denotada: $B(x,\epsilon)$, donde:*

$$B(x,\epsilon) = \{a \in \mathbb{R} / d(x,a) < \epsilon\}$$

que caracterizado en $\mathbb{R}$ corresponde al intervalo abierto:

$$B(x,\epsilon) = (x-\epsilon, x+\epsilon)$$

Definición 142 *Dado un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, diremos que $x \in A$ es un punto interior de A, anotado $x \in \overset{\circ}{A}$, si $\exists\, \epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \subset A$.*

Ejemplo 143 *Si consideramos el intervalo $I = (3, 5]$, podemos afirmar que $4 \in \overset{\circ}{I}$, basta considerar $\epsilon = \frac{1}{2}$ tal que $B(4, \frac{1}{2}) = (4 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}] \subset I$. De hecho, para cualquier $\epsilon \in (0, 1)$, se cumplirá que $B(4, \epsilon) \subset I$.*

Ejemplo 144 *Usando el mismo intervalo $(3, 5]$, nótese que $5 \notin \overset{\circ}{A}$, pues para cualquier $\epsilon > 0$, se cumplirá que $B(5, \epsilon) = (5 - \epsilon, 5 + \epsilon) \not\subset I$.*

Definición 145 *Diremos que un conjunto es abierto si todos sus puntos son puntos interiores, lo caracterizamos como $A = \overset{\circ}{A}$.*

Ejemplo 146 *Un intervalo abierto (a, b) es un conjunto abierto, pues para cualquier $x \in (a, b)$, basta escoger $\epsilon = \text{mín}\{x - a, b - x\}$, así*

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b).$$

Ejemplo 147 *Volviendo sobre el intervalo $I = (3, 5]$, sabemos que $5 \in I$, pero $5 \notin \overset{\circ}{I}$ (no es punto interior), por lo que el intervalo I no es un conjunto abierto.*

Observación 148 *Nótese que el conjunto vacío $\emptyset$ es un conjunto abierto, pues no posee punto que no sean interiores.*

Teorema 149 *Toda vecindad es un conjunto abierto.*

Demostración. Consideremos una vecindad cualquiera $B = B(p, \epsilon)$ y sea $a \in B$, debemos encontrar un $\epsilon_1 > 0$ tal que $B(a, \epsilon_1) \subset B$, para encontrar explícitamente este valor basta considerar lo siguiente

- $d(a, p + \epsilon) = d_1$
- $d(a, p - \epsilon) = d_2$

por último, con $\epsilon_1 < \text{mín}\{d_1, d_2\}$ se tiene lo pedido. ■

Teorema 150

1. *La uninón arbitraria de conjutos abiertos es abierta.*
2. *La intersección finita de conjuntos abiertos es abierto.*

Demostración.

1. Sea $I \subseteq \mathbb{N}$, sean $(G_i)_{i \in I}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos, sea $x_0 \in \bigcup_{i \in I} G_i$ entonces $x_0 \in G_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$, como G_{i_0} es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset G_{i_0}$, luego $B(x_0, \epsilon) \subset \bigcup_{i \in I} G_i$.
2. Ejercicio.

■

Observación 151 *En el Teorema 150, la intersección de abiertos no puede ser infinita, pues el teorema falla, como se muetra a continuación:*

Ejemplo 152 *Para* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *definamos* $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ *una familia de conjuntos abiertos, nótese que:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

pero un conjunto con solo un elemento (singletón) no es un conjunto abierto.

Conjuntos Cerrados

Definición 153 *Un punto* $x \in \mathbb{R}$ *se dice un punto de acumulación o punto límite de A, anotado* $x \in A'$, *si cualquier vecindad de x contiene puntos de* $A \setminus \{x\}$, *es decir,*

$$\forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Definición 154 *Sea* $A \subset \mathbb{R}$, *si* A' *representa el conjunto de todos los puntos de acumulación de A, entonces la clausura de A corresponde a:*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Ejemplo 155 *Dado el conjunto* $I = (3,5]$ *cualquier punto interior de* $x \in \overset{\circ}{I}$ *es un punto de acumulación, pues* $\forall \epsilon > 0 : B(x,\epsilon) \cap (I \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. *Además los puntos* $\{3,5\} \in I'$.

Ejemplo 156 *Si consideramos a* $\mathbb{N}$, *nótese que* $\mathbb{N}' = \emptyset$, *puesto que:*

- $\forall n \in \mathbb{N} :$ *basta escoger* $\epsilon_n < 2$, *para que* $B(n,\epsilon_n) \cap (\mathbb{N} \cap \{n\}) = \emptyset$
- *Para* $r \in \mathbb{R}$, *basta escoger* $\epsilon_r < \min_{n\in\mathbb{N}} d(r,n)$, *de tal forma que* $B(r,\epsilon_r) \cap (\mathbb{N} \setminus \{r\}) = \emptyset$.

Ejemplo 157 *Sea* $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

Nótese que $0 \in A'$, *puesto que la Propiedad 138 (Propiedad Arquimediana) asegura que* $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{\epsilon} < n$, *es decir, que* $\frac{1}{n} < \epsilon$, *de esta forma, se tiene que:*

$$\frac{1}{n} \in B(0,\epsilon) \cap A$$

Observación 158 *Es importante tener presente que si* $x \in A' \not\Rightarrow x \in A$

Ejemplo 159 *Si consideramos a $\mathbb{Q}$, podemos afirmar que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, puesto que $\forall \epsilon > 0$, si $q \in \mathbb{Q}$, sabemos que $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que $r \in B(q, \epsilon) \cap \mathbb{Q}$.*

Definición 160 *Diremos que un conjunto es cerrado si todos sus puntos de acumulación le pertenecen.*

Ejemplo 161 *Del Ejemplo 157, vemos que el conjunto $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ no es un conjunto cerrado, pues $0 \in A'$ y $0 \notin A$.*

Teorema 162 *Un conjunto es abierto si y solo si su complemento es cerrado.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, luego:

$\Leftarrow$] supongamos que A^c es cerrado, sea $x \in A$ por lo que $x \notin A^c$ y $x \notin \overline{A}$, esto significa que $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A^c = \emptyset$, esto significa que $B(x, \epsilon) \subset A$, por lo que $x \in \overset{\circ}{A}$

$\Rightarrow$] Supongamos ahora que A es abierto y sea $x \in \overline{A^c}$, para cualquier $\epsilon > 0$, se cumple que $B(x, \epsilon) \cap A^c$, por lo que $x \notin \overset{\circ}{A}$, como A es abierto, la única posibilidad es que $x \in A^c$, por lo que A^c es cerrado. ■

Teorema 163 *Sea $\mathbb{R}$ un espacio métrico y sea $A \subset \mathbb{R}$, entonces*

1. *$\overline{A}$ es cerrado,*
2. *$A = \overline{A}$ si y solo si A es cerrado,*
3. *Sea $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado tal que $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset B$*

Demostración.

1. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \notin \overline{A}$, entonces $\exists \epsilon > 0 : B(a, \epsilon) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$ lo que significa que $B(a, \epsilon) \subset A^c$, es decir que A^c es abierto, y por ello A es cerrado (Teorema 162)

   El resto queda de ejercicio.

■

2.5.3. Ejercicios Resueltos

1. Pruebe que $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ es una métrica en $\mathbb{R}$.

   Demostración. Debemos probar las tres condiciones necesarias para tener una métrica, no olvidar que $|\cdot|$ ya es una métrica, entonces:

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |x-y| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

- $d(x,y) = d(y,x)$

$$\begin{aligned} d(x,y) \quad &= \quad \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \\ &= \quad \frac{|y-x|}{1+|y-x|} \\ &= \quad d(y,x) \end{aligned}$$

- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ Para poder demostrar la desigualdad triangular, consideremos la función f definida como $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$. Note que f es una función creciente, es decir, si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.
Por la desigualdad triangular de $|\cdot|$

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|,$$

aplicamos la función f y obtenemos

$$\frac{|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|},$$

separamos la fracción de la derecha

$$\frac{|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|} + \frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}.$$

Note que

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|} \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

y

$$\frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \leq \frac{|y-z|}{1+|y-z|},$$

de donde deducimos que

$$\frac{|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|},$$

es decir

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

■

2. Determine los puntos de acumulación de cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) $\mathbb{Z}$
   b) $A = [1, 2) \cup \{3\}$
   c) $\mathbb{Q}^*$ (el conjunto de los números irracionales)

   Solución.

   a) Como vimos en el Ejemplo 156, aquí $\mathbb{Z}' = \emptyset$, por el mismo argumento allí mencionado.
   b) Como vimos en el Ejemplo 155, cualquier punto interior de este intervalo es punto de acumulación, así $\overset{\circ}{A} \subset A'$
   Además $1 \in A'$, pues $\forall \epsilon > 0, B(1, \epsilon) \cap A \setminus \{1\} \neq \emptyset$. Análogamente para $2 \in A'$.
   Ahora bien, el punto $\{3\} \notin A'$, pues para $0 < \epsilon < 1$, se tiene que $B(3, \epsilon) \cap A \setminus \{3\} = \emptyset$
   c) Para el caso de los números irracionales, se tiene que cualquier $r \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de $\mathbb{Q}^*$, pues $\forall \epsilon > 0, B(r, \epsilon) \cap \mathbb{Q}^* \setminus \{r\} \neq \emptyset$, luego $(\mathbb{Q}^*)' = \mathbb{R}$.

■

3. Demostrar que si $A \subset B$, entonces $A' \subset B'$.

   Demostración.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Sea } x \in A' & \Rightarrow & \forall \epsilon > 0,\ B(x, \epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset & \\
& \Rightarrow & \exists a \in B(x, \epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) & \\
& \Rightarrow & \exists a \in B(x, \epsilon) \quad \wedge \quad a \in (A \setminus \{x\}) & /A \subset B \\
& \Rightarrow & \exists a \in B(x, \epsilon) \quad \wedge \quad a \in (B \setminus \{x\}) & \\
& \Rightarrow & B(x, \epsilon) \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset & \\
& \Rightarrow & x \in B' &
\end{array}
$$

■

4. Sean $\mathbb{R}$ un espacio métrico y $A \subseteq \mathbb{R}$.Pruebe que $x \in \overline{A}$ si y sólo si $d(x, A) = 0$.

   Demostración. $\Rightarrow$] Sea $x \in \overline{A}$ para cada $\epsilon > 0$ se cumple que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, luego $d(x, A) < \epsilon$ y como esto se tiene para cada $\epsilon > 0$ entonces $d(x, A) = 0$.

   $\Leftarrow$] Ahora supóngase que $d(x, A) = 0$. Si existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$ entonces por la Propiedad 138 (Propiedad Arquimediana) existe

$n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \epsilon)$ y así $B(x, \frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$ lo cual contradice $d(x, A) = 0$. ■

5. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, demuestre que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

   Demostración. $\Leftarrow$] Se sabe que $A \subset (A \cup B)$ y que $B \subset (A \cup B)$ y por el Ejercicio Resuelto 3, se tiene que $A' \subset (A \cup B)'$ y que $B' \subset (A \cup B)'$, lo que significa que $A' \cup B \subset (A \cup B)'$.

   $\Rightarrow$] Sea $x \in (A \cup B)'$, entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $B(x, \epsilon) \cap ((A \cup B) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, luego existe $y \neq x$ tal que

$$
\begin{aligned}
& y \in B(x,\epsilon) \cap (A \cup B) \\
\Rightarrow \quad & y \in [(B(x,\epsilon) \cap A) \cup (B(x,\epsilon) \cap B)] \\
\Rightarrow \quad & [y \in (B(x,\epsilon) \cap A] \vee [y \in (B(x,\epsilon) \cap B)] \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} B(x,\epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset & \rightarrow \quad x \in A' \\ B(x,\epsilon) \cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset & \rightarrow \quad x \in B' \end{cases}
\end{aligned}
$$

   Por tanto $x \in A' \cup B'$. ■

2.5.4. Ejercicios Propuestos

1. Se definen

   a) $d_1(x, y) = (x - y)^2$
   b) $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$
   c) $d_3(x, y) = |x^2 - y^2|$
   d) $d_4(x, y) = |x - 2y|$

   determine cuáles de estas son métricas en $\mathbb{R}$.

2. Demuestre que si un conjunto A es finito, entonces $A' = \emptyset$.

3. Demuestre que todo conjunto finito es cerrado.

4. Demuestre que si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

5. Demuestre que $A \cup A'$ es cerrado, para todo $A \subset \mathbb{R}$.

6. Demuestre que los únicos conjuntos cerrados y abiertos, al mismo tiempo, son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$.

3

Límite y Continuidad

> *"Lo que sabemos es una gota de agua; lo que ignoramos es el océano."*
>
> – Isaac Newton

El concepto de límite es sin duda uno de los más importantes, y probablemente el más difícil de comprender en cálculo. El objetivo de este capítulo es comprender y trabajar la definición de este concepto. Por otro lado, Intuitivamente, una función f es continua si el gráfico no contiene pausas, saltos u oscilaciones. Aunque esta descripción general nos permitirá decidir si una función es continua simplemente mirando su gráfica es fácil equivocarse, es por ello que la definición formal es muy importante.

3.1. Límite de Sucesiones

Esta sección, como indica su nombre, tratará principalmente sobre límite de sucesiones o sucesiones *convergentes*. Por lo tanto, debemos comenzar con la definición:

Definición 164 *Se dice que una sucesión (x_n) en $X \subseteq \mathbb{R}$, converge si existe un punto $x \in X$ tal que*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon.$$

En este caso, decimos también que (x_n) converge hacia x, o que x es el límite de (x_n) y escribimos $x_n \to x$, o

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

No es difícil ver que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} (x_n - x) = 0.$$

Observación 165 *Es importante saber que la definición de convergencia depende no solamente de* (x_n)*, sino tamabién de* X*; por ejemplo la sucesión* $\left(\frac{1}{n}\right)$ *converge en* $\mathbb{R}$ *(hacia cero), pero no lo hace en* $\mathbb{R}^+$*.*

Lo que sigue es un teorema que resume las propiedades más importantes de convergencia.

Teorema 166 *Sea* (x_n) *una sucesión en* $X \subseteq \mathbb{R}$*:*

(a) Si $x, x' \in X$ *y* (x_n) *converge hacia* x *y hacia* x'*, entonces* $x = x'$*.*

(b) Si (x_n) *converge, es acotada.*

Demostración.

(a) Sea $\epsilon > 0$. Existen dos naturales N, N' tales que

$$n \geq N \quad \longrightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$n \geq N' \quad \longrightarrow |x_n - x'| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De aquí, si $n \geq \text{máx}\{N, N'\}$, tenemos:

$$|x - x'| \leq |x_n - x| + |x_n - x'| < \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, tenemos que $|x - x'| = 0$, entonces $x = x'$.

(b) Supongamos que $x_n \to x$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$, esto implica que $|x_n - x| < 1$. Consideremos

$$t = \text{máx}\{1, |x_1 - x|, |x_2 - x| \ldots |x_N - x|\}.$$

Entonces, $|x_n - x| \leq t$, para $n = 1, 2, 3 \ldots$.

■

La relación entre la convergencia y las operaciones algebraicas, para las sucesiones sobre $\mathbb{R}$ están establecidas en el siguiente Teorema.

Teorema 167 *Supongamos que* (x_n)*,* (y_n) *son sucesiones reales y que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*,* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$*, entonces:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y$*,*

(b) $\lim_{n\to\infty} kx_n = k \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = kx,$ *para todo* $k \in \mathbb{R}$*,*

(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = xy$*,*

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{x}{y}$*; siempre que* $y_n \neq 0$ *para todo* n*, e* $y \neq 0$.

Demostración.

(a) Dado $\epsilon > 0$, existen naturales N_1, N_2 tales que:

$$n \geq N_1 \longrightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$n \geq N_2 \longrightarrow |y_n - x| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si consideramos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, $n \geq N$ implica que:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n + x| + |y_n - y| < \epsilon.$$

(b) Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n \geq N \longrightarrow |x_n - x| &< \frac{\epsilon}{|k|}, \qquad k \neq 0 \\ \Longleftrightarrow |k||x_n - x| &< \epsilon, \\ \Longleftrightarrow |kx_n - kx| &< \epsilon. \end{aligned}$$

(c) Aquí utilizaremos la identidad

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + y(x_n - x) \tag{3.1}$$

Dado $\epsilon > 0$, existen naturales N_1, N_2 tales que

$$n \geq N_1 \longrightarrow |x_n - x| < \sqrt{\epsilon},$$

$$n \geq N_2 \longrightarrow |y_n - x| < \sqrt{\epsilon}.$$

Si tomamos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, $n \geq N$ implica que:

$$|(x_n - x)(y_n - y)| < \epsilon,$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x)(y_n - y) = 0.$$

Si aplicamos límite en (3.1) y la propiedad (a) y (b) anteriores tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (x_n y_n - xy) &= \lim_{n\to\infty} (x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + y(x_n - x) \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n - x)(y_n - y) + \lim_{n\to\infty} x(y_n - y) + \lim_{n\to\infty} y(x_n - x) \\ &= 0 + x \cdot 0 + y \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(d) Ejercicio.

■

Para resolver un número importante de problemas de estas materias, es importante conocer la siguiente proposición ya mencionada en la Observación 165:

Proposición 168 *La sucesión* $\left(\frac{1}{n}\right)$ *converge a 0 en* $\mathbb{R}$.

Antes de ver la demostración de esta Proposición veamos el gráfico de la sucesión (Figura 3.1).

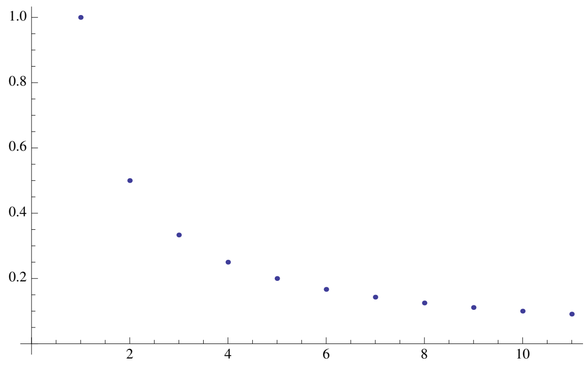

Figura 3.1: Gráfica de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, entonces $\frac{1}{\epsilon} > 0$. Por la Propiedad Arquimediana, Teorema 138 parte 3, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\epsilon} < N$. Si $n \geq N$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} &< n \\ \frac{1}{n} &< \epsilon \\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| &< \epsilon. \end{aligned}$$

■

Otras convergencias son las siguientes:

Proposición 169

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad k \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Si $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

(c) Si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Demostración.

(a) Análogo a la Demostración de la Proposición 168, consderar $n > \dfrac{1}{\sqrt[k]{\epsilon}}$.

(b) Ejercicio.

(c) Si $x = 1$ es evidente. Si $x > 1$, tomemos $s_n = \sqrt[n]{x} - 1$. Será $s_n > 0$, y por el Teorem del Binomio:
$$1 + ns_x \leq (1 + s_x)^n = p,$$
así,
$$0 < s_n \leq \frac{p-1}{n}.$$
Por lo tanto $s_n \to 0$, es decir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$. Si $0 < x < 1$, se obtiene el resultado tomando los recíprocos.

■

El siguiente Teorema, es conocido como Teorema del Sandwich:

Teorema 170 *Sean* x_n, y_n, z_n *sucesiones tales que* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = F$, $\lim\limits_{x\to\infty} z_n = F$, *entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} y_n = F$.

Demostración. Ejercicio. ■

3.1.1. Ejercicios Resueltos

1. Demostar que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0.$$
Demostración. Por demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\left|\dfrac{5}{n+1} - 0\right|$.
Usando la propiedad arquimediana, dado un número real $\delta > 0$ siempre existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < \delta$. Entonces, dado $\delta = \dfrac{\epsilon}{5-\epsilon} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$0 < \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{5-\epsilon}.$$
Es decir,
$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{n} &< \frac{\epsilon}{5-\epsilon} \\ 5-\epsilon &< n\epsilon \\ 5 &< \epsilon(n+1) \\ \frac{5}{n+1} &< \epsilon \\ \left|\frac{5}{n+1}\right| &< \epsilon, \quad \forall\ n \geq N, \end{aligned}$$

que es equivalente con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0.$$

■

2. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots n^2}{n^3}.$$

Solución. Usaremos la fórmula $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Reemplazamos y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{6n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{6n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■

3. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-5}{n^6+1}.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-5}{n^6+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4} - \frac{5}{n^6}\right)}{n^6\left(1+\frac{1}{n^6}\right)} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^6}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^6}} \\
&= \frac{0+0-0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0.
\end{aligned}$$

■

4. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\
&= 0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}\\
&= 0\cdot\frac{1}{2}=0.
\end{aligned}$$

■

5. Demostar que si $0 \leq a \leq b$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}=b$.
Demostración. La técnica para demostar este enunciado es ocupar el Teorema 170. Observemos que si $0 \leq a \leq b$, entonces

$$0 \leq a^n \leq b^n.$$

Sumando b^n, tenemos

$$b^n \leq a^n+b^n \leq 2b^n.$$

Radicando a la n tenemos:

$$b \leq \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \sqrt[n]{2}\cdot b.$$

Aplicando límite,

$$\lim_{n\to\infty} b \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\cdot b$$

$$b \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\cdot \lim_{n\to\infty} b$$

$$b \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\cdot b$$

Por Proposición 169, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}=1$, obteniendo

$$b \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq b.$$

Por el Teorema 170 concluimos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}=b$. ■

6. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k}$, $k \in \mathbb{N}$.
Solución. Dado $k \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq m \cdot n$, entonces
$$1 \leq n + k \leq n + m \cdot n = n(m+1).$$
Luego radicando a la n:
$$1 \leq \sqrt[n]{n+k} \leq \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{(m+1)}.$$
Aplicando límite:
$$\lim_{n\to\infty} 1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{(m+1)}.$$
Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{(m+1)} = 1$, por Teorema 170 tenemos:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k} = 1.$$
■

7. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$.
Solución.
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \lim\limits_{n\to\infty} 1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 1} \\
&= \frac{3 \cdot (0+1)}{0+1} = \frac{3}{1} = 3.
\end{aligned}$$
■

8. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1}$.
Solución. Sabemos que $-1 \leq \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) \leq 1$, para todo n. Entonces sumando n:
$$n - 1 \leq n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq n + 1.$$
Diviendo por $2n + 1 \neq 0$, tenemos:
$$\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+1}.$$

Pero como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

tenemos por el Teorema 170 que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

■

3.1.2. Ejercicios Propuestos

1. Demostar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-6n^3+2}{7n^3} = -\dfrac{6}{7}$.

2. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+4n}{5n^2-1}$.

3. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

4. Demuestre que si $x_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$, entocnes $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

5. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\sqrt{n}}$.

6. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+2}$.

7. Estudie la convergencia de la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots,$$

y encontrar su límite si es que existe.

8. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}$.

9. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-3^{-n}}{3^n+3^{-n}}$.

3.2. Límite de Funciones

Para comenzar esta sección daremos la definición de límite.

Definición 171 *Sea $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y p un punto de acumulación de E. Escribiremos $f(x) \to q$ cuando $x \to p$ o*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q,$$

si y solo si existe un punto $q \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 : |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - q| < \epsilon.$$

Ejemplo 172 *Consideremos la función g definida por $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Es claro que su dominio es $\mathbb{R} \backslash \{1\}$, por lo que $g(1)$ no está definido. Observemos su gráfica (Figura 3.2):*

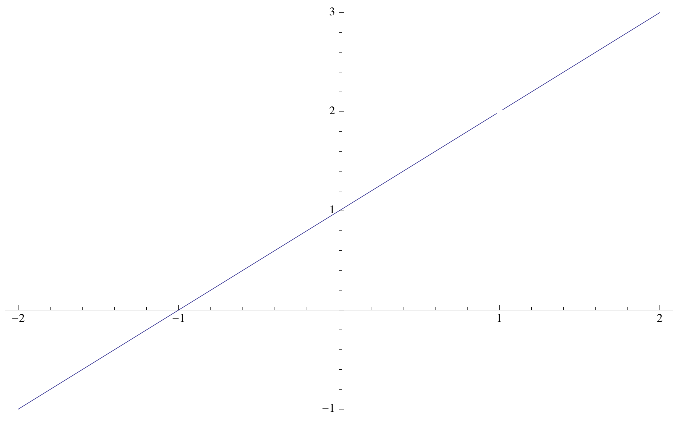

Figura 3.2: Gráfica de g

Observemos que si x es un valor cercano a 1, entonces $g(x)$ es cercano a un valor fijo, en particular 2, tal como lo muestra la Tabla de valores:

x	$g(x)$
-1	0
0	1
0,5	1,5
0,7	1,7
0,8	1,8
0,96	1,96
1,001	2,001
1,12	2,12
1,3	2,3

Cuadro 3.1: Tabla de valores

por lo que si consideramos $\delta = \epsilon$, obtenemos que $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$.

Lo que sigue son Teoremas muy importnates para el cálculo de límites.

Teorema 173 *Si el límite de una función existe, entonces es único.*

Demostración. Ver demostración Teorema 166 ■

Teorema 174 *Supongamos que f, g son funciones reales y que* $\lim\limits_{x\to p} f(x) = F$, $\lim\limits_{x\to p} g(x) = G$, *entonces*

(a) $\lim\limits_{x\to p}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to p} f(x) + \lim\limits_{x\to p} g(x) = F + G$

(b) $\lim\limits_{x\to p} kf(x) = kF$

(c) $\lim\limits_{x\to p}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to p} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} g(x) = F \cdot G$

(d) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)} = \dfrac{F}{G}$; *siempre que $g(x) \neq 0$ para todo x.*

Demostración. Análoga a la demostración del Teorema 167 ■

Teorema 175 *Sean f, g, h funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y* $\lim\limits_{x\to p} f(x) = F$, $\lim\limits_{x\to p} h(x) = F$, *entonces* $\lim\limits_{x\to p} g(x) = F$.

Demostración. Si $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p} h(x) = F$, entonces para cada $\epsilon > 0$:

$$\text{existe } \delta_1 > 0 \text{ tal que } |x-p| < \delta_1 \text{ entonces } F - \epsilon < f(x) < \epsilon + F,$$

$$\text{existe } \delta_2 > 0 \text{ tal que } |x-p| < \delta_2 \text{ entonces } F - \epsilon < g(x) < \epsilon + F.$$

Luego, escogiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $|x-p| < \delta$ entonces :

$$\begin{array}{cc} & F - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \epsilon + F \\ \Leftrightarrow & F - \epsilon < g(x) < \epsilon + F \\ \Leftrightarrow & |g(x) - F| < \epsilon. \end{array}$$

■

3.2.1. Límites Laterales

Sea f una función definida en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$, aunque no necesariamente en el punto. Al hallar el límite de f en a hay que considerar, si es posible, valores de x que tienden al punto a tanto por su derecha como por su izquierda. Existen muchas funciones, como las definidas a trozos, en que estos valores (por la derecha y por la izquierda) hay que considerarlos por separado, obteniendo lo que se conoce como límites laterales:

Definición 176 *Se dice que L^- es el límite por la izquierda de f en el punto a si $f(x)$ tiende a L^- cuando x tiende a a por su izquierda (con valores menores que a), es decir:*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L^- \Leftrightarrow \left(\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } a-\delta < x < a \Longrightarrow |f(x)-L^-| < \epsilon\right).$$

Análogamente tenemos,

Definición 177 *Se dice que L^+ es el límite por la derecha de f en el punto a si $f(x)$ tiende a L^+ cuando x tiende a a por su derecha (con valores mayores que a), es decir:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L^+ \Leftrightarrow \Big(\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } a < x < a+\delta \Longrightarrow |f(x)-L^+| < \epsilon\Big).$$

Observación 178 *Claramente, existe el límite de una función en un punto si y sólo si existen los límites laterales y coinciden. Cuando la función sólo está definida a uno de los lados del punto, se define el límite como el límite lateral correspondiente.*

3.2.2. Límites Notables o Fundamentales

LLamaremos límites Notables o fundamentales a aquellos límites que tienen una estructura determinada, que podemos reconocer o que a través de propiedades algebraicas podemos llegar a obtener. Con estos, nos será más sencillo calcular ciertos límites.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

   Demostración. Consideremos un entorno cercano a cero donde

   $$\sin(x) \leq x \leq \operatorname{tg}(x). \tag{3.2}$$

   Si dividimos 3.2 por $\sin(x)$, obtenemos:

   $$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)},$$

   considerando los inversos, obtenemos:

   $$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x). \tag{3.3}$$

   Aplicando límite, con $x \to 0$

   $$1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \geq 1.$$

   Usando Teorema 175 tenemos que:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

   ■

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

   Demostración. Ejercicio ■

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

   Demostración.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} &= \lim_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}\\
&= \ln\left(\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}\right)\\
&= \ln(e)\\
&= 1
\end{aligned}$$

■

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

   Demostración. Consideremos $u = e^x - 1$, entonces $u \to 0$, así $e^x = y+1$ y $\ln(y+1) = x$. Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(y+1)} &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(u+1)}{u}}\\
&= \frac{1}{\lim_{u\to 0}\frac{\ln(u+1)}{u}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

■

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln(a), \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

   Demostración. Análogo al límite notable 4. ■

3.2.3. Ejercicios Resueltos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{8}}{x-2}$.
   Solución.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{8}}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8-x^3}{8x^3}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{-(x^3-2^3)}{8x^3}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{-(x-2)(x^2+2x+2^2)}{8x^3}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)(x^2+2x+2^2)}{8(x-2)x^3} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-(x^2+2x+2^2)}{8x^3} \\
&= -\frac{12}{64} = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.
   Solución.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x-7}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}} & \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x-4}-\sqrt{3})(\sqrt{x-4}+\sqrt{3})} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{((\sqrt{x-4})^2-\sqrt{3}^2)} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{x-4-3} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{x-7} \\
&= \lim_{x\to 7} \sqrt{x-4}+\sqrt{3} \\
&= \sqrt{3}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

■

4. Calcular $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.
Solución. Para resolver este límite usaremos un recurso algebraico: cambio de variable. Hagamos $y = \sqrt[6]{x}$, luego si $x \longrightarrow 64$, entonces $y \longrightarrow 2$. Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 2} \frac{y^3-8}{y^2-4} &= \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)} \\
&= \lim_{y\to 2} \frac{(y^2+2y+4)}{y+2} = 3.
\end{aligned}$$

■

5. Calcular $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$.
Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})}{(x-a)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}.
\end{aligned}$$

■

6. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{x}$.
   Solución.
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{x} \cdot \frac{7}{7}$$
   Haciendo $u = 7x$, si $x \to 0$, entonces $u \to 0$. Reemplzando tenemos:
   $$\begin{aligned} \lim_{u\to 0} \frac{7\cdot \sin(u)}{u} &= 7 \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} \\ &= 7 \cdot 1 = 7. \end{aligned}$$
   ■

7. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.
   Solución.
   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} \\ &= 1\cdot 1\cdot 1 = 1. \end{aligned}$$
   ■

8. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sec x}$.
Solución.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\sec x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\dfrac{1}{\cos x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\dfrac{\cos(x)-1}{\cos(x)}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot\cos(x)}{\cos(x)-1}\cdot\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cdot\cos(x))(\cos(x)+1)}{-(1-\cos^2(x))} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cdot\cos(x))\,(\cos(x)+1)}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x)+1)}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{x^2}} \\
&= \frac{-\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x)+1)}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}} \\
&= \frac{-2}{1} = -2.
\end{aligned}
$$

■

9. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}$.
Solución. En primer lugar amplificaremos la fracción algebraica por el numerador, entonces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin^2(x)}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2-(1+\cos(x))}{\sin^2(x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)})}
\end{aligned}
$$

Ahora amplificaremos nuevamente por el numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)})} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)})}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)})(1+\cos(x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)})(1+\cos(x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos(x)})(1+\cos(x))}\\
&= \frac{1}{2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

■

10. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.
Solución.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Para resoler este límite, debemos usar el límite notable número 2. Hagamos el siguiente cambio de variable. Digamos $v=\dfrac{1}{x}$, si $x\to\infty$, entonces $v\to 0$. Reemplazamos

$$\lim_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}} = e.$$

■

11. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+4x}{4x}\right)^{9x}$.
Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+4x}{4x}\right)^{9x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4x}+\frac{4x}{4x}\right)^{9x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4x}+1\right)^{9x}
\end{aligned}$$

Cambiemos $u=\dfrac{3}{4x}$, luego si $x\to\infty$, entonces $u\to 0$. Reemplazando:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0}(1+u)^{9\cdot\frac{3}{4u}} &= \left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{\frac{27}{4}}\\
&= (e)^{\frac{27}{4}} = e^{\frac{27}{4}}.
\end{aligned}$$

■

12. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$.
Solución.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} &= \lim_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{x}}\right)^2\\ &= \lim_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^6\end{aligned}$$
Haciendo $t=3x$, entonces $t\to 0$. Reemplazamos:
$$\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^6 = e^6.$$
■

13. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$.
Solución.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}\cdot\frac{3}{3}\\ &= \lim_{x\to 0}3\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}\end{aligned}$$
Haciendo $u=3x$, entonces $u\to 0$. Reemplazamos:
$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0}3\cdot\frac{e^{u}-1}{u} &= 3\cdot\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u}\\ &= 3\cdot 1 = 3.\end{aligned}$$
■

14. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}(x)}-1}{\operatorname{tg}(x)}$.
Solución. Sea $u=\operatorname{tg}(x)$, entonces $u\to 0$, reemplazando tenemos:
$$\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u} = 1.$$
■

15. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}$.
Solución.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}\cdot\frac{3x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{2}{3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}}\cdot\frac{2}{3}\\ &= 1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$
■

16. Calcular $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x)-\ln(2)}{x-2}$.
Solución. Cambiemos variable de tal modo que $u = x-2$, entonces $u \to 0$. Reemplazamos

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0} \frac{\ln(u+2)-\ln(2)}{u} &= \lim_{u\to 0} \frac{\ln\left(\frac{u+2}{2}\right)}{u}\\ &= \lim_{u\to 0} \frac{\ln\left(\frac{u}{2}+1\right)}{u}\end{aligned}$$

Si $h = \dfrac{u}{2}$, entonces $h \to 0$, con esto obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\ln(h+1)}{2h} &= \frac{1}{2}\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln(h+1)}{h}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

■

3.2.4. Ejercicios Propuestos

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} =$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} =$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)} =$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}}{\sin(2x)} =$

5. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{5x+3} =$

6. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{e^{2x^2+x+1}-e^{x^2+x+1}}{x^2-2} =$

7. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{(x-\pi)\sec(x)} =$

3.3. Continuidad

En esta sección se estudian las funciones continuas de una variable real. Vamos a demostrar algunos teoremas importantes sobre funciones continuas que, aunque son realmente notables, están más allá del alcance del curso cálculo elemental. Son accesibles ahora a causa de nuestra mejor comprensión del sistema de números reales, especialmente de aquellas propiedades que se derivan del axioma de completitud.

Definición 179 *Sea $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $p \in E$, se dice que f es continua en p si*
$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 : |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Observación 180 *Si f es continua en todo punto de E, se dice que f es continua en E.*

Observación 181 *Debemos ver que f debe estar definida en el punto p para que sea continua en p.*

Observación 182 *Si p es un punto aislado de E, la definición implica que toda función f que tiene a E como dominio de definición es continua en p.*

La Observación anterior es correcta, dado que si elegimos un $\epsilon > 0$ cualquiera, podemos escoger $\delta > 0$, de modo que el único punto $x \in E$, para el cual $|x - p| < \delta$ sea $x = p$; entonces $|f(x) - f(p)| = 0 < \epsilon$.

Teorema 183 *En las condiciones enunciadas en la Definición 179, si admitimos que p es un punto de acumulación de E, f será continuo en p si, y solo si $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.*

Demostración. Se ve claramente si comparamos las Definiciones 171 y 179.
■

Un Teorema muy importante asociado a la composición de funciones, es el siguiente:

Teorema 184 *Sea $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : f(E) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*
$$h(x) = g(f(x)) \qquad (x \in E).$$
Si f es continua en todo punto $p \in E$ y g es continua en todo punto $f(p)$, entonces h es continua en p.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como g es continua en $f(p)$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $|y - f(p)| < \delta_1$ y $y \in f(E)$, entonces $|g(y) - g(f(p))| < \epsilon$. Además como f es continua en p, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - p| < \delta$ y $x \in E$, entonces

$|f(x)-f(p)| < \delta_1$. Luego tenemos que $|h(x)-h(p)| = |g(f(x))-g(f(p))| < \epsilon$. ■

Una caracterización imporante sobre las funciones continuas es lo que nos indica el próximo Teorema:

Teorema 185 *Una función f es continua en $\mathbb{R}$ si, y solo si $f^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbb{R}$ para todo conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que f es continua en $\mathbb{R}$ y que $V \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto. Sea $p \in \mathbb{R}$ y $f(p) \in V$, como V es abierto, existe un $\epsilon > 0$, tal que $y \in V$ si $|f(p) - y| < \epsilon$, y como f es continua en p, existe $\delta > 0$, tal que $|x-p| < \delta$ entonces $|f(x) - f(p)| < \epsilon$. Así $x \in f^{-1}(V)$, siempre que $|x-p| < \delta$.

Inversamente, supongamos que $f^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbb{R}$, para todo V abierto en $\mathbb{R}$. Fijemos $p \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, y sea V el conjunto de todos $y \in \mathbb{R}$ tales que $|y - f(p)| < \epsilon$. V será abierto; por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto, por lo que existe, $\delta > 0$ tal que $x \in f^{-1}(V)$ en cuanto $|x - p| < \delta$. Pero si $x \in f^{-1}(V)$, cumple que $f(x) \in V$, de modo que $|f(x) - f(p) < \epsilon$, lo que concluye la demostración. ■

Respecto de las propiedades algebraicas respecto de continuidad, tenemos lo que sigue:

Teorema 186 *Sean f, g dos funciones continuas en p, entonces*

(a) $f + g$ es continua en p.

(b) $f \cdot g$ es continua en p.

(c) $k \cdot f$ es continua en p, para todo $k \in \mathbb{R}$.

(d) $\dfrac{f}{g}$ es continua en p.

Demostración. Se procede de manera análoga a la demostración del Teorema 167 ■

3.3.1. Teorema del Valor Intermedio

Una propiedad muy útil para estudiar el recorrido de una función continua, es el hecho que una tal función que toma un par de valores, está obligada a tomar todos los valores intermedios. La esencia de esta propiedad la enunciamos en el siguiente resultado de existencia de raíces de ecuaciones.

Teorema 187 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.*

Demostración. Consideremos el intervalo $I_0 = [a, b]$ y $c = \dfrac{a+b}{2}$ su punto medio. Tomando $I_1 = [a, c]$, si $f(a)f(c) \leq 0$ e $I_1 = [c, b]$, si $f(c)f(b) \leq 0$, obtenemos un intervalo $I_1 = [a_1, b_1] \subset I_0$ con $f(a_1)f(b_1) \leq 0$. Iterando este procedimiento se obtiene una sucesión decreciente de intervalos $I_n = [a_n, b_n] \subset I_{n-1}$ tal que

$$f(a_n)f(b_n) \leq 0. \tag{3.4}$$

Por el Teorema de Intervalos encajonados, Teorema 137, las sucesiones a_n y b_n convergen hacia un mismo punto $x \in [a, b]$. Aplicando límite en (3.4) tenemos que $f(x)^2 \leq 0$, por lo que $f(x) = 0$. ■

Teorema 188 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe un $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración. Sea g una función tal que $g(x) = f(x) - c$. Como f es continua, entonces g es continua. Además, note que $g(a) < 0$ y $g(b) > 0$, entonces $g(a)g(b) < 0$; es decir, g satisface las condiciones del Teorema 187. Entonces existe un $x \in [a, b]$ tal que $g(x) = 0$, pero esto significa que $f(x) - c = 0$, por lo que $f(x) = c$. ■

El teorema siguiente es llamado Teorema de Weierstrass.

Teorema 189 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.*

Demostración. Ejercicio. ■

3.3.2. Continuidad Uniforme

Definición 190 *Sea $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que f es uniformemente continua en E si, y solo si,*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 : |p - q| < \delta \Longrightarrow |f(p) - f(q)| < \epsilon.$$

Es importante estudiar las diferencias entre *continuidad uniforme* y *continuidad.*
Primero, la continuidad uniforme es una propiedad de una función en un conjunto, mientras que la continuidad se puede definir en un solo punto; y no tiene sentido la pregunta de si una función es uniformemente continua en un cierto punto. Segundo, si f es continua en E, es posible hallar para cada $\epsilon > 0$ y cada punto $p \in E$, un número $\delta > 0$ que posee la propiedad enunciada en la Definición 179. Este δ depende de ϵ y p. Pero si f es uniformemente continua en E, es posible hallar, para cada $\epsilon > 0$, un número $\delta > 0$ que cumpla para todos los puntos $p \in E$.

Es evidente que toda función uniformemente continua es continua.

3.3.3. Ejercicios Resueltos

1. Considérese la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

   Analalizar la continuidad de la función en $x = 2$.

   Solución. Se debe analizar si f satisface las condiciones para ser continua en $x = 2$. Notemos que $f(2) = 4$, (existe). Ahora verifiquemos si se cumple la condición

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x).$$

   Calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Con esto, $\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{4} \neq f(2) = 4$, entonces puede concluirse que f no es continua en $x = 2$. ■

2. Demuestre que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua tal que $f(a) < a$ y $f(b) > b$ entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

   Demostración. Considere la función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = f(x) - x$. Por ser f y la función identidad continua φ es continua. Además

$$\varphi(a) = f(a) - a < 0$$

   y

$$\varphi(b) = f(b) - b > 0,$$

   entonces $\varphi(a)\varphi(b) < 0$. Por el Teorema 187, existe $c \in [a, b]$ tal que $\varphi(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0 \Longrightarrow f(c) = c$. ■

3. Calcule a, b de modo la que la función f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

   sea continua en todo su dominio.

Solución. Como los polinomios y las raíces cuadradas son funciones continuas y además la suma, la resta, el producto y cuociente de funciones continuas es una función continua obtenemos que f es continua en $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. Falta analizar la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 2$.

Por ser f una función definida a trozos, debemos recurrir a calcular los límites laterales asociado a los puntos $x = 0$ y $x = 2$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2} \\
&= \frac{\sqrt{1+0^2}+1}{1} = 2.
\end{aligned}$$

Luego, para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} ax + b = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2, \tag{3.5}$$

con lo que obtenemos $b = 2$.

Por otro lado, en el punto $x = 2$ tanto el numerador como el denominador se anulan, una posibilidad de evitar esta indeterminación es transformar algebraicamente la expresión amplificando por las expresiones conjugadas del numerador y del denominador:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \cdot \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2-x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{(4x-8)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+1)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4\left(x+\sqrt{x+2}\right)} \\
&= \frac{(2+1)\sqrt{4\cdot 2+1}+3}{4(2+\sqrt{2+2})} \\
&= \frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

Luego, para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

$$\lim_{x\to 2^-} ax+b = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{9}{8}, \tag{3.6}$$

como $b=2$, tenemos que $2a+2=\dfrac{9}{8} \Longrightarrow a=\dfrac{-7}{16}$. En conclusión si $a=\dfrac{-7}{16}$ y $b=2$ f es continua en todo su dominio. ■

4. Probar que el polinomio $p(x)=x^4-x^3-1$ tiene a lo más dos racíces reales.

   Demostración. Si existen $x<y$ tales que $p(x)\cdot p(y)<0$ entonces existe $c\in[x,y]$ tal que $p(c)=0$ (Por Teorema 188), dado que los polinomios son funciones continuas.
   Apliquemos este criterio. Notemos que $p(-1)=1, p(0)=-1, p(1)=-1$, $p(2)=7$. Entonces entre -1 y 0 y entre 1 y 2 debe haber soluciones de $p(x)=0$. ■

5. Demuestre que la función h, definida por $h(x)=3x$ es uniformemente continua en $(-\infty,\infty)$.

   Demostración. Note que $|h(p)-h(q)|=|3p-3q|=3|p-q|<\epsilon$, siempre que $|p-q|<\dfrac{\epsilon}{2}$. Por lo que basta considerar $\delta=\dfrac{\epsilon}{2}$. ■

3.3.4. Ejercicios Propuestos

1. Determinar las constantes $a,b\in\mathbb{R}$ de tal modo que la función f sea continua, si:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|} & \text{si } |x|>1\\ a+bx^2 & \text{si } |x|\le 1.\end{cases}$$

2. Sea $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua. Supongamos que $f(x)\in\mathbb{Q}\ \forall x\in[0,1]$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. Pruebe que f es constante.

3. Sea $f(x)=x^3-x^2+x$ demuestre que existe $x_0\in\mathbb{R}$ tal que $f(x_0)=\pi$.

4. Demostrar que la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\ne 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

   es continua en $x=0$.

5. Sea $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua en el conjunto acotado E. Demuestre que f es acotada en E.

6. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((1-a)x)}{x} & \text{si } \ x < 0, \\ b(x-a)^2 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{\sin(a(x-1))}{\ln(x)} & \text{si } \ 1 < x \end{cases},$$

   donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, $a \neq 1$. Analice la continuidad de la función.

4

Diferenciación

"Los encantos de esta ciencia sublime, la matemática, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella."
– Carl Friedrich Gauss

En este capítulo trataremos uno de los conceptos más importantes del Cálculo Diferencial. Si bien es cierto que el concepto de una función es fundamental, que no se puede hacer nada sin límites ni continuidad, todo lo que hemos hecho hasta ahora tiene como fín las ideas que vienen a continuación. El concepto que es característico del Cálculo: *la derivada.*

4.1. Derivada de funciones explícitas

Definición 191 *Supongamos $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Para cada $x \in [a, b]$, formemos el cuociente*

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \qquad (a < t < b, t \neq x)\,, \tag{4.1}$$

y definamos

$$f'(x) = \lim_{t \longrightarrow x} \varphi(t), \tag{4.2}$$

con la condición que exista este límite, de acuerdo con la Definición 171.

Lo que hacemos es asociar a la función f una función f', cuyo dominio es el conjunto de los puntos x en los que existe (4.2); a f' se le llama **derivada de** *f.*

Definición 192 *Si f' está definida en el punto x, decimos que f es* **diferenciable** *en x. Además si f' está definida en todos los puntos de un conjunto $A \subseteq [a, b]$, decimos que f' es diferenciable en A.*

Observación 193 *Para que (4.2) exista deben existir los límites por izquierda y por derecha, entonces podemos referirnos también a la definición de derivadas a la derecha y a la izquierda.*

Observación 194 *Es habitual ver que algunos textos o autores tengan otra notación para $f'(x)$, entre ellas están: $Df(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y'.*

Revisemos un ejemplo para ver la derivada de una función.

Ejemplo 195 *Hallar f', si f está definida por $f(x) = x^2$.*
Para obtener $f'(x)$, debemos calcular el límite según (4.2), entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x} \frac{t^2-x^2}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x} \frac{(t+x)(t-x)}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x} (t+x) \\ &= x+x = 2x. \end{aligned}$$

En conclusión si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$.

Un Teorema muy importante es el que se presenta a continuación , ya que nos entrega una condición necesaria para la diferenciación.

Teorema 196 *Supongamos f definida en $[a, b]$. Si f es diferenciable en un punto $x \in [a, b]$, entonces es continua en x.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to x} f(t) - f(x) &= \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \cdot (t-x) \\ &= \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \cdot \lim_{t\to x}(t-x) \\ &= f'(x) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$. ■

El recíproco de este Teorema no es cierto. Por ejemplo la función valor absoluto es continua en $x = 0$, pero no es diferenciable en ese valor. En efecto, si $f(x) = |x|$, tenemos que

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-t-0}{t-0} = -1$$

y

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t-0}{t-0} = 1.$$

Como vemos, los límites laterales son diferentes, por lo que $\lim_{t\to 0} \varphi(0) = f'(0)$ no existe, es decir, la función valor absoluto no es diferenciable en $x = 0$, pero si es continua.

El siguiente Teorema es de mucha importancia, debido a que en él se sustentan las obtenciones de las derivadas de funciones dadas paramétricamente, encontrar las derivadas de funciones inversas emblemáticas tales como arcsin, arc cos, entre otras.

Teorema 197 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), estrictamente creciente o estrictamente decreciente en (a,b). Entonces f admite función inversa derivable en (a,b) y $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$.*

Demostración. Si la función f es estrictamente creciente en $[a,b]$ (resp. estrictamente decreciente) en $[a,b]$, luego es inyectiva y existe $f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b]$ tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ para cada $x \in [a,b]$. De hecho, si f es estrictamente creciente, $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ y si es estrictamente decreciente, $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$. Veamos primero, que si f es continua en x_0 , entonces f^{-1} es continua en $y_0 = f(x_0)$. Supongamos que f es estrictamente creciente y sea $y_0 \in (f(a), f(b))$. Tomemos un $\epsilon > 0$ de manera que el intervalo $\left(f^{-1}(y_0) - \epsilon, f^{-1}(y_0) + \epsilon\right) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq (a,b)$; entonces $f(x_0 - \epsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \epsilon)$ y existen y_1 e y_2 tales que $y_1 = f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon) = y_2$. Sea $\delta > 0$, tal que $E(y_0, \delta) \subseteq (y_1, y_2)$,entonces,para cada $y \in E(y_0, \delta)$, se cumple que $y_1 \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq y_2$ y se tiene que cumplir que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$ pues de no ser así, si $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y)$ ó $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y_2)$ por ser f estr. creciente sería $y_1 \geq y$ ó $y \geq y_2$ lo que es absurdo (dado que si f es estrictamente creciente o decreciente f^{-1} también lo es). Por consiguiente, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$, es decir $x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon$, es decir $f^{-1}(y_0) - \epsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \epsilon$ y f^{-1} es continua en y_0. Si el punto es un extremo del intervalo o para f estrictamente decreciente, basta adaptar la prueba. Veamos ahora que si f es derivable en $x_0 \in (a,b)$, entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$, pero esto es sencillo, pues si $y \neq y_0$,

$$\begin{aligned}
\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Si $y \to y_0$, $x = f^{-1}(y)$ tenderá hacia $x_0 = f^{-1}(y_0)$ con $x \neq x_0$ por ser f^{-1} inyectiva, en consecuencia, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)$ con lo que f^{-1} es diferenciable en y_0 y su derivada es $(f'(x_0))^{-1}$.

■

Lo que sigue, es encontrar la derivada de funciones tradicionales, tales como:

- raíz cuadrada
- potencia
- logarítmica
- exponencial y
- trigonométricas.

4.1.1. Funciones Algebraicas

Aplicación raíz cuadrada

Consideremos f tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Debemos encontrar $f'(x)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{t - x} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{t - x} \cdot \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{t - x}{(t - x)(\sqrt{t} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Notemos que esta función no es diferenciable para $x = 0$.

Aplicación Potencia

Consideremos f tal que $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Debemos encontrar $f'(x)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{(t - x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \ldots + tx^{n-2} + x^{n-1})}{t - x} \\
&= \lim_{t\to x} (t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \ldots + tx^{n-2} + x^{n-1}) \\
&= x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Un ejemplo claro lo podemos ver en el Ejemplo 195.

4.1.2. Funciones Trigonométricas

Aquí, nos dedicaremos a encontrar únicamente las dereivadas de la función seno y coseno.

Aplicación Seno
Consideremos f tal que $f(x) = \sin(x)$. Debemos encontrar $f'(x)$. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{\sin(t) - \sin(x)}{t - x},$$

haciendo $u = t - x$, tenemos que $u \to 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u + x) - \sin(x)}{u} &= \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)\cos(x) + \sin(x)\cos(u) - \sin(x)}{u} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)\cos(x)}{u} + \lim_{u \to 0} \frac{\sin(x)(\cos(u) - 1)}{u} \\
&= \cos(x) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} + \sin(x) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\cos(u) - 1}{u} \\
&= \cos(x) \cdot 1 + \sin(x) \cdot 0 \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

Aplicación Coseno
Consideremos f tal que $f(x) = \cos(x)$. Debemos encontrar $f'(x)$. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{\cos(t) - \cos(x)}{t - x},$$

haciendo $u = t - x$, tenemos que $u \to 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to 0} \frac{\cos(u + x) - \cos(x)}{u} &= \lim_{u \to 0} \frac{\cos(u)\cos(x) - \sin(x)\sin(u) - \cos(x)}{u} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{\cos(u)\cos(x) - \cos(x)}{u} - \lim_{u \to 0} \frac{\sin(x)\sin(u)}{u} \\
&= \cos(x) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\cos(u) - 1}{u} - \sin(x) \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} \\
&= \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}$$

Observemos que las funciones seno y coseno son diferenciables en todo su dominio.

Aplicación Arcoseno
Recordemos que arcoseno, la función inversa de seno, es una función definida como $\arcsin : [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $y = \arcsin(x) \longleftrightarrow x = \sin(y)$.

Aplicando el Teorema 197, de la función inversa se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}\sin(y)} = \frac{1}{\cos(y)}. \tag{4.3}$$

Como $\cos(y) \geq 0$ para $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$, pero $x = \sin(y)$, entonces

$$\cos(y) = \sqrt{1-x^2}. \tag{4.4}$$

Reemplazando (4.4) en (4.3) tenemos

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De una manera análoga podemos obtener las derivadas de las otras funciones inversas de coseno, tangente, cotangete. secante y cosecante.

4.1.3. Función Logarítmica

Consideremos f tal que $f(x) = \ln(x)$. Debemos encontrar $f'(x)$. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{\ln(t)-\ln(x)}{t-x},$$

haciendo $u = t - x$, tenemos que $u \to 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{u\to 0} \frac{\ln(u+x)-\ln(x)}{u} &= \lim_{u\to 0} \frac{\ln\left(\frac{u+x}{x}\right)}{u} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{\ln\left(\frac{u}{x}+1\right)}{u} \end{aligned}$$

cambiando $v = \dfrac{u}{x}$, entonces $v \to 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{v\to 0} \frac{\ln(v+1)}{vx} &= \frac{1}{x}\lim_{v\to 0} \frac{\ln(v+1)}{v} \\ &= \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Notemos que esta función no es diferenciable para $x = 0$.

4.1.4. Función Exponencial

Consideremos f tal que $f(x) = e^x$. Debemos encontrar $f'(x)$. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{e^t - e^x}{t-x},$$

haciendo $u = t - x$, tenemos que $u \to 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} \frac{e^{u+x} - e^x}{u} &= \lim_{u\to 0} \frac{e^x\left(e^u - 1\right)}{u} \\
&= e^x \cdot \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} \\
&= e^x \cdot 1 = e^x.
\end{aligned}$$

La función exponencial es diferenciable en todo su dominio.

Como resumen del desarrollo anterior tenemos:

- Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
- Si $f(x) = \sin(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$.
- Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $f'(x) = -\sin(x)$.
- Si $f(x) = \arcsin(x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Si $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.

4.2. Álgebra de Derivadas

Esta sección tiene como objetivo principal, debido a la importancia, enuciar y demostar el siguiente Teorema, que nos ayudará a calcular derivadas.

Teorema 198 *Supongamos que f y g están definidas en $[a,b]$ y son diferenciables en un punto $x \in [a,b]$. Entonces:*

1. *$f + g$ es diferenciable en x.*
2. *$f \cdot g$ es diferenciable en x.*
3. *$\dfrac{f}{g}$ es diferenciable en x.*

Además:

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

b) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Considerando en c) $g(x) \neq 0$.

Demostración.

(a)

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{(f+g)(t)-(f+g)(x)}{t-x} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{f(t)+g(t)-f(x)-g(x)}{t-x} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{(f(t)-f(x))+(g(t)-g(x))}{t-x} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \lim_{t\to x} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} \\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{(f\cdot g)(t)-(f\cdot g)(x)}{t-x} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{f(t)\,(g(t)-g(x))+g(x)\,(f(t)-f(x))}{t-x} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{g(x)\,(f(t)-f(x))}{t-x} + \lim_{t\to x} \frac{f(t)\,(g(t)-g(x))}{t-x} \\
&= g(x)\cdot\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \lim_{t\to x} f(t)\cdot \lim_{t\to x} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} \\
&= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Note que por el Teorema 196, $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$.

(c)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(t)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{t-x} \\
&= \lim_{t\to x} \frac{1}{g(t)\cdot g(x)}\left(g(x)\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - f(x)\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right) \\
&= \lim_{t\to x} \frac{1}{g(t)\cdot g(x)}\cdot\left(g(x)\cdot\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - f(x)\cdot\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right) \\
&= \frac{1}{g^2(x)}\cdot\left(g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)\right) \\
&= \frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

Note que por el Teorema 196, $\lim_{t\to x} g(t) = g(x)$.

■

Observación 199 *No es difíl ver que si f es una función constante, es decir $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = 0$.*

4.2.1. Regla de la Cadena

El siguiente Teorema es conocido como regla de la cadena.

Teorema 200 *Supongamos que f es continua en $[a, b]$, además existe $f'(x)$ en algún punto $x \in [a, b]$. g está bien definida en un intervalo I que contiene el recorrido de f, y g es diferenciable en el punto $f(x)$. Si*

$$h(t) = g(f(t)) \qquad (a \leq t \leq b),$$

entonces h es diferenciable en x, y

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Demostración. Sea $y = f(x)$. por la definición de derivada, tenemos

$$f(t) - f(x) = (t - x)(f'(x) + u(t)), \tag{4.5}$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)(g'(y) + v(s)), \tag{4.6}$$

donde $t \in [a, b]$;$s \in I$, y $u(t) \to 0$ cuando $t \to x$, $v(s) \to 0$ si $s \to y$. Sea $s = f(t)$. Aplicando (4.6) y (4.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) \\ &= (f(t) - f(x)) \cdot (g'(y) + v(s)) \\ &= (t - x) \cdot (f'(x) + u(t)) \cdot (g'(y) + v(s)), \end{aligned}$$

o si $t \neq s$,

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = (g'(y) + v(s)) \cdot (f'(x) + u(t)). \tag{4.7}$$

Suponiendo que $t \to x$, vemos que $s \to y$, por la continuidad de f, así que el segundo miembro de (4.7) tiende a $g'(y)f'(x)$, es decir

$$\lim_{t \to x} \frac{h(t) - h(x)}{t - x} = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

■

Ejemplo 201 *Hallar $f'(x)$ si f está definida por $f(x) = e^{x^2}$.*
Podemos ver que f es una composicón entre la función exponencial y la función potencia para $n = 2$. Aplicando el Teorema 200 tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= exp'\left(x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' \\ &= e^{x^2} \cdot 2x \\ &= 2xe^{x^2}. \end{aligned}$$

4.2.2. Ejercicios Resueltos

1. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = \cos(x) + x^3$.

   Solución. Usando el Teorema 198 (a), tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\cos(x) + x^3\right)' \\ &= (\cos(x))' + \left(x^3\right)' \\ &= -\sin(x) + 3x^2. \end{aligned}$$

2. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$.

   Solución:
   Usando el Teorema 198 (b), tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(x) \cdot \ln(x))' \\ &= (\sin(x))' \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot (\ln(x))' \\ &= \cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x)\frac{1}{x} \\ &= \cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}. \end{aligned}$$

   ■

3. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = \mathrm{tg}(x)$.

   Solución. Usando el Teorema 198 (c), tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{\cos(x) \cdot (\sin(x))' - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)\,(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x). \end{aligned}$$

   ■

4. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x^{\frac{1}{3}}\\
&= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\\
&= \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\\
&= \frac{1}{3\cdot x^{\frac{2}{3}}}\\
&= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}.
\end{aligned}$$

■

5. Calcular $h'(x)$, sabiendo que $h(x) = (3+5x)^{20}$.

   Solución. Notemos que h es una composición de funciones (función potencia compuesta con la función lineal). Luego debemos aplicar el Teorema 200. Entonces:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left((3+5x)^{20}\right)'\\
&= 20(3+5x)^{19}\cdot(3+5x)'\\
&= 20(3+5x)^{19}\cdot(3'+(5x)')\\
&= 20(3+5x)^{19}\cdot 5\\
&= 100(3+5x)^{19}.
\end{aligned}$$

■

6. Hallar $g'(x)$, si $g(x) = \sin(6x+\ln(x))$.

   Solución. Claramente g es una composición, entonces debemos aplicar el Teorema 200. Entonces:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (\sin(6x+\ln(x)))'\\
&= (\sin)'(6x+\ln(x))\cdot(6x+\ln(x))'\\
&= \cos(6x+\ln(x))\cdot((6x)'+\ln'(x))\\
&= \cos(6x+\ln(x))\cdot\left(6+\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

■

7. Si $f(x) = \ln\left(\sqrt{3x^3}\cdot x\right)$, calcular $f'(x)$.

   Solución. Notemos, nuevamente, que la función que queremos derivar es una composición. Además, el argumento de la función logarítmo contiene un producto, que se debe derivar segun Teorema 198. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\ln\left(\sqrt{3x^3}\cdot x\right)\right)' \\
&= \ln'\left(\sqrt{3x^3}\cdot x\right)\cdot\left(\sqrt{3x^3}\cdot x\right)' \\
&= \frac{1}{\sqrt{3x^3}\cdot x}\cdot\left(\left(\sqrt{3x^3}\right)'\cdot x+\sqrt{3x^3}\cdot x'\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3x^3}\cdot x}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{3x^3}}\cdot\left(3x^3\right)'\cdot x+\sqrt{3x^3}\cdot 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3x^3}\cdot x}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{3x^3}}\cdot\left(9x^2\right)\cdot x+\sqrt{3x^3}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3x^3}\cdot x}\cdot\left(\frac{9x^3}{2\cdot\sqrt{3x^3}}+\sqrt{3x^3}\right) \\
&= \frac{9x^2}{2\cdot(3x^3)}+\frac{1}{x} \\
&= \frac{3}{2\cdot x}+\frac{1}{x} \\
&= \frac{3+2}{2x}=\frac{5}{2x}.
\end{aligned}$$

■

8. Hallar la derivada de f si $f(x)=\dfrac{3x^6-\cos(x)}{4x+7}$.

Solución. Ocupando el Teorema 198 (c) tenemos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(4x+7)\cdot\left(3x^6-\cos(x)\right)'-\left(3x^6-\cos(x)\right)(4x+7)'}{(4x+7)^2} \\
&= \frac{(4x+7)\cdot\left((3x^6)'-\cos'(x)\right)-\left(3x^6-\cos(x)\right)\left((4x)'+7'\right)}{(4x+7)^2} \\
&= \frac{(4x+7)\cdot\left(18x^5+\sin(x)\right)-\left(3x^6-\cos(x)\right)(4)}{(4x+7)^2} \\
&= \frac{(4x+7)\cdot\left(18x^5+\sin(x)\right)-4\left(3x^6-\cos(x)\right)}{(4x+7)^2}.
\end{aligned}$$

Como en el numerador de la fracción algebraica no obtendremos términos semejantes, lo que implica que no se reducirán términos, por ahora podemos dejar la derivada expresada de esa manera. ■

9. Derivar $f(x)=x^{x^x}$.

Solución. En este tipo de funciones, lo que haremos será aplicar la función logaritmo natural. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{x^x} \qquad /\ln \\ \ln(f(x)) &= \ln\left(x^{x^x}\right) \\ \ln(f(x)) &= x^x \ln(x) \end{aligned}$$

Ahora derivamos ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= (x^x)' \cdot \ln(x) + x^x \cdot \ln'(x) \\ \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= (x^x)' \cdot \ln(x) + x^x \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= (x^x)' \cdot \ln(x) + x^{x-1}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Notemos que en (4.8) aún nos queda por derivar x^x. De manera análoga al comienzo derivaremos. Digamos $y = x^x$, entonces:

$$\begin{aligned} y &= x^x \qquad /\ln \\ \ln(y) &= \ln(x^x) \\ \ln(y) &= x \cdot \ln(x), \end{aligned}$$

derivamos en ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \ln(x) + 1 \\ y' &= y \cdot (\ln(x) + 1) \\ y' &= x^x \cdot (\ln(x) + 1). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Reemplazando (4.9) en (4.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= (x^x \cdot (\ln(x) + 1)) \cdot \ln(x) + x^{x-1} \\ \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= x^x \ln^2(x) + x^x \ln(x) + x^{x-1} \\ f'(x) &= f(x) \cdot \left(x^x \ln^2(x) + x^x \ln(x) + x^{x-1}\right) \\ f'(x) &= x^{x^x} \cdot \left(x^x \ln^2(x) + x^x \ln(x) + x^{x-1}\right) \\ f'(x) &= x^{x^x + x} \cdot \ln^2(x) + x^{x^x + x} \cdot \ln(x) + x^{x^x + x - 1} \\ f'(x) &= x^{x^x + x + 1}\left(x \cdot \ln^2(x) + x \cdot \ln(x) + 1\right). \end{aligned}$$

■

10. Derivar $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^{3x} + 1}$.

    Solución. Aplicando el Teorema 198 y la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{(e^{3x}+1)\cdot(e^x-1)' - (e^x-1)\cdot(e^{3x}+1)'}{(e^{3x}+1)^2} \\
&= \frac{(e^{3x}+1)\cdot\left((e^x)'-1'\right) - (e^x-1)\cdot\left((e^{3x})'+1'\right)}{(e^{3x}+1)^2} \\
&= \frac{(e^{3x}+1)\cdot e^x - (e^x-1)\cdot e^{3x}\cdot 3}{(e^{3x}+1)^2} \\
&= \frac{(e^{3x}+1)\cdot e^x - (e^x-1)\cdot 3\cdot e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2} \\
&= \frac{e^{4x}+e^x-3e^{4x}+3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2} \\
&= \frac{-2e^{4x}+3e^{3x}+e^x}{(e^{3x}+1)^2}.
\end{aligned}$$

    ■

4.2.3. Ejercicios Propuestos

1. Derivar $f(x) = \sin^2(x) - \operatorname{tg}(x)$.
2. Demuestre que toda función de la forma $g(x) = mx + b$, con $b, m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, tiene por derivada $g'(x) = m$.
3. Derivar $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 2x}$.
4. Hallar $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{\cos(x) - x\cdot\sin(x)}$.
5. Deduzca la derivada de las funciones inversas trigonométricas de coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.
6. Demuestre que f y g tienen la misma derivada si
$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad g(x) = f\left(\frac{a+x}{1+ax}\right).$$
7. Sea $\psi(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. Demuestre que $\psi'(x) = 1 - \psi(x)^2$.
8. Encuentre $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} g(x)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, donde $g(0) = g'(0) = 0$.

9. Encuentre $f'(x)$, aplicando la definición de derivada (Definición 191), si $f(x) = \log_a(x)$, con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

10. Encuentre $f'(x)$, aplicando la definición de derivada (Definición 191), si $f(x) = \exp_a(x)$, con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

11. Hallar $h'(x)$ si $h(x) = \sin^5\left(\sqrt{\ln(x+3)}\right) - \left(x^9 + 4x^3\right)^7$.

12. Hallar $f'(x)$ si $f(x) = x^{\sin^2(x)}$.

4.3. Derivada de funciones implícitas

Si la dependencia entre x e y viene dada de forma implícita, es decir, una ecuación de la forma

$$F(x,y) = 0; \tag{4.10}$$

para hallar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$, en los casos más simples, bastará calcular la derivada con respecto a x del primer miembro de la ecuación (4.10), considerando y función de x. Igualar a cero esta derivada, es decir suponer que

$$\frac{d}{dx}F(x,y) = 0, \tag{4.11}$$

y resolver la ecuación obtenida con respecto a y'.

4.3.1. Ejercicios Resueltos

1. Hallar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ si

$$x^3 + 4y - 6xy = 0. \tag{4.12}$$

Solución. Aplicamos $\dfrac{d}{dx}$ a (4.12) y el Teorema 198, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^3 + 4y - 6xy\right) &= \frac{d}{dx}(0) \\
\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}(4y) - \frac{d}{dx}(6xy) &= 0 \\
3x^2 + 4\frac{dy}{dx} - 6\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) &= 0 \\
\frac{dy}{dx}(4 - 6x) &= 6y - 3x^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{6y - 3x^2}{4 - 6x}.
\end{aligned}$$

■

2. Hallar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ si

$$x^3 + x^2y + y^2 = 0. \tag{4.13}$$

Solución. Aplicamos $\dfrac{d}{dx}$ a (4.13) y el Teorema 198, luego tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^2y + y^2\right) &= \frac{d}{dx}(0)\\
\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(x^2y\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) &= 0\\
3x^2 + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} &= 0\\
\frac{dy}{dx}\left(x^2 + 2y\right) &= -3x^2 - 2xy\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-3x^2 - 2xy}{x^2 + 2y}.
\end{aligned}$$

■

3. Encontrar y' si $x + y = \sin(xy)$.

Solución. Derivando con respecto a x y aplicando Teorema 198 y Teorema 200:

$$\begin{aligned}
1 + y' &= \cos(xy)\left(xy' + y\right)\\
y' - \cos(xy)xy' &= -1 + cos(xy)y\\
y'\left(1 - cos(xy)x\right) &= -1 + cos(xy)y\\
y' &= \frac{cos(xy)y - 1}{1 - cos(xy)x}.
\end{aligned}$$

■

4. Encontrar y' si $\ln(y) + \dfrac{x}{y} = 4$.

Solución. Derivando con respecto a x y aplicando Teorema 198 tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\cdot y' + \frac{y - xy'}{y^2} &= 0\\
\frac{1}{y}\cdot y' + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\cdot y' &= 0\\
y'\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) &= -\frac{1}{y}\\
y'\left(\frac{y-x}{y^2}\right) &= -\frac{1}{y}\\
y' &= -\frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{y-x}\\
y' &= \frac{-y}{y-x}\\
y' &= \frac{y}{x-y}.
\end{aligned}$$

■

5. Encontrar y' si $x^x = y^y$.

   Solución. Como hemos visto anteriormente, en estos casos debemos aplciarn la función logaritmo natural. Entonces

$$\begin{aligned}
x^x &= y^y \qquad /\ln\\
\ln\left(x^x\right) &= \ln\left(y^y\right)\\
x\cdot\ln(x) &= y\cdot\ln(y).
\end{aligned}$$

   Ahora derivamos con respecto a x y usamos Teorema 198:

$$\begin{aligned}
\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} &= y'\cdot\ln(y) + y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'\\
\ln(x) + 1 &= y'\cdot\ln(y) + y'\\
\ln(x) + 1 &= y'\left(\ln(y) + 1\right)\\
y' &= \frac{\ln(x)+1}{\ln(y)+1}.
\end{aligned}$$

■

4.3.2. Ejercicios propuestos

1. Encontrar $\frac{dy}{dx}$ en $4xy^8 = 5x^2 - 7y$.
2. Encontrar $\frac{dy}{dx}$ si $y = e^x + e^y$.
3. Si $\sin(xy) = xy$, hallar y'.

4. Hallar y' si $\operatorname{tg}\left(x^2-3y\right)=x^2+3y$.

5. Calcular $\dfrac{dx}{dy}$ si $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y^2}{x^x}=0$.

4.4. Derivadas en Coordenadas paramétricas

Si la dependencia entre la aplicación y y el argumento x viene dada por medio del parámetro t

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}$$

se tiene,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

4.4.1. Ejercicios resueltos

1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, si

$$\begin{aligned} x &= \sin(2t) \\ y &= 5t^5 \end{aligned}$$

Solución. Tenemos que:

$$\frac{dx}{dt}=2\cos(2t)$$

y

$$\frac{dy}{dt}=25t^4.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{25t^4}{2\cos(2t)}. \end{aligned}$$

■

2. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, si

$$\begin{aligned} x &= 2t-1 \\ y &= t^3 \end{aligned}$$

Solución. Tenemos que:

$$\frac{dx}{dt}=2$$

y

$$\frac{dy}{dt}=3t^2.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{3t^2}{2}. \end{aligned}$$

■

3. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, si

$$\begin{aligned} x &= \arcsin\left(t^2\right) \\ y &= \sqrt{t^2-1} \end{aligned}$$

Solución. Tenemos que:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\cdot 2t$$

y

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t^2-1}}\cdot 2t.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{t^2-1}}\cdot 2t}{\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\cdot 2t} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}}\cdot 2t\cdot\frac{\sqrt{1-t^4}}{2t} \\ &= \frac{\sqrt{1-t^4}}{2\sqrt{t^2-1}}. \end{aligned}$$

■

4. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ para $t = \dfrac{\pi}{2}$, si

$$\begin{aligned} x &= 9\,(t - \sin(t)) \\ y &= 9\,(1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

Solución. Tenemos que:

$$\frac{dx}{dt} = 9(1 - \cos(t))$$

y

$$\frac{dy}{dt} = 9(\sin(t)).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{9\sin(t)}{9(1 - \cos(t))} \\ &= \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}, \end{aligned}$$

evaluando en $t = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

■

4.4.2. Ejercicios propuestos

1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, si

$$\begin{aligned} x &= \frac{3t}{1 + t^3} \\ y &= \frac{3t^2}{1 + t^3} \end{aligned}$$

2. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, si

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{t} \\ y &= \sqrt[3]{t} \end{aligned}$$

3. Hallar $\frac{dy}{dx}$, si

$$\begin{aligned} x &= \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \cos(t) - \sin(t) \\ y &= \sin(t) + \cos(t) \end{aligned}$$

4. Demostar que la función dada y dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= 2t + 3t^2 \\ y &= t^2 + 2t^3 \end{aligned}$$

satisface la ecuación

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

4.5. Derivadas de orden Superior

Definición 202 *Si f tiene una derivada f' en un intervalo, y si f' es a su vez diferenciable, representaremos su dereviada por f'' y la llamaremos derivada segunda de f. Continuando de este modo, obtenemos funciones*

$$f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)},$$

cada una de las cuales es la derivada de la precedente. A $f^{(n)}$ se le llama derivada n-ésima o de orden n de f.

Note que para que $f^{(n)}(x)$ exista en un punto x, debe existir $f^{(n-1)}(t)$ en un entorno de x y debe ser diferenciable en x.

Observación 203 *La notación anterior ($f^{(n)}(x)$), también puede ser reemplazada, tal como lo mencionamos en la Observación 194, entre ellas: $D^n f(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f}{dx^n}$, $y^{(n)}$.*

Por conveniencia de notación, para cualquier función $f : A \to \mathbb{R}$, es frecuente escribir $f^{(0)}$ para referirse a la propia función: $f^{(0)} = f$.

Teorema 204 *Sean f, g dos funciones n-veces diferenciables, es decir $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ existen, entonces $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.*

Demostración. La demostración es directa por el Teorema 198 (a). ■

4.5.1. Fórmula de Leibniz

La fórmula de Leibniz es un teorema que nos entrega una caracterización de la derivada n-ésima del producto.

Teorema 205 *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables n-veces en todos los puntos del intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Entonces, se verifica en I:*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x) g^{(i)}(x).$$

Demostración. La demostración será relaizada por inducción sobre n. Entonces: Sean f, g dos funciones n-veces diferenciables y

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : (f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x) g^{(i)}(x) \right\}.$$

Notemos que $A \neq \emptyset$ ya que $0 \in A$ dado que si $n = 0$ la regla de Leibniz es la regla de la derivada de un producto. Supongamos que $k \in A$. Luego

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(k+1)}(x) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[f^{(k-i+1)}(x) g^{(i)}(x) + f^{(k-i)}(x) g^{(i+1)}(x) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i+1)}(x) g^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} f^{(k-i+1)}(x) g^{(i)}(x).
\end{aligned}$$

Generando en la primera suma el primer término y en la segunda suma el último término obtenemos:

$$f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right] f^{(k-i+1)}(x) g^{(i)}(x) + f^{(0)}(x) \cdot g^{(k+1)}(x).$$

Así por la propiedad $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, obtenemos

$$(f \cdot g)^{(k+1)}(x) = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f^{(k-i+1)}(x) g^{(i)}(x).$$

Luego $k + 1 \in A$, entonces $A = \mathbb{N}$. Lo que demuestra el Teorema. ∎

4.5.2. Ejercicios Resueltos

1. Hallar y'' si $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$.

   Solución. Primero debemos encontrar y', luego de eso, volvemos a derivar. Entonces

   $$y' = 8x^7 + 42x^5 - 5.$$

Derivando nuevamente obtenemos:

$$y'' = 56x^6 + 210x^4.$$

■

2. Obtener $f''(x)$ si $f(x) = \sin^2(x)$.

   Solución. Primero obtengamos $f'(x)$. Aplicando El Teorema 200:

$$f'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x).$$

   Derivando $f'(x)$:

$$f''(x) = 2\left(\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)\right) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)),$$

   es decir,

$$f''(x) = 2\cos(2x).$$

■

3. Demuestre que si $f(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$, entonces se satisface la ecuación $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x$.

   Demostración. Lo que debemos hacer es obtener $f''(x)$ y $f'(x)$ y luego reemplazar. Entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x\right) = \frac{1}{2}e^x\left(2x + x^2\right). \tag{4.14}$$

   Derivando (4.14) tenemos:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(e^x\left(2x + x^2\right) + e^x \cdot (2 + 2x)\right). \tag{4.15}$$

   Usando las ecuaciones (4.14) y (4.15) tenemos:

$$\begin{aligned} f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x\left(2x + x^2\right) + e^x \cdot (2 + 2x)\right) - 2 \cdot \frac{1}{2}e^x\left(2x + x^2\right) + \frac{1}{2}x^2e^x \\ &= \frac{1}{2}e^x\left(2x + x^2 + 2 + 2x - 2\left(2x + x^2\right) + x^2\right) \\ &= \frac{1}{2}e^x \cdot 2 \\ &= e^x. \end{aligned}$$

■

4. Hallar la derivada 6-ésima de g si $g(x) = (1 - x^2) \cdot \cos(x)$.

   Solución. Haremos uso del Teorema 205 (fórmula de Leibniz). Luego

$$g^{(6)}(x) = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} \left(1 - x^2\right)^{(6-i)} \cos^{(i)}(x).$$

Desarrollando la sumatoria obtenemos:

$$g^{(6)} = \left(x^2 - 31\right) \cdot \cos(x) + 12x \cdot \sin(x).$$

■

5. Hallar $f'''(0)$, si $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$.

   Solución. Debemos encontrar $f'''(x)$ para poder evaluarla en $x = 0$. Luego usando la fórmula de Leibniz tenemos:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^x \cdot \sin(x) + 3e^x \cdot \cos(x) - 3e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) \\ &= e^x \left(\sin(x) + 3\cos(x) - 3\sin(x) - \cos(x)\right) \\ &= 2e^x \left(\cos(x) - \sin(x)\right). \end{aligned}$$

   Evaluando en $x = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 2e^0 \left(\cos(0) - \sin(0)\right) \\ &= 2 \cdot 1(1 - 0) = 2. \end{aligned}$$

■

4.5.3. Ejercicios Propuestos

1. Hallar y'' si $y = \ln\left(\sqrt[3]{1 + x^2}\right)$.
2. Hallar $f''(x)$ si $f(x) = (\arcsin(x))^2$.
3. Demostar que la función definida por $f(x) = e^{2x}\sin(5x)$, satisface la ecuación $f''(x) - 4f'(x) + 29f(x) = 0$.
4. Hallar $g^{(5)}$ para $g(x) = \ln(1 + x)$.
5. Usando la fórmula de Leibniz, calcular $f^{(9)}(x)$ si $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}$.

5

Aplicaciones de la derivada

"El método de fluxiones (cálculo infinitesimal) es la clave general en cuya virtud la matemática moderna revela el secreto de la Geometría y, en consecuencia, de la naturaleza."

– Obispo de Berkeley

5.1. Concepto Geométrico

Si consideramos una función $y = f(x)$, tracemos en ella una recta secante en los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ en donde h es un número real positivo. Estos dos puntos determinan una única recta que forma un ángulo α con el eje X (que depende de h), cuya tangente es (Ver Figura 5.1):

$$\tan(\alpha_h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

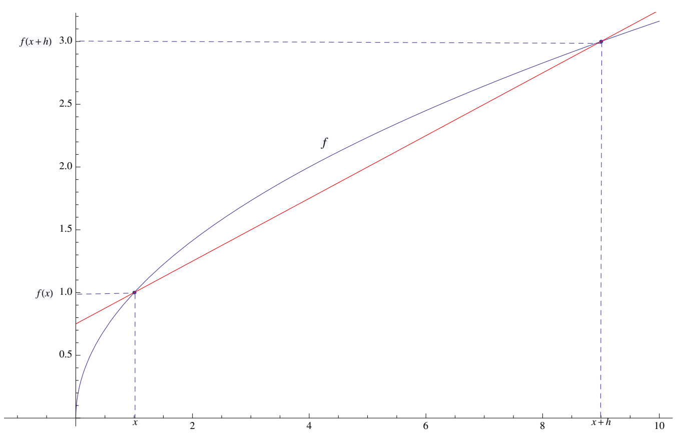

Figura 5.1: Gráfica de secante en los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$.

Ahora bien, si hacemos que h tienda a 0 ($h \to 0$), la recta secante va transformándose en un recta que tiende a intersectar a la curva en un punto $(x, f(x))$, la pendiente de esta recta es entonces (Ver Figura 5.2):

$$\tan(\alpha_h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

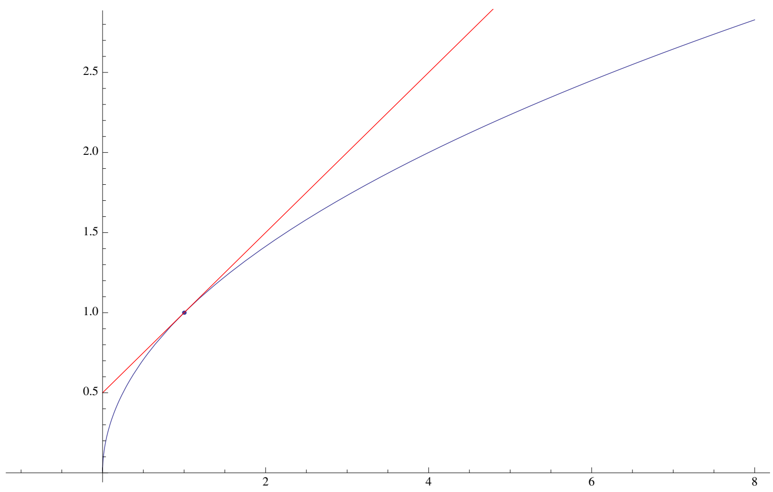

Figura 5.2: Gráfica de función y tangente en el punto $(x, f(x))$.

Podemos concluir que la derivada de una función evaluada en un punto de ella, corresponde a la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Definición 206

1. *Si f es una función con derivada en $x = a$, llamaremos recta tangente al gráfico en el punto $(a, f(a))$ a la recta que contiene al punto $(a, f(a))$ y que tiene pendiente $f'(a)$. Esta recta tiene por ecuación:*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

2. *Si $f'(a) = \infty$, entonces la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ es $x = a$.*

Ejemplo 207 *La recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto $x = 2$ es:*

$$\begin{aligned} y &= f'(2) \cdot (x - 2) + f(2) \\ &= 4(x - 2) + 4 \\ &= 4x - 4. \end{aligned}$$

Ejemplo 208 *La recta tangente a* $f(x) = \cos(x)$ *en* $x = \dfrac{\pi}{6}$ *es:*

$$\begin{aligned} y &= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 209 *La recta tangente a* $f(x) = \sqrt{x}$ *en* $x = 0$ *es* $y = 0$ *pues* $f'(0) = \infty$.

Definición 210

1. *Si* f *es una función con derivada en* $x = a$ *tal que* $f'(a) \neq 0$, *llamaremos* **recta normal** *al gráfico* f *en el punto* $(a, f(a))$ *a la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto y que lo contiene, es decir, es la recta que tiene por ecuación:*
$$y = -\frac{1}{f'(x)}(x - a) + f(a).$$

2. *Si* $f'(a) = 0$, *entonces la* **recta normal** *al gráfico de* f *en el punto* $(a, f(a))$ *es* $x = a$.

3. *Si* $f'(a) = \infty$, *entonces la* **recta normal** *al gráfico de* f *en el punto* $(a, f(a))$ *es* $y = f(a)$.

Ejemplo 211 *La ecuación normal a* $f(x) = x^2$ *en el punto* $x = 2$ *es:*

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(2)} \cdot (x - 2) + f(2) \\ &= -\frac{(x-2)}{4} + 4 \\ &= -\frac{x}{4} + \frac{1}{2} + 4 \\ &= \frac{x}{4} + \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 212 *La recta normal a* $f(x) = \cos(x)$ *en* $x = \dfrac{\pi}{6}$ *es:*

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{-\frac{1}{2}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 213 *La recta normal a* $f(x) = \sqrt{x}$ *en* $x = 0$ *es* $y = 0$.

5.1.1. Ejercicios Resueltos

1. Encuentre la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $y = x^3$.

   Solución. Dada $f(x) = x^3 + 8$, encontremos la primera derivada:

$$f'(x) = 3x^2\Big|_{(-1,7)} = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

   Con esto, más las Definiciones 206 y 210, se tiene:

   - Recta Tangente

$$\begin{aligned} y &= 3(x+1) + 7 \\ y &= 3x + 10. \end{aligned}$$

   - Recta Normal

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}(x+1) + 7 \\ y &= -\frac{x}{3} - \frac{1}{3} + 7 \\ y &= -\frac{x}{3} + \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

   ■

2. Hallar en qué puntos de la curva $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ la tangente es horizontal o vertical.

   Solución. Primero derivemos implícitamente la función dada, luego:

$$\begin{aligned} 2x + 4xy' + 4y + 32yy' &= 0 \\ y'(32y + 4x) &= -2x - 4y \\ y' &= \frac{-2x - 4y}{32y + 4x}. \end{aligned}$$

   Las asíntotas horizontales se obtienen cuando el númerador es cero, entonces:

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 0 \\ x + 2y &= 0 \\ x &= -2y. \end{aligned}$$

   Los puntos de tangencia son los puntos de intersección de la recta $x = -y$ y la curva $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$, resolviendo el sistema de ecuaciones encontraremos los puntos de tangencia, sustituyendo encontramos:

$$\begin{aligned}(-2y)^2+4(-2y)y+16y^2 &= 27\\ 4y^2-8y^2+16^2 &= 27\\ 12y^2 &= 27\\ y^2-\frac{9}{4} &= 0\\ \left(y+\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Así $y_1=-\frac{3}{2}$ y $y_2=\frac{3}{2}$, reemplazando estos valores en $x=-2y$, se obtiene: $x_1=3$ y $x_2=-3$, luego los puntos de tangencia horizontal son:

$$\left(3,-\frac{3}{2}\right) \qquad \wedge \qquad \left(-3,\frac{3}{2}\right).$$

Ahora bien, para encontrar las tangentes verticales, las obtendremos haciendo el denominador igual a cero, entonces:

$$\begin{aligned}32y+4x &= 0\\ 8y+x &= 0\\ x &= -8y.\end{aligned}$$

Nuevamente los puntos de tangencia se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones $x^2+4xy+16y^2=27$ y $x=-8$, sustituyendo:

$$\begin{aligned}(-8y)^2+4(-8y)y+16y^2 &= 27\\ 64y^2-32y^2+16^2 &= 27\\ 148y^2 &= 27\\ y^2-\frac{9}{16} &= 0\\ \left(y+\frac{3}{4}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Así $y_1=-\frac{3}{4}$ y $y_2=\frac{3}{4}$, reemplazando estos valores en $x=-8y$, se obtiene $x_1=6$ y $x_2=-6$, luego los puntos de tangencia horizontal son:

$$\left(6,-\frac{3}{4}\right) \qquad \wedge \qquad \left(-6,\frac{3}{4}\right).$$

■

3. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la función $f(x)=x^1+x+1$ paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Solución. Primero debemos tener presente que la bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x$, cuya pendiente es $m = 1$. Sea $(a, f(a))$ el punto de tangencia, entonces:

$$f'(x) = 2x + 1\Big|_{(x=a)} = 2a + 1,$$

como queremos que $f'(a) = 1$ entonces debe cumplirse que $a = 0$, luego el punto de tangencia es $f(0) = 1$, por lo que la recta buscada corresponde a:

$$y = 1(x - a) + f(a) = x + 1.$$

■

4. Pruebe que la ecuación de la recta tangente a cualquier elipse del tipo $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, en cualquier punto $P(x_0, y_0)$ de ella, está dada por

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Demostración. Primero derivemos implícitamente:

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} &= 0 && (5.1)\\
\frac{yy'}{b^2} &= -\frac{x}{a^2} && (5.2)\\
y' &= -\frac{b^2x}{a^2y}\Big|_{(x_0,y_0)} && (5.3)\\
&= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} && (5.4)
\end{aligned}$$

Luego la pendiente de la recta busca es $m = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

Ahora, para encontrar la recta deseada, haremos:

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)\\
y - y_0 &= -\frac{b^2xx_0}{a^2y_0} + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}\\
a^2yy_0 - a^2y_0^2 &= -b^2xx_0 + b^2x_0^2\\
a^2yy_0 + b^2xx_0 &= a^2y_0^2 + b^2x_0^2 \qquad / \cdot \frac{1}{a^2b^2}\\
\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

■

5. Determine los dos puntos en donde la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ cruza el eje X y demuestre que las tangentes a la curva en estos puntos son paralelas.

   Solución. Debemos comenzar por encontrar los puntos en donde la curva cruza el eje X, es decir, cuando $y = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + x \cdot 0 + 0^2 &= 7 \\ x^2 &= 7 \\ |x| = \sqrt{7}. \end{aligned}$$

   Luego, los puntos en donde la curva cruza el eje X son $x_1 = \sqrt{7}$ y $x_2 = -\sqrt{7}$.

   Para encontrar las rectas tangentes, derivemos implícitamente para después evaluar en los puntos $P_1 = (\sqrt{7}, 0)$ y $P_2(-\sqrt{7}, 0)$, luego:

$$\begin{aligned} 2x + xy' + y + 2yy' &= 0 \\ y'(x + 2y) &= -2x - y \\ y' = \frac{-2x - y}{2y + x}, \end{aligned}$$

   evaluando en los puntos P_1 y P_2, se tiene:

   - $y'\Big|_{(\sqrt{7},0)} = \dfrac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = -2$
   - $y'\Big|_{(-\sqrt{7},0)} = \dfrac{-2 \cdot (-\sqrt{7})}{-\sqrt{7}} = -2$

   Al evaluar las derivadas en los puntos de tangencia, se obtienen resultados iguales, se tiene que las rectas tangentes son paralelas. ■

5.1.2. Ejercicios Propuestos

1. Demuestre las fórmulas entregadas en la Definición 206 y la Definición 210 para encontrar la recta tangente y normal a una curva f en el punto $(a, f(a))$.

2. Hallar las rectas tangentes y normales en el punto indicado para las siguientes curvas:

   a) $f(x) = x^2 + xy + y^2 = 1$ en el punto $P(2, 3)$,

   b) $y^2 + x^2y^2 + \cos(y^2) = x - \dfrac{\pi}{2}$ en el punto $P\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

3. Determine los puntos en la curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente es:

a) Paralela al eje X,

b) Perpendicular a la recta $y = 1 - \dfrac{x}{24}$,

c) Paralela a la recta $y = -12x$.

4. Encuentre valores para $c \in \mathbb{R}$, de modo que $f(x) = \dfrac{c}{x+1}$ es tangente a la recta que pasa por lo puntos $(0, 3)$ y $(5, -2)$.

5. Hallar las tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x+y = 0$.

5.2. Aproximación de Funciones

Uno de los temas fundamentales en el Análisis Matemático, es el de aproximación de funciones. La idea de sustituir una función por una aproximación más sencilla, para de las propiedades de ésta, inferir las de la función original, subyace en la mayoría de los métodos del Análisis.

En esta sección se estudian aproximaciones locales de funciones. Se trata de funciones polinómicas que en el entorno de un punto $x = a$, aproximan a una función dada f.

Si son derivables las funciones que se consideran, la aplicación de la fórmula generalizada del valor medio da lugar a una condición para que una función g sea aproximación local de otra f hasta un cierto orden; y en caso particular que la aproximación g sea polinómica resulta la fórmula de Taylor. El sentido de la fórmula de Taylor es de una aproximación polinómica de tipo local.

El concepto de máximo o mínimo son aquí importantes, es por ello que comenzamos con su definición.

Definición 214 *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ y $A \subseteq E$. Un punto $x \in A$ es un punto máximo para f sobre A, si*

$$f(x) \geq f(y) \qquad \textit{para todo } \ y \in A.$$

Observación 215 *El número $f(x)$ es llamado el valor máximo de f sobre A. También podemos decir que f tiene su máximo valor sobre A en x.*

La definicón para mínimo de f sobre A es análoga considerando $f(x) \leq f(y)$.

Definición 216 *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ y $A \subseteq E$. Un punto $x \in A$ es un punto máximo local para f sobre A si existe algún $\delta > 0$ tal que x es un punto máximo para f sobre $A \cap (x - \delta, x + \delta)$.*

La definicón para mínimo local de f sobre A es análoga.

Observación 217 *Los máximos o mínimos locales también son llamados máximos o mínimos relativos.*

El próximo teorema es la base de muchas aplicaciones de la diferenciación. Es conocido como Teorema de Fermat.

Teorema 218 *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, si tiene un máximo relativo en un punto* $x \in (a, b)$*, y existe* $f'(x)$*, entonces* $f'(x) = 0$*.*

Demostración. Elijamos δ de acuerdo a la Definición 216, tal que

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b.$$

Si $x - \delta < t < x$, tenemos:

$$f(t) \leq f(x),$$

por ser x máximo relativo sobre (a, b), luego tenemos que:

$$f(t) - f(x) \leq 0.$$

Como $t < x$ entonces $t - x < 0$. Luego,

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

Suponiendo que $t \to x$, vemos que $f'(x) \geq 0$. Si $x < t < x + \delta$, tenderemos:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0.$$

Suponiendo que $t \to x$, tenemos que $f'(x) \leq 0$. Por lo tanto $f'(x) = 0$ ■

5.2.1. Teorema de Rolle

Las raíces de este teorema son muy antiguas, según los historiadores se remontan al pensamiento matemático hindú (ver [21], [24] para más detalles), sin embargo se le atribuye a Michel Rolle, un matemático francés de finales del siglo XVII y principios del XVIII, miembro de la Academia Francesa quién se dedicó al estudio de la teoría de ecuaciones. Estudiando métodos para localizar y acotar raíces de polinomios llegó a la formulación y demostración de una versión preliminar del famoso teorema, cuya importancia es bien conocida por todo aquel que haya estudiado un curso de cálculo diferencial.

Teorema 219 (Teorema de Rolle) *Si* f *es continua sobre* $[a, b]$ *y diferenciable sobre* (a, b)*, y* $f(a) = f(b)$*, entonces existe un número* $x \in (a, b)$ *tal que* $f'(x) = 0$*.*

Demostración. Como f es continua sobre $[a, b]$, sabemos por el Teorema 189 (Teorema de Weierstrass) que f alcanza su máximo y su mínimo sobre $[a, b]$, si el máximo o el mínimo ocurren en un punto $x \in (a, b)$ entonces se tiene que $f'(x) = 0$, lo que finaliza la prueba. El único caso que falta verificar es cuando f alcanza su máximo y su mínimo en los extremos a y b, lo cual implica que f es constante en el intervalo ya que $f(a) = f(b)$, y por tanto para todo $x \in (a, b)$ se tiene que $f'(x) = 0$. ■

5.2.2. Teorema del Valor Medio

Otros dos teoremas fundamentales del cálculo diferencial, muy importantes en el estudio de límites, de ecuaciones diferenciales y en numerosas aplicaciones son el teorema del valor medio y el teorema del valor medio generalizado de Cauchy, cuyas demostraciones consisten en aplicar directamente el teorema de Rolle, a una función auxiliar.

Teorema 220 (Teorema del Valor Medio) *Sea f un función continua sobre $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Entonces existe $x \in (a,b)$ tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demostración. Consideremos la función $h:[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(t) = f(t) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)\right].$$

Es fácil ver que h es continua sobre $[a,b]$, dado que f lo es. Además note que $h(a) = h(b)$, lo que implica que h satisface las condiciones del Teorema 219, entonces existe $x \in (a,b)$ tal que $h'(x) = 0$, note que:

$$h'(t) = f'(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

luego,

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ f'(x) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

■

Este teorema tiene una interpretación geométrica: la recta tangente a la gráfica de f en $(x, f(x))$ es paralela a la recta que contiene a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Ver Figura 5.3

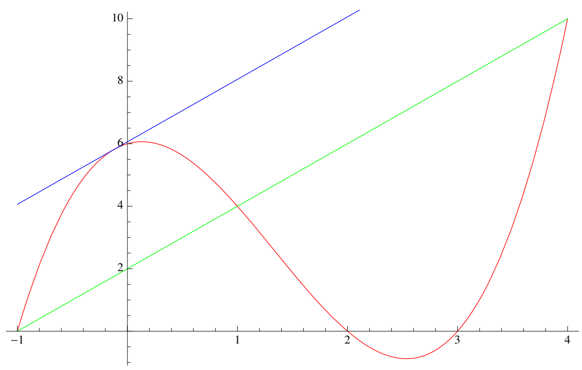

Figura 5.3: La función está definida sobre el intervalo $[-1, 4]$

Corolario 221 *Si f es definida sobre un intervalo I y $f'(x) = 0$, $\forall; x \in I$, entonces f es constante sobre I.*

Demostración. Sean $a, b \in I$ tal que $a \neq b$. Entonces existe un $x \in (a, b)$ tal que:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, luego,

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

lo que implica que $f(a) = f(b)$. Así el valor de f en cualquier valor de I es el mismo, es decir, f es constante sobre I. ■

Claramente el Corolario 221 no es cierto para funciones definidas sobre dos o más intervalos.

Corolario 222 *Si f y g son funciones definidas sobre un mismo intervalo I y $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in I$, entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + c$.*

Demostración. Para todo $x \in I$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \\ f'(x) - g'(x) &= 0 \\ (f - g)'(x) &= 0, \end{aligned}$$

luego por el Corolario 221, $f - g$ es constante, es decir existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $f - g = c$, lo que implica que $f = g + c$. ■

Corolario 223 *Sea f definida sobre un intervalo I. Si $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in I$, entonces f es creciente sobre I.*

Demostración. Sean $a, b \in I$ tales que $a < b$. Entonces existe $x \in (a, b)$ tal que:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Como $b - a > 0$ tenemos que $f(a) < f(b)$, es decir la función es creciente sobre I. ■

Corolario 224 *Sea f definida sobre un intervalo I. Si $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in I$, entonces f es decreciente sobre I.*

Demostración. Análoga a la demostración del Corolario 223. ■

Teorema 225 (Teorema del Valor Medio de Cauchy.) *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b), entonces existe $x \in (a, b)$ tal que:*

$$(f(b) - f(a))\, g'(x) = (g(b) - g(a))\, f'(x).$$

Demostración. Consideremos la función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$h(t) = (f(b) - f(a))\, g(t) - (g(b) - g(a))\, f(t).$$

Note que h es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b).$$

Luego h satisface las condiciones del Teorema 219, lo que implica que existe $x \in (a, b)$ tal que $h'(x) = 0$, como $h'(t) = (f(b) - f(a))\, g'(t) - (g(b) - g(a))\, f'(t)$, tenemos:

$$(f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x) = 0,$$

es decir,

$$(f(b) - f(a))\, g'(x) = (g(b) - g(a))\, f'(x)$$

■

Observemos que este teorema es una generalización del Teorema 220, ya que si escogemos a la función g como la identidad, es decir $g(x) = x$, tenemos lo dicho.

5.2.3. Teorema de Taylor

Igual que la diferenciabilidad de una función en un punto permitía aproximar la función mediante un polinomio de grado menor o igual que uno, la existencia de la derivada n-ésima en un punto dará lugar a una aproximación aún mejor, mediante un polinomio de grado menor o igual que n, llamado polinomio de Taylor. El error que se comete al hacer esta aproximación, es decir, la diferencia entre la función de partida y su polinomio de Taylor, se conoce como resto de Taylor. Una estimación aún más precisa se consigue mediante la llamada fórmula de Taylor, que describe con exactitud el resto de Taylor y es un resultado análogo al Teorema del Valor Medio, pero involucrando las derivadas de orden superior de una función.

Teorema 226 *Supongamos que f es una función real en $[a, b]$, n un entero positivo, $f^{(n-1)}$ es continua en $[a, b]$. Además existe $f^{(n)}(t)$ para todo $t \in (a, b)$. Sean α, β puntos distintos de $[a, b]$ y definamos:*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k, \tag{5.5}$$

entonces existe un punto x entre α y β, tal que:

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n \tag{5.6}$$

Para $n = 1$ este teorema es el del valor medio. En general, el teorema demuestra que se puede hallar f aproximada por medio de un polinomio de grado $n - 1$; y (5.6) nos permite calcular el error, si conocemos las cotas en $\left|f^{(n)}(x)\right|$.

Demostración. Sea M el número definido por

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n$$

y hagamos

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n \qquad (a \leq t \leq b). \tag{5.7}$$

Tenemos que demostar que $n!M = f^{(n)}(x)$ para algún x entre c. Aplicando la derivada n-ésima en (5.7) y por (5.5) tenemos:

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \qquad (a < t < b). \tag{5.8}$$

Por lo tanto, la demostración estará completa si podemos probar que $g^{(n)}(x) = 0$ para algún x entre α y β.

Como $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ para $k = 0, \ldots, n - 1$, tenemos:

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \cdots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0. \tag{5.9}$$

La elección de M demuestra que $g(\beta) = 0$, de modo que $g'(x_1) = 0$ para algún x_1 entre α y β, por el Teorema del Valor Medio. Como $g'(\alpha) = 0$, deducimos del mismo modo que $g''(x_2) = 0$ para algún x_2 entre α y x_1. Después de n pasos, llegamos a la conclusión de que $g^{(n)}(x_n) = 0$ para algún x_n entre α y x_{n-1}, esto es entre α y β. ■

Observación 227 *La expresión (5.5) es llamada Polinomio de Taylor de grado $n - 1$.*

Un primer resultado en el sentido de que el polinomio de Tyalor es una buena aproximación de la función f en un entorno del punto:

Proposición 228 *Sea f una función n veces diferenciable en un entorno de α. Sea $P(t)$ el polinomio de Taylor de grado n de f en el punto α, entonces*

$$\lim_{t \to \alpha} \frac{f(t) - P(t)}{(t - \alpha)^n} = 0.$$

Demostración. Ejercicio. ■

Observación 229 *Los polinomios de Taylor en el punto $\alpha = 0$, suelen denominarse polinomios de McLaurin.*

Notemos que para $n = 2$ el polinomio de grado 1, $P(t) = f(\alpha) + (t - \alpha)$ es la recta tangente a f en el punto α, de manera que los polinomios de Taylor serán una especie de *polinomios tangentes* a la función en el punto. Al tener mayor grado que la recta tangente se espera que se parezcan más a la función que ésta, aunque dado que para su construcción únicamente usamos los valores de f y sus derivadas en el punto α, será una aproximación local (cerca de α).

Ejemplo 230 *Si f está definida por $f(x) = \sin(x)$. Es fácil ver que $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$ y $f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x)$, luego $f(0) = 0$,$f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$ y se repiten $f^{(4)}(0) = f(0) = 0$, etc. Entonces:*

$$P(t) = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!}$$

es su polinomio de Taylor de grado 7 en $\alpha = 0$.

5.2.4. Ejercicios Resueltos

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|f'(x)| \leq k, \quad \forall\, x \in [a, b],$$

demuestre que:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall\, x, y \in [a, b].$$

Demostración. Usando el Teorema del Valor medio se establece que para todo $x, y \in [a, b]$ existe $x_0 \in (y, x)$ tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

entonces:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)| \cdot |x - y| \leq k|x - y|.$$

■

2. Calcular aproximadamente $\sqrt{304}$.
Solución. Como aplicación del Teorema del Valor Medio es posible aproximar la raíz cuadrada de 304. Considere la función $f : [289, 304] \to$

$\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$, como f es diferenciable entonces existe $x_0 \in (289, 304)$ tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(304) - f(289)}{304 - 289} = \frac{\sqrt{304} - 17}{15}.$$

Además $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ con lo cual obtenemos la igualdad:

$$\sqrt{x_0} = \frac{15}{2\left(\sqrt{304} - 17\right)}.$$

Por otro lado, f es creciente, luego como $x_0 \in (289, 304)$ tenemos:

$$17 = \sqrt{289} \leq \sqrt{x_0} \leq \sqrt{304} \leq \sqrt{324} = 18 \Longrightarrow 17 \leq \sqrt{x_0} \leq 18,$$

entonces,

$$\begin{aligned} 17 \leq \frac{15}{2\left(\sqrt{304} - 17\right)} \leq 18 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{17 \cdot 2}{15} \leq \frac{1}{\sqrt{304} - 17} \leq \frac{18 \cdot 2}{15} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{15}{36} \leq \sqrt{304} - 17 \leq \frac{15}{34} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{15}{36} + 17 \leq \sqrt{304} \leq \frac{15}{34} + 17 \\ &\Longrightarrow \quad 17,416 \leq \sqrt{304} \leq 17,441. \end{aligned}$$

■

3. Demostar que $f(x) = x^3 - 3x + b$ no puede tener más de una raíz en $[1, 1]$, $\forall b \in \mathbb{R}$.
   Demostración. Notemos que:

   $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

   Luego, si $f'(x) = 0$, entonces $x = 1$ ó $x = -1$. Note que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. Entonces por el Corolario 224, f es decreciente en $[-1, 1]$. Luego posee a lo más un cero en $[-1, 1]$. De otra manera la función no sería decreciente. ■

4. Encuentre el desarrollo de Taylor de la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, alrededor del punto $x = 0$.
   Solución. Primero notemos que las derivadas de orden superior de f

son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, \\ f^{(3)}(x) &= -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}. \end{aligned}$$

Luego, podemos deducir que:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}},$$

evaluando en $x = 0$ tenmos que $f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n!$. Entonces el desarrollo de Tyalor de f entorno de $x = 0$ es:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \cdot k!}{k!}x^k + \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+c)^{n+1}\cdot n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}x^n. \end{aligned}$$

■

5. Hallar el desarrollo de Taylor de la función exponencial.
Solución. Aquí es fácil ver que si $f(x) = e^x$ entonces $f^{(n)}(x) = e^x$, lo que implica que $f^{(n)}(0) = 1$. Luego:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}x^k + \frac{e^c}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Notemos que si $n \to \infty$, entonces $\dfrac{e^c}{n!}x^n \to 0$. Así podemos escrbir

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k.$$

■

5.2.5. Ejercicios Propuestos

1. Usando el Teorema del Valor medio demuestre que $-x \leq \sin(x) \leq x$, para todo $x \geq 0$.

2. Sea $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ diferenciable en (a,b). Suponga que:

$$|f'(x)| \leq 4, \quad \forall\, x \in [1,4],$$

   demuestre que $|f(1) - f(4)| \leq 12$.

3. Demostar que si $f'(x) \leq c$, $\forall\, x \in [a,b]$, entonces:

$$f(b) \leq f(a) + c(b-a).$$

4. Encuentre el desarrollo de Taylor de la función dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ alrededor del punto $x = 0$.

5. Encuentre el desarrollo de Taylor de la función coseno.

6. Encuentre el desarrollo de Taylor de la función seno.

7. Calcule las derivadas de orden 2007 y 2008 de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

8. Encuentre el desarrollo de Taylor de $f(x) = \ln(\cos(x))$ hasta orden 3, entorno a $x = 0$.

5.3. Análisis de Curva

Dada una función definida por $y = f(x)$, hablaremos de análisis de curva para determinar su representación gráfica. Para ello se deben estudiar en términos generales los siguientes aspectos:

1. Dominio.

2. Asíntotas.

3. Intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

4. Máximos y/o mínimos locales.

5. Intervalos de concavidad y/o convexidad.

6. Puntos de inflexión.

La siguiente Proposición nos ofrece una condición suficiente que caracteriza máximos y/o mínimos locales, generalizada al uso de las derivadas de órdenes superiores:

Proposición 231 *Sea f una función n veces diferenciable en un entorno del punto a, tal que $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, y además existe $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:*

a) si n es par y $f^{(n)} > 0$, f presenta un mínimo local en a.

b) Si n es par y $f^{(n)} < 0$, f presenta un máximo local en a.

c) Si n es impar y $f^{(n)} > 0$, f es estrictamente creciente en a.

d) Si n es impar y $f^{(n)} < 0$, f es estrictamente decreciente en a.

Demostración. Si $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, el polinomio de Taylor de grado n de f en a se reduce al primer y último término, luego $P(t) = f(a) + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n$.

Por la Porposición 228, $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t) - P(t)}{(t-a)^n} = 0$, luego,

$$0 = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - \left(f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n\right)}{(t-a)^n} = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{(t-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

luego,

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{(t-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Entonces:

- si $f^{(n)}(a) > 0$, debe ser $\dfrac{f(t) - f(a)}{(t-a)^n} > 0$ para los t de un entorno de a, y
  - si n es par, $(t-a)^n > 0$ de donde $f(t) - f(a) > 0$ y $f(t) \geq f(a)$, por lo que $f(a)$ es un mínimo local.
  - Si n es impar, para los $t < a$ se tiene que $(t-a)^n < 0$ de donde $f(t) - f(a) < 0$ y $f(t) < f(a)$; y para los $t > a$ se tiene que $(t-a)^n > 0$ de donde $f(t) - f(a) > 0$ y $f(t) > f(a)$. En consecuencia f es estrictamente creciente en a.
  Por lo que se cumplen a) y c).
- Si $f^{(n)}(a) < 0$,debe ser $\dfrac{f(t) - f(a)}{(t-a)^n} < 0$ para los t de un entorno de a, y
  - si n es par, $(t-a)^n > 0$ de donde $f(t) - f(a) < 0$ y $f(t) \leq f(a)$, por lo que $f(a)$ es un máximo local.

- Si n es impar, para los $t < a$ se tiene que $(t-a)^n < 0$ de donde $f(t) - f(a) > 0$ y $f(t) > f(a)$; y para los $t > a$ se tiene que $(t-a)^n > 0$ de donde $f(t) - f(a) < 0$ y $f(t) < f(a)$. En consecuencia f es estrictamente decreciente en a.
  Por lo que se cumplen b) y d).

■

Definición 232 *Sea f una funcón definida en un intervalo I. Diremos que f es cóncava, si $\forall\, x, y \in I$ y para cualquier $t \in [0,1]$, se cumple*

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Geométricamente podemos replantear la definición anterior de la siguiente manera:

Diremos que una función es cóncava cuando dados dos puntos cualesquiera en el dominio de la función, el segmento que los une queda por debajo de la curva.

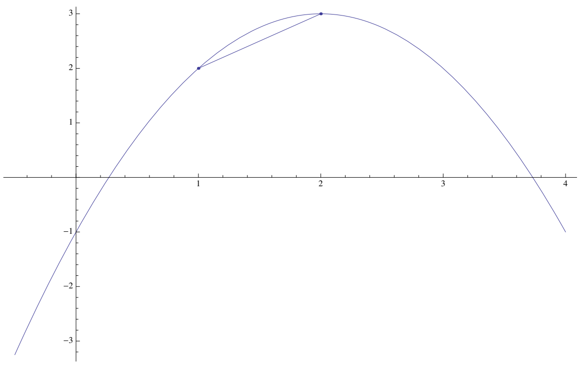

Figura 5.4: Gráfica de una función cóncava.

Definición 233 *Sea f una funcón definida en un intervalo I. Diremos que f es convexa, si $\forall\, x, y \in I$ y para cualquier $t \in [0,1]$, se cumple*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

De la misma manera que las funciones cóncavas, las convexas tienen su definición geométrica:

Diremos que una función es convexa cuando dados dos puntos cualesquiera en el dominio de la función, el segmento que los une queda por encima de la curva.

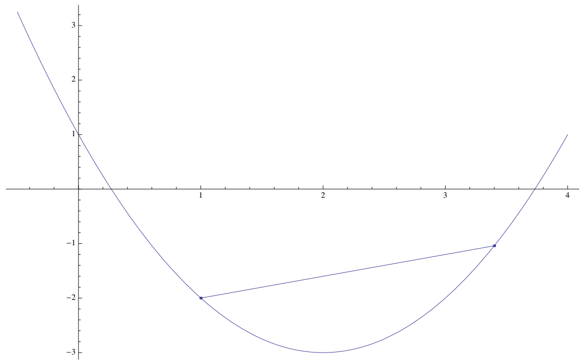

Figura 5.5: Gráfica de una función convexa.

Con la fórmula de Taylor, la derivada de segundo orden se convierte en una herramienta para el estudio de la concavidad y convexidad.

Proposición 234 *Sea* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$*.*

a) Si $f''(x) > 0$*,* $\forall\, x \in (a, b)$*, entonces* f *es convexa en* (a, b)*.*

b) Si $f''(x) < 0$*,* $\forall\, x \in (a, b)$*, entonces* f *es cóncava en* (a, b)*.*

Demostración. Sea $x_0 \in (a, b)$, entonces:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(t)}{2!}(x - x_0)^2$$

para un cierto t entre x y x_0. Luego, si $f''(x) < 0$ en (a, b),

$$f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big) = f''(t)\frac{(x - x_0)^2}{2!} \geq 0$$

luego f es convexa ya que ésto se dará para todo $x, x_0 \in (a, b)$.
Análogamente, será cóncava si $f''(x) < 0$ en (a, b). ■

Definición 235 *Un punto de inflexión es un punto donde los valores de* x *de una función continua pasa de cóncava a convexa o viceversa.*

Corolario 236 *Sea* f *una función tal que* $f''(x)$ *existe en un entorno de* x_0 *y es continua en* x_0*. Si* x_0 *es un punto de inflexión entonces* $f''(x_0) = 0$*.*

Demostración. Sea x_0 un punto de inflexión de f, luego: si f es cóncava a la derecha de x_0, por Proposición 234 parte b), $f''(x) > 0$ en (x_0, b), será convexa a la izquierda de x_0, por Proposición 234 parte a), $f''(x) < 0$ en (a, x_0) y viceversa. Además f'' es continua en x_0, es decir

$$\lim_{x \to x_0} f''(x) = f''(x_0),$$

luego podemos concluir que $f''(x_0) = 0$. ■

Para continuar con el estudio del análisis de una curva las siguientes definiciones son importantes.

Definición 237 *Sea f una función real. Una recta no vertical de ecuación $y = mx + b$, se llama asíntota oblicua de la gráfica de f, si la distancia*

$$D(x) = |f(x) - (mx + b)|$$

tiende a cero, cuando x tiende a infinito, es decir:

$$\lim_{x\to\infty} D(x) = 0.$$

Notemos que si $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de f tal que

$$\lim_{x\to\infty} D(x) = 0$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} D(x) = 0 &\iff \lim_{x\to\infty} |f(x) - (mx + b)| = 0 \\
&\iff \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x) - (mx + b)}{x}\right| = 0 \\
&\iff \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right| = 0 \\
&\iff \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{x} - m\right| = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} |f(x) - mx - b| = 0 &\iff \lim_{x\to\infty} |(f(x) - mx) - b| = 0 \\
&\iff \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = b.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = b.$$

En resumen, si $y = mx + b$ es asíntota de f para $x > 0$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

De la misma forma: si $y = m_1x + b_1$ es asíntota de f para $x < 0$

$$m_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b_1 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - m_1x).$$

Observación 238 *No necesariamente* $m = m_1$ *y* $b = b_1$*, es decir una curva puede tener más de una asíntota oblicua.*

Observación 239 *Si* $m = 0$*,* $y = b$ *se llama asíntota horizontal.*

Definición 240 *Sea* f *una función real. Una recta vertical de ecuación*

$$x = a,$$

se llama asíntota vertical de la gráfica f*, si*

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$$

Ejemplo 241 *Hallar las asíntotas de* f *si* $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$*.*
Note que

$$\lim_{x\to 0^-} \left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

por lo tanto $x = 0$ *es una asíntota vertical.*
Por otro lado:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

y

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

Además

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

y

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Por lo tanto $y = x$ *es una asíntota oblicua.*

5.3.1. Ejercicios Resueltos

1. Dada la curva $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 6x + 2$,

    a) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    b) Encuentre los máximos y míninmos locales.

    c) Determine intervalos de concavidad y convexidad.

    d) Encuentre puntos de inflexión.

Solución. Como vimos, utilizar la Proposición 231, conlleva muchas condiciones que se deben cumplir, por lo que usaremos una variación de este criterio *(Criterio de la Primera Derivada)* para simplificar la resolución del problema.

Lo primero que haremos será encontrar los puntos en donde la recta tangente a la curva tenga pendiente cero (lo que indicará un posible máximo o mínimo local), también conocidos como puntos críticos de la función, es decir, encontraremos los puntos en donde $f'(x) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) = x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x+3)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que tenemos los puntos críticos $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$.

Ahora, para determinar si estos puntos corresponden a máximos o mínimos locales, estableceremos intervalos de crecimiento y decrecimientos de la función. Esto lo haremos analizando el signo de la derivada en los intervalos que se forman con los putos críticos, luego:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Lo que debemos entender de este criterio, es lo siguiente:

a) si la pendiente de la recta tangente a la curva de f en el intervalo $I_1 = (-\infty, -3)$ es positiva, entonces la curva es creciente en este intervalo.

b) si la pendiente de la recta tangente a la curva de f en el intervalo $I_2 = (-3, 2)$ es negativa, entonces la curva es decreciente en este intervalo.

c) obviamente, la curva será creciente en el intervalo $I_3 = (2, \infty)$.

Sabiendo esto ya podemos afirmar que en $x_1 = -3$ es un punto de máximo local de f, y que $x_2 = 2$ es un mínimo local de f.

Con esto hemos dado respuesta a las partes *a*) y *b*) del problema.

Observación 242 *Cabe destacar que el Criterio de la Segunda Derivada o Proposición 231 no entrega información si el punto crítico es* x_0 *y* $f''(x_0) = 0$ *ó* $f''(x_0) = \infty$*, por lo que estamos obligados a utilizar el Criterio de la Primera Derivada usado con anterioridad.*

Para continuar con la solución del problema, encontremos los posibles puntos de inflexión igualando a 0 la segunda derivada, entonces:

$$\begin{aligned} f''(x) = 2x + 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Con esto el posible punto de inflexión es $x_3 = -\frac{1}{2}$, por lo que debemos comprobar si es que la función pasa de ser cóncava a convexa (o vise versa), para ello tenemos la Proposición 234, luego:

- Si $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, entonces $f''(x) = 2x + 1 < 0$ por lo que f es cóncava en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, para simplicar los cálculo, también es posible escoger algún punto de $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y ver el comportamiento de la derivada, por ejemplo $f''(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 < 0$ y obtenemos el mismo resultado.
- Si $x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ no es difícil ver que $f''(x) > 0$ por lo que la curva de f es este intervalo es convexa.

Por ello, $x_3 = -\frac{1}{2}$ efectivamente es un punto de inflexión.

También es posible demostrar que la gráfica de una función es cóncava o convexa mediante las Definiciones 232 y 233 , pero resulta muy laborioso hacerlo, pues, para este caso, se ven en juego muchos cubos y cuadrados de binomio, por lo que no haremos mayor incapié en este método.

Observación 243 *Como comentario general, nuestra función es un polinomio, y ellos no poseen asíntotas.*

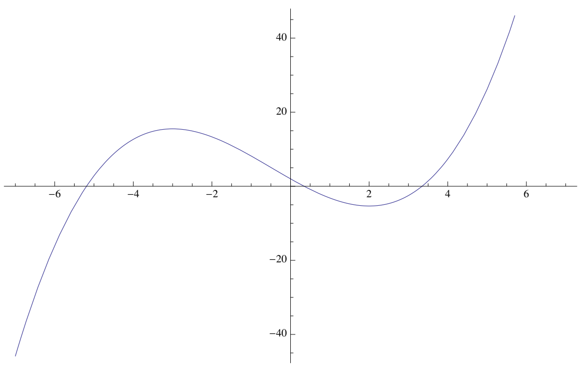

Figura 5.6: Gráfico de f tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 2$.

■

2. Encuentre los máximos y/o mínimos locales de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, determinando intervalos de crecimiento y/o decrecimiento. Además determine intervalos de concavidad y convexidad.

   Solución. Comencemos por mencionar que el dominio de la función es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, por lo que existe una asíntota vertical en $x = 2$, pues según la Definición 240

   $$\lim_{x\to 2} |f(x)| = \lim_{x\to 2} \left| \frac{1}{x-2} \right| = \infty.$$

   Por otra parte, comprobemos la existencia de asíntotas oblicuas en la gráfica de f, según la Definición 237 una asíntota será de la forma $y = mx + n$ y para determinar estos parámetros, tenemos:

   - $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\frac{1}{x-2}}{x} = \dfrac{1}{x^2-2x} = 0.$
   - $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - 0 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$.

   Según estos resultados, no es muy difícil darse cuenta que si calculamos estos límites cuando $x \to -\infty$ se obtendrán los mismos resultados.

   Por tanto, según la Observación 239, $y = 0$ es una asíntota es horizontal.

   Observación 244 *También es posible encontrar las asíntotas horizontales despejando x en función de y para hacer restricciones si es pertinente, de la siguiente forma:*

   $$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x-2} \\ x-2 &= \frac{1}{y} \\ x &= \frac{1}{y} + 2, \end{aligned}$$

   lo que nos entrega la restricción $y \neq 0$, es decir, la asíntota $y = 0$.

   El problema de este método es que no siempre es posible despejar x en función de y, por ejemplo con polinomios de orden superior, como por ejemplo $y = x^3 + x^2 + 5x - 1$.

   Ahora encontremos los puntos críticos de f haciendo $f'(x) = 0$, entonces:

   $$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} \quad = \quad 0$$

Según la naturaleza de la ecuación resultante, no hay punto críticos, pero nótese que $f(2)$ no está definida, por lo que acudiremos a este punto $x_0 = 2$ para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Si estudiamos el comportamiento de f' no es difícil darse cuenta que $f'(x) < 0$ para cualquier $x \in \text{Dom}(f)$, por lo que la función es decreciente en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$ y no existen puntos de máximo ni mínimo.

Por último, para estudiar los intervalos de concavidad y convexidad, acudamos a la segunda derivada y utilizamos nuevamente el punto crítico $x_0 = 2$, entonces:

$$f''(x) = -\frac{2}{(x-2)^3},$$

sólo necesitamos estudiar como se comporta el signo de f'' alrededor de $x_0 = 2$, luego:

- $f''(1) = -\dfrac{2}{(1-2)^3} > 0$, por lo tanto f es convexa en $(-\infty, 2)$,
- $f''(3) = -\dfrac{2}{(3-2)^3} < 0$, por lo tanto f es cóncava en $(2, \infty)$.

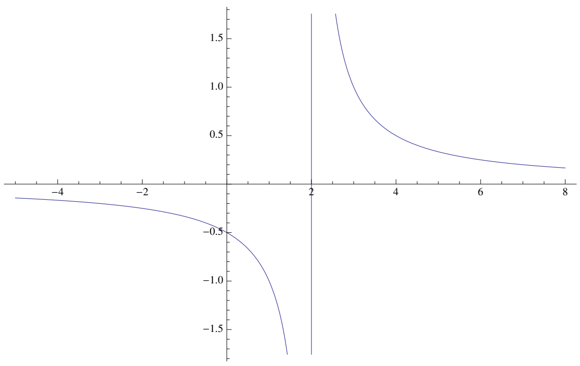

Figura 5.7: Gráfico de f tal que $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

■

3. Dada la función $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$, estudie la existencia de asíntotas y determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad, encontrando puntos de máximos, mínimos y puntos de inflexión si existen.

   Solución. Lo primero es mencionar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, por lo que no existen asíntotas verticales.

Analicemos la existencia de asíntotas oblicuas, para ello encontremos los parámetros m y b de la posible recta $y = mx + b$, luego:

- $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^{1/3}} = 0.$
- $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 0) = \infty.$

Análogamente, se obtiene el mismo resultado para $x \to -\infty$, por lo que no existen asíntotas oblicuas.

Continuemos el análisis para encontrar los máximos y/o míninos locales, luego:

$$f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

El único punto crítico se desprende de la rectricción $x \neq 0$, entonces estudiemos el comportamiento de f' alrededor de $x_0 = 0$:

- Si $x < 0$ entonces $f'(x) < 0$, por lo que f es decreciente en $(-\infty, 0)$.
- Si $x > 0$ entonces $f'(x) > 0$, por lo que f es creciente en $(0, \infty)$.

Luego $x_0 = 0$ corresponde a un punto de mínimo.

Para encontrar puntos de inflexión, igualemos a 0 la segunda derivada para encontrar posibles puntos críticos, así:

$$f''(x) = -\frac{2}{9x^{4/3}} = 0.$$

Nuevamente el punto crítico viene de la mano de la restricción $x_0 = 0$, ahora sólo falta determinar concavidad y/o convexidad para establecer si $x_0 = 0$ es un punto de inflexión, entonces:

- Si $x < 0$ entonces $f''(x) < 0$, por lo que f es cóncava en $(-\infty, 0)$
- Si $x > 0$ entonces $f''(x) < 0$, por lo que f también es cóncava en $(0, \infty)$

por tanto $x_0 = 0$ no es punto de inflexión.

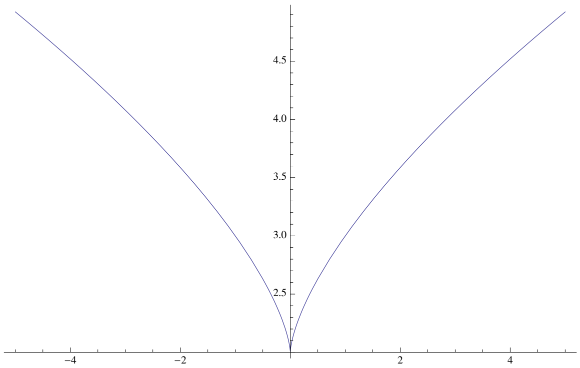

Figura 5.8: Gráfico de f tal que $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$.

■

4. Analice la curva $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$.

   Solución. Notemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ por lo que existe una asíntota vertical en $x = 1$, pues

   $$\lim_{x\to 1} \frac{2x+4}{x-1} = \infty.$$

   Para la existencia de asíntotas oblicuas de la forma $y = mx + b$, calculemos los posibles parámetros m y b, luego:

   - $m = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x+4}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+4}{x^2-x} = 0.$
   - $b = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+4}{x-1} - 0 \right) = 2.$

   Luego existe una asíntota horizontal en $y = 2$.

   Si calculamos los límites cuando $x \to -\infty$ se obtiene la misma asíntota oblicua.

   Para continuar con el análisis, encontremos los puntos críticos de la función:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)\cdot 2 - (2x+4)\cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x-2-2x-4}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{6}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

   Como se aprecia, esta expresión nunca se anula, sólo tenemos el punto crítico de la restricción $x_0 = 1$, pero si miramos un poco más, detenidamente, la primera derivada siempre es negativa, independiente del valor de x, por lo que podemos afirmar que f es decreciente tanto en el intervalo $(-\infty, 1)$ como en el $(1, \infty)$. Obviamente no existen puntos de máximo ni de mínimo.

Siguiendo con el desarrollo del problema, encontremos posibles puntos de inflexión, haciendo cero la segunda derivada, es decir:

$$f''(x) = \frac{12}{(x-1)^3}.$$

Nuevamente esta expresión nunca toma el valor cero, no hay puntos críticos, pero podemos recurrir a la restricción $x_0 = 1$ para estudiar concavidad o convexidad, veamos como se comporta la segunda derivada alrededor del punto crítico:

- Si $x < 1$, entonces $f''(x) < 0$, por lo que la función es cóncava en $(-\infty, 1)$.
- Si $x > 1$, entonces $f''(x) > 0$, por lo que la función es convexa en $(1, \infty)$.

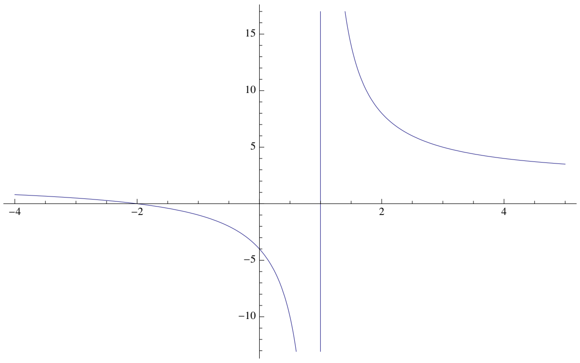

Figura 5.9: Gráfico de f tal que $f(x) = \dfrac{2x+4}{x-1}$.

■

5. Analizar la curva de la función $f(x) = \dfrac{4\sqrt{x^2+9}}{3}$.

Solución. Comencemos por decir que no existen asíntoas verticales, pues no existen restricciones en el dominio de la función, luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Luego, para las asíntotas oblicuas, sigamos el procedimiento que hemos usado hasta ahora:

- $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4\sqrt{x^2+9}}{3}}{x} = \dfrac{4}{3} \underbrace{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{9}{x^2}}}}{\cancel{x}}}_{1} = \dfrac{4}{3}.$

- $$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4\sqrt{x^2+9}}{3}-\frac{4x}{3}\right)\\ &= \frac{4}{3}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}+x}\\ &= \underbrace{\frac{4}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+9-\cancel{x^2}}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+1}}_{0}\\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego la asíntota corresponde a $y=\dfrac{4x}{3}$.

En este caso, al calculamor el primer límite para encontrar m, pero cuando $x\to-\infty$ se obtiene que $m_1=-\dfrac{4}{3}$ y no hay cambios en b_1, así, existe otra asíntota oblicua $y=-\dfrac{4x}{3}$.

Encontremos los puntos críticos de la función para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x)=\frac{4x}{3\sqrt{x^2+9}}=0,$$

y esto ocurre sólo cuando $x_0=0$. Para determinar si es máximo o mínimo, veamos como se comporta la derivada alrededor de $x_0=0$, entonces:

- Si $x<0$, entonces $f'(x)<0$, por lo que f es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$.
- Si $x>0$, entonces $f'(x)>0$, por lo que f es creciente en el intervalo $(0,\infty)$.

Con lo que concluimos que $x=0$ es un punto de mínimo de la función.

Observación 245 *Si prestamos mayor atención a la función, pode-*

mos expresarla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{3}\sqrt{x^2+9} \\ 3y &= 4\sqrt{x^2+9} \qquad /(\cdot)^2 \\ 9y^3 &= 16(x^2+9) \\ 9y^2 &= 16x^2+144 \\ 9y^2-16x^2 &= 144 \qquad /:144 \\ \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9} &= 1 \\ \frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2} &= 1 \end{aligned}$$

Que corresponde a una hipérbola vertical (a su rama positiva, para ser más precisos), y según el estudio en Modelo Cartesiano de la Geometría Analítica, esta es una hipérbola de la forma

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

, cuyas asíntotas están dadas por:

$$y=\pm\frac{ax}{b}.$$

En este caso:

$$y=\frac{4x}{3},$$

y sus vértices se encuentran en:

$$V(0,\pm a),$$

que en este caso, representa en punto de mínimo

$$P(0,4).$$

Volviendo sobre el problema, nos queda averiguar si existen puntos de inflexión y la concavidad o convexidad de la función, entonces igualemos a cero la segunda derivada:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{3\sqrt{x^2+9}\cdot 4 - 4x\cdot \dfrac{3\cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}}{9(x^2+9)} \\
&= \frac{12(x^2+9) - 12x^2}{9(x^2+9)^{3/2}} \\
&= \frac{\cancel{12x^2} + 12\cdot 9 - \cancel{12x^2}}{9(x^2+9)^{3/2}} \\
&= \frac{12\cdot \cancel{9}}{\cancel{9}(x^2+9)^{3/2}} \\
&= \frac{12}{(x^2+9)^{3/2}},
\end{aligned}
$$

la cual nunca se anula, ni tiene puntos críticos, por lo que no existen puntos de inflexión.

Finalmente, si observamos f'' nos daremos cuenta que esta siempre será positiva, independiente de x, por lo que la función es convexa.

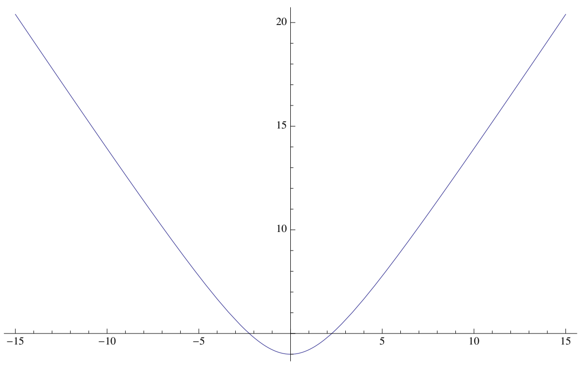

Figura 5.10: Gráfico de f tal que $f(x) = \dfrac{4\sqrt{x^2+9}}{3}$.

■

5.3.2. Ejercicios Propuestos

Analice las siguientes funciones y grafique:

1. $f(x) = (x-1)^2(x-2)$.
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$.
3. $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$.

4. $g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.
5. $h(x) = e^{-2x} \cdot \sin(2x)$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$.
7. $f(x) = e^{-x^2}$.
8. $g(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2}$.
9. $f(x) = x^3 + \dfrac{48}{x}$.
10. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$.
11. $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$.
12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.
13. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 5}$.
14. $f(x) = e^{-x^2+4}$.
15. $f(x) = \log\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.
16. $f(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}}$.

Bibliografía

[1] T. M Apostol, *Calculus*, Reverté S.A., 1982.

[2] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publ. Co. 1957.

[3] R. G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático*, Editorial Limusa, 1982.

[4] D. Berkey, *Calculus*, Saunders Publishing Company, 1983.

[5] G.W. Bluman, *Problem book for first year calculus*, Springer-Verlag, 1984.

[6] R. Courant, F. Jhon. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Vol. 1 y 2 Limusa, Mexico 1979.

[7] B. P. Demidovich, *5000 problemas de Análisis Matemático*. Ed. Paraninfo 1976.

[8] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

[9] A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis*, Ed. Dover, 1982.

[10] W. Fulks, *Cálculo avanzado*, Limusa, 1970.

[11] E. Heewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer Verlag, New York, 1969.

[12] E. Hille, *Methods in classical and Functional Analysis*, Addison-Wesley Publ. Co., 1972.

[13] J. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, 1961.

[14] L. D. Kudriávtsev, *Curso de Análisis Matemático*, Vol. 2, Ed. Mir.

[15] K. Kuratowski, *Introduction to Calculus*, Addison Wesley, 1962.

[16] S. Lang, *Cálculo*, Addison-Wesley, 1990.

[17] S. Lang, *Introducción al Análisis Matemático*, Addison-Wesley, 1990.

[18] E. L. Lima, *Curso de Análisis*, Volumen 2. Projeto Euclides, IMPA 1995.

[19] Lynn Loomis, Shlomo Sternberg, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, 1968.

[20] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Análisis Clásico Elemental*, Ed. Addison-Wesley, 1998.

[21] F. Martínez de la Rosa, *Panorámica de los Teoremas de Valor Medio*, Miscelánea Matemática, 47, 23-38, 2008.

[22] H. Murray, *Basic elements of Real Analysis*, Springer, 1998.

[23] J. M. Ortega, *Introducción al Análisis Matemático*, Ed. Labor, 1993.

[24] E. Pérez-Chavela, *Una nota sobre el teorema de Rolle*, Miscelánea Matemática, 50, 89-94, 2009.

[25] G. Polya,G.Szegö, *Problems and theorems in Analysis I*, Springer-Verlang New York, Heidelberg, Berlín, 1972.

[26] G. Polya,G.Szegö, *Problems and theorems in Analysis II*, Springer-Verlang New York, Heidelberg, Berlín, 1976.

[27] K. A. Ross, *Elementary Analysis: The theory of calculus*, Undergraduate texts in Mathematics, Springer-Verlang New York Inc., 1980.

[28] H. Royden, *Real analysis*, Mc Millan, 1968.

[29] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* McGraw-Hill, 1965.

[30] L. Schwartz, *Cours d'Analyse Mathématique*, Vol. 2, Ed. Hermann, 1967.

[31] M. Spivak, *Calculus.* Editorial Reverté, 1978.

[32] K. Stromberg, *An introduction to Classical Real Analysis.* Ed. Wadsworth, 1981.

[33] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer-Verlag, 2004.