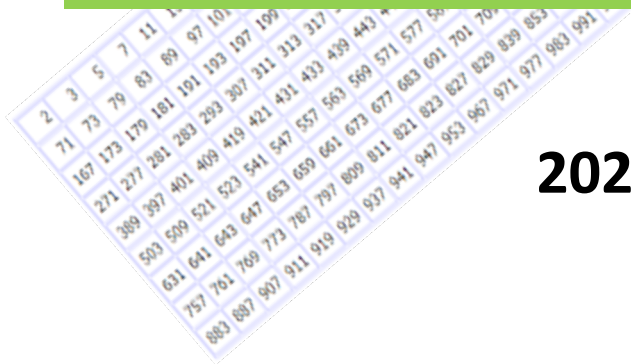




NÚMEROS NATURALES

PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

CPM1411



2023



Material extraído del capítulo números naturales de Apuntes de Complementos. USM.
Gruenberg, V.(2013).

Sucesión de números reales

Es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Ejemplos

1. $1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, -1/6, \dots$,
2. $5, 8, 11, 14, 17, \dots$,
3. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$,
4. $0, 1, 0, 1, 0, \dots$,

Término general de una sucesión Se denomina término general de una sucesión, S , simbolizado como S_n , a la expresión que representa cualquier término de esta. Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, $S_m = f(m)$ en la cual, dándole a (m) un cierto valor, se obtiene el término correspondiente.

Términos generales

Como término general de la sucesión 1., se tiene: $s_m = \frac{(-1)^m}{m}$

La sucesión 2 es $S_m = 5 + (m - 1)3$

Para la sucesión 3., va su término general: $s_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^m$

la sucesión 4., tiene el siguiente término general: $s_m = (1 + (-1)^m)/2$

DEFINICIÓN Se dice que la sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ está en *progresión aritmética* (P.A.) si existe un número real d , llamado *diferencia* tal que

$$a_{i+1} - a_i = d, \quad \forall i$$

TEOREMA Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ está en P.A., entonces

1. $a_k = a_1 + (k - 1)d, \quad \forall k.$
2. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética está dada por:

$$S_n = \frac{n}{2} \left(2a_1 + (n - 1)d \right) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Ejemplos

1. Encuentre el segundo, tercer y cuarto términos de la P.A. con $a_1 = -11$ y $d = 7$.
2. El cuarto término de una P.A. es 21 y el décimo es 48. Calcule la diferencia y el tercer término.

Calcular el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 4 y la diferencia es 5.

Una expedición avanza 20 km el primer día, de ahí en adelante, cada día avanza 4 km más que el día anterior. ¿Cuántos días demoran en avanzar 504 km?

DEFINICIÓN Se dice que la sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ está en *progresión geométrica* (P.G.) si existe un número real q , llamado *razón* tal que

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q, \quad \forall i$$

TEOREMA Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ está en P.G., entonces

- $a_k = a_1 q^{k-1}, \quad \forall k.$
- La suma de los n primeros términos de una P.G. está dada por:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

Ejemplos

1. El tercer término de una P.G. es 3 y el séptimo término es $\frac{3}{16}$. Calcule la razón y el primer término de la P.G.
2. Hallar el número de términos y la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 4, el último 62500 y la suma de todos sus términos 78124.

Hallar la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es igual a $\sqrt[5]{\frac{1}{a}}$ y el primer término es igual a $\sqrt{a}$.

La suma de los 5 términos que forman una progresión geométrica es $(b^2 + 1)(b + 1)$ y la razón es b . ¿Cuánto vale el primer término?

EJERCICIOS:

- . Si el valor de un automóvil se deprecia 20 % el primer año y 5 % cada año después del primero. ¿Cuál es el valor de un automóvil con ocho años de uso que costó originalmente \$3.000.000.
- . La vida media del isótopo de Uranio 230 es de 20,8 días. Es decir, la masa m del Uranio 230 se reduce a $\frac{m}{2}$ en 20,8 días. ¿Cuál es la cantidad que queda después de 104 días?
- . Demuestre que si a, b, c están en P.A., entonces

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \text{están en P.A.}$$

- . Determine la P.A. a, b, c si sabe que satisface las siguientes propiedades:

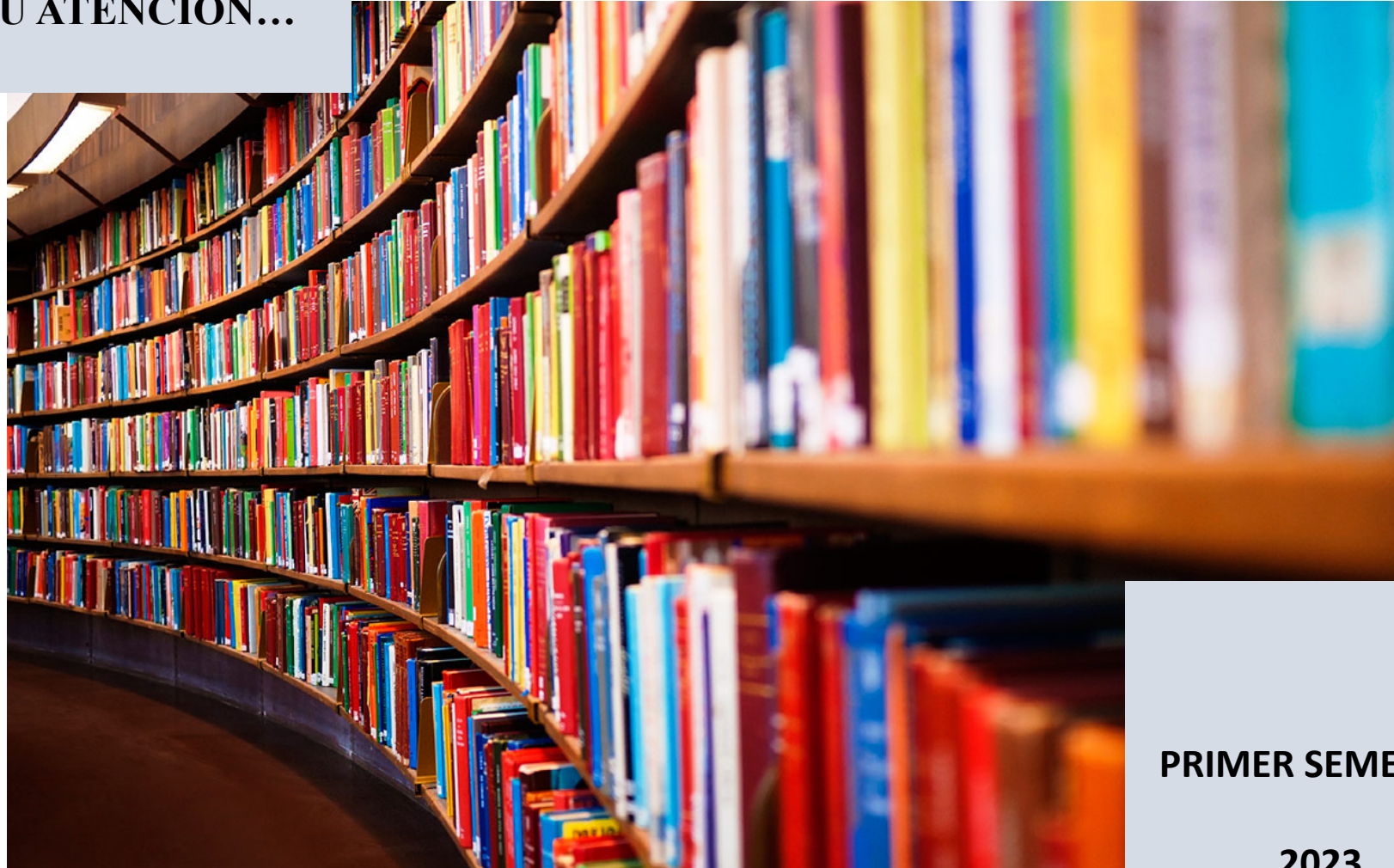
a) a, b y c son los coeficientes de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$.

b) $\frac{1}{3}(a + b + c) = x_1 + x_2$

c) $x_1 \cdot x_2 + 7 = b$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática del ítem a).

- . Una pelota se suelta desde 1 metro de altura. Si cada vez que rebota alcanza la mitad de la altura que tenía antes de rebotar. Calcular la distancia que recorre antes de detenerse.

...GRACIAS POR SU ATENCIÓN...



PRIMER SEMESTRE

2023