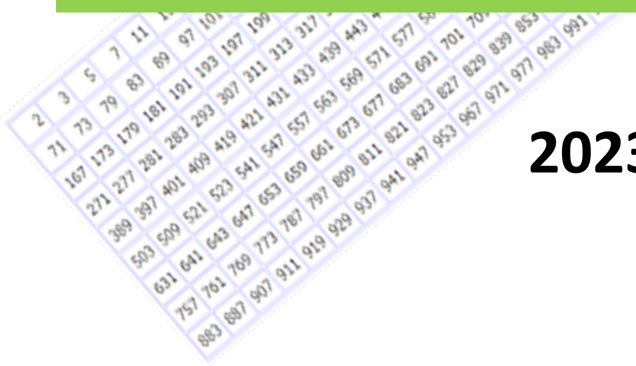
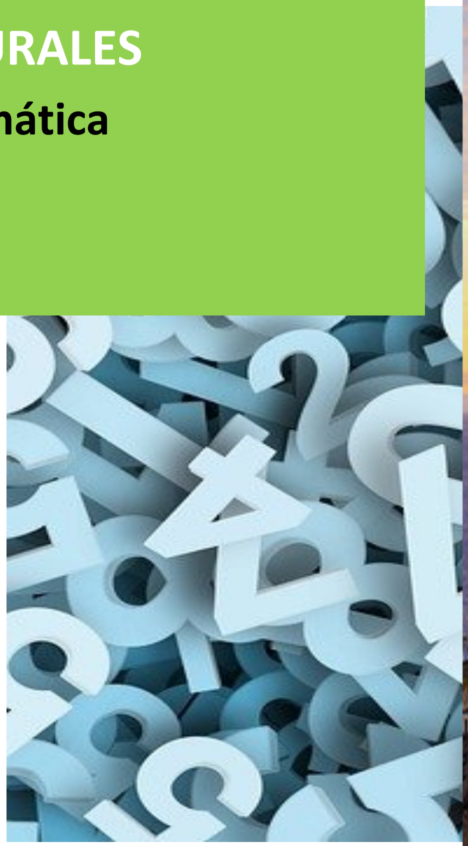


NÚMEROS NATURALES

Inducción Matemática

CPM1411



2023

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1.- Apuntes de Complementos . USM. Gruenberg, V.(2016).

2.- Álgebra e Introducción al Cálculo. PUC Chile. Mikenberg F. (2013)

NÚMEROS NATURALES

En matemáticas, una demostración o bien una prueba es un argumento deductivo para asegurar la verdad de una proposición matemática.

En principio una demostración se puede rastrear hasta afirmaciones generalmente aceptadas, conocidas como axiomas.

Las demostraciones son ejemplos de razonamiento deductivo y se distinguen de argumentos inductivos o empíricos; una demostración debe mostrar que una afirmación es siempre verdadera.

https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia

Métodos de demostración:

Demostración directa

Demostración por **el principio de inducción matemática**

Demostración por contraposición

Demostración por reducción al absurdo

Demostración constructiva o por construcción

Demostración por exhaustividad

Demostración probabilística

Demostración por combinatoria

Demostración no constructiva

Pruebas estadísticas en matemáticas pura.

https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia

NÚMEROS NATURALES

- CONJUNTOS INDUCTIVOS
- INDUCCIÓN

DEFINICIÓN Llamaremos I al conjunto de todos los subconjuntos M de $\mathbb{R}$ tal que:

- $1 \in M$
- $x \in M \ \Rightarrow \ x+1 \in M$

OBSERVACIÓN:

1. A los elementos de I se les llama *conjuntos inductivos*.
2. Notar que $I \neq \emptyset$ pues $\mathbb{R} \in I$.

DEFINICIÓN Definimos el conjunto de los números naturales como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, es decir:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \in I} M$$

Esto significa que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ es el conjunto inductivo *más pequeño*.

Inducción

La inducción matemática es un método de demostración usada, típicamente, para probar que una determinada propiedad se cumple para todos los números naturales. Formalmente:

TEOREMA Sea $P(n)$ una función proposicional asociada a cada $n \in \mathbb{N}$. Si

1. $P(1)$ es verdadera.

2. $\forall n \in \mathbb{N}: \; P(n) \Rightarrow P(n+1)$ es verdadera.

entonces, es verdadero que $\forall n \in \mathbb{N}: \quad P(n)$.

EJEMPLOS:

Demuestre que $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Dem.: En este caso: $p(n): \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Luego:

- $p(1): \quad 1=1^2$ lo cual es verdadero. $\therefore p(1)$ es V.
- Supondremos que $p(n)$ es verdadero, y probaremos que $p(n+1)$ es verdadero, donde :

$$p(n+1): \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) &= \Big(1+3+5+\cdots+(2n-1)\Big)+(2n+1) \\ &= n^2+(2n+1) \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

es decir, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ es verdadera, que es exactamente lo que queríamos probar. Luego,

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Demostrar que n^2+n es siempre divisible por 2, si n es un número natural.

Dem.: En este caso: $p(n): \quad n^2+n=2k,$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Luego:

- $p(1): \quad 1^2+1=2=2\cdot 1,$ es decir, $k=1$. Luego, $p(1)$ es verdadero.
- Supondremos que $p(n)$ es verdadero, y probaremos que $p(n+1)$ es verdadero, donde :

$$p(n+1): \quad \exists \ell \in \mathbb{N}: (n+1)^2+n+1=2\ell$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2+n+1 &= n^2+n+2n+2 \\
&= 2k+2(n+1) \\
&= 2(k+n+1) \\
&= 2\ell \quad \text{donde} \quad \ell=k+n+1
\end{aligned}$$

es decir, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ es verdadera, que es exactamente lo que queríamos probar. Luego,

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n^2+n \quad \text{es siempre divisible por 2}$$

Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 2n+1 \leq 3^n$

Dem.: En este caso: $p(n): \quad 2n+1 \leq 3^n$

- $p(1): 2 \cdot 1 + 1 = 3 \leq 3.$ Luego, $p(1)$ es verdadero.
- Supondremos que $p(n)$ es verdadero, y probaremos que $p(n+1)$ es verdadero, donde :

$$p(n+1): \quad 2(n+1)+1 \leq 3^{n+1}$$

Como $p(n)$ es verdadero, ésto significa que

$$2n+1 \leq 3^n$$

Multiplicando por 3:

$$6n+3 \leq 3^{n+1} \qquad \text{y claramente} \qquad 2n+3 \leq 6n+3 \leq 3^{n+1}$$

es decir, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ es verdadera. Luego

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 2n+1 \leq 3^n$$

TEOREMA

Sea $P(n)$ una función proposicional asociada a cada número natural n, y sea $k \in \mathbb{N}$. Si $P(k)$ es verdadera y si $\forall n \geq k: \ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ es verdadera, entonces $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \geq k,\ n \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO :

1. Determine **todos** los $n \in \mathbb{N}: \ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n > 2^n$

   Solución: Estudiamos algunos casos particulares:

   $$\begin{array}{lcr l} n=1 & : & 1 > 2 & \textbf{Falso} \\ n=2 & : & 1 \cdot 2 > 2^2 & \textbf{Falso} \\ n=3 & : & 1 \cdot 2 \cdot 3 > 2^3 & \textbf{Falso} \\ n=4 & : & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^4 & \textbf{Verdadero} \\ n=5 & : & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 > 2^5 & \textbf{Verdadero} \end{array}$$

   Luego, *aparentemente* la afirmación es válida $\forall n \geq 4$. Verifiquemos que ésto es así:

   - Ya vimos que es válida para $n = 4$.
   - Veamos que si $p(n): \ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n > 2^n$ es verdadera para algún $n \geq 4$, entonces $p(n+1): \ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) > 2^{n+1}$ también lo es. En efecto:

   $$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \underbrace{>}_{\text{Hip. Inductiva}} 2^n(n+1) \underbrace{>}_{n+1>2} 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

   Luego, $\forall n \geq 4,\ n \in \mathbb{N}: \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n > 2^n$.

TEOREMA

Sea $P(n)$ una función proposicional asociada a $n \in \mathbb{N}$. Si para algún $s \in \mathbb{N}$:

1. $P(s) \wedge P(s+1)$ es verdadera.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq s: \ P(s) \wedge P(s+1) \Rightarrow P(s+2)$ es verdadera.

entonces, es verdadero que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq s: \ P(n)$.

EJEMPLOS:

Sea $f_0(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad f_{n+1}(x) = (f_0 \circ f_n)(x)$. Encuentre una expresión para $f_n(x), n \in \mathbb{N}$. (Stewart, Conceptos y Contextos).

Solución: Determinamos algunos casos particulares:

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) == f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{x}{3x+1}$$

Luego, conjeturamos que $f_n(x) = \dfrac{x}{(n+1)x+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Probemos que la conjetura es correcta:

- El caso $n = 1$ fue probado arriba.
- Supongamos que $p(n):\ f_n(x) = \dfrac{x}{(n+1)x+1}$ es verdadero. Veamos que

$$p(n+1):\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{(n+2)x+1} \quad \text{es verdadero.}$$

  Notamos que:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= (f_0 \circ f_n)(x) \\ &= f_0\left(\frac{x}{(n+1)x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{(n+1)x+1}}{\frac{x}{(n+1)x+1}+1} = \frac{x}{(n+2)x+1} \end{aligned}$$

2. Considere la sucesión de números naturales formada de la siguiente manera:

$$a_1 = 2\,, \quad a_2 = 3\,, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \quad n \geq 3$$

Probar que $\qquad a_n = 2^{n-1} + 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

Solución:

Tarea….

Ejercicio

Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X.

Demostrar que

$$B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(B \cap A_i \right) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

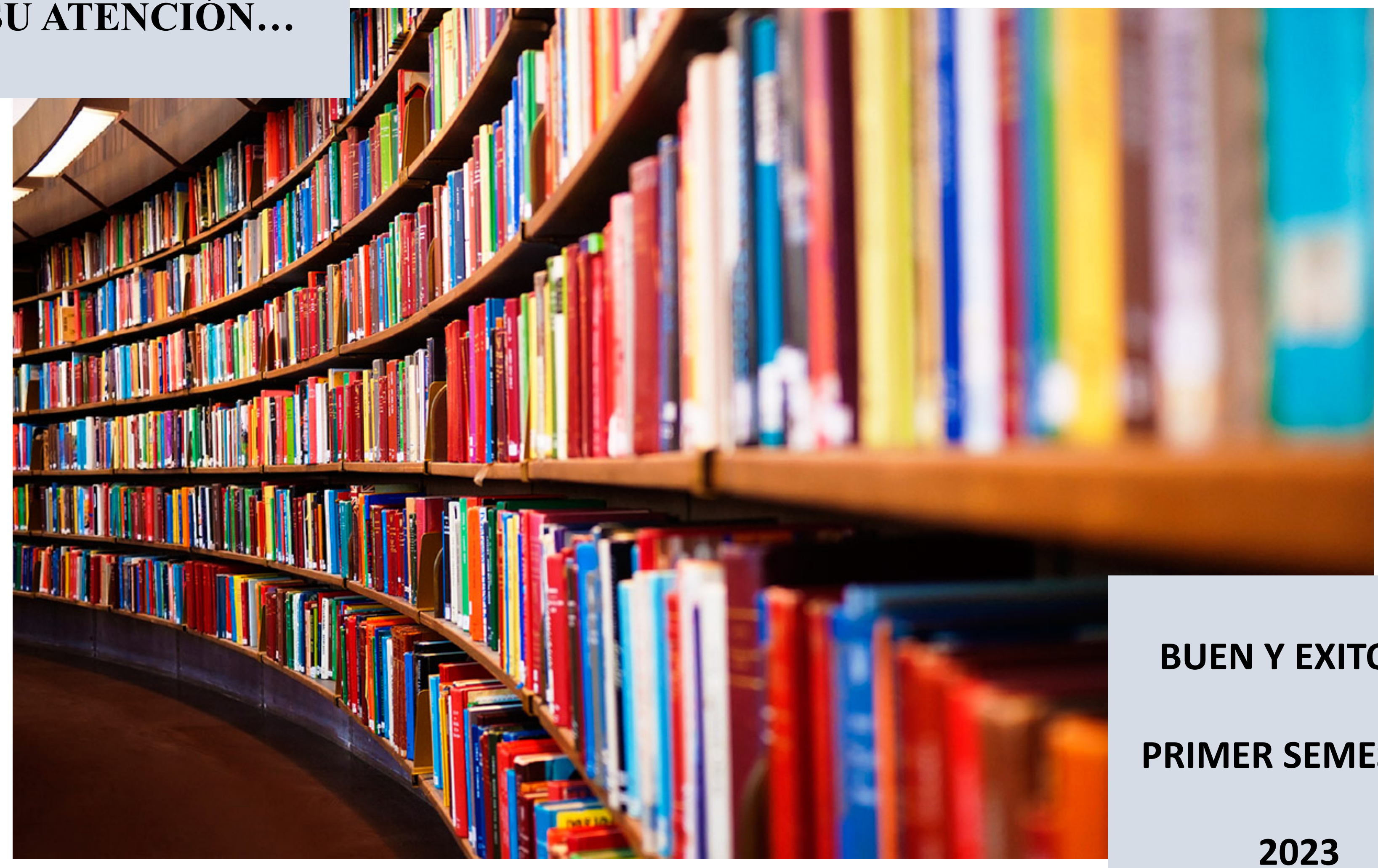
Listado de ejercicios.

1. Demuestre que $5m^3 + 7m$ es múltiplo de seis, para todo $m \in \mathbb{N}$.
2. Demuestre que $2^{4n} - 1$ es divisible por 15, para $n \in \mathbb{N}$.
3. Demuestre que $n^3 + 2n$ es divisible por 3, para $n \in \mathbb{N}$
4. Demuestre que $3^{2n} - 1$ es divisible por 8, para $n \in \mathbb{N}$.
5. Demuestre que $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ es múltiplo de 7, para $n \in \mathbb{N}$.
6. Demuestre que $8^n - 6^n$ es un múltiplo de 7 para todos los valores pares de $n \in \mathbb{N}$.
7. Demuestre que $8^n + 6^n$ es un múltiplo de 7 para todos los valores pares de $n \in \mathbb{N}$.
8. Demuestre que $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ es divisible por 54, para $n \in \mathbb{N}$.
9. Demuestre que $83^{4n} - 2 \cdot 97^{2n} + 1$ es divisible por 16, para $n \in \mathbb{N}$.
10. Demuestre que $7^{2n} - 48n - 1$ es divisible por 2304, para $n \in \mathbb{N}$.
11. Demuestre que $a - b$ es factor de $a^n - b^n$, para $n \in \mathbb{N}$.
12. Demuestre que $a + b$ es factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$.
13. Demuestre que si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces 24 divide a $n(n^2 - 1)$.

14. Al intentar demostrar por inducción, las siguientes proposiciones, el método falla en alguna de sus partes. Señale donde se produce el problema.

    (a) $\forall\, n \in \mathbb{N}(4+8+\cdots+4n = 3n^2 - n+2)$.
    (b) $\forall\, n \in \mathbb{N}(2+4+6+\cdots+2n = n^2+n+2)$.
    (c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ($n^2 - n + 41$ es número primo).

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



BUEN Y EXITOSO

PRIMER SEMESTRE

2023