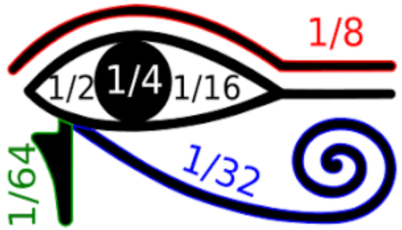
FACULTAD CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha

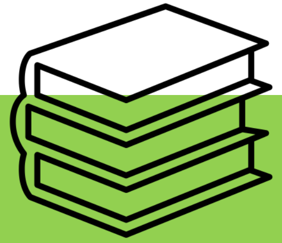


NÚMEROS REALES

CPM 1411

2023

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS



1.- Capítulo Números Reales. Apuntes de Cálculo. USM. Gruenberg, V.(2016).

2.- Capítulo Números Reales. Matemática para ingeniería Arancibia S.,Mena J. (2015).

Grupo

Definición *Sea G un conjunto no vacío. Diremos que $*$ es una operación binaria o clausura en G si para todo a, b en G existe un único $a * b$ en G, es decir*

$$(\forall a, b \in G)(\exists!\, c \in G)(a * b = c).$$

Ejemplo

Considere el conjunto $F_2 = \{0, 1\}$

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

¿Es F_2 cerrado ?

Definición *Un grupo es un conjunto no vacío G y una operación binaria $*$, tal que para todo a, b y c en G se cumplen los siguientes:*

i) Asociatividad

Para todo a, b, c en G, se cumple

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

En símbolos

$$(\forall a, b, c \in G)(a * (b * c) = (a * b) * c).$$

ii) Existencia de elemento neutro

Existe e elemento neutro de G, tal que para todo a en G, se cumple

$$a * e = a = e * a.$$

En símbolos

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G)(a * e = a = e * a).$$

iii) Existencia de elemento inverso

Para todo a en G, existe b en G, tal que

$$a * b = e = b * a.$$

Considere el conjunto $F_2 = \{0, 1\}$

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

¿Es F_2 un grupo?

Propiedad *Sea G un grupo entonces*

1. *El elemento $e \in G$ es único.*
2. *El inverso de un elemento es único*

Números Reales $\mathbb{R}$

Axiomas de $\mathbb{R}$ como cuerpo

Existe un conjunto que denotaremos por $\mathbb{R}$ no vacío, cuyos elementos serán llamados **números reales**, en el cual están definidas las operaciones binarias suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, que satisfacen las siguientes propiedades:

Axioma 1 $0, 1 \in \mathbb{R},\ 0 \neq 1.$

Axioma 2 $(\mathbb{R}, +)$ *es un grupo abeliano.*

Axioma 3 $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano.*

Axioma 4 *Distributividad:*

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c).$$

Ya que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o $\mathbb{R}$ satisface estas propiedades con las operaciones dadas, se dice que $\mathbb{R}$ es un **cuerpo**.

Notación: Si no hay peligro de confusión en adelante anotaremos sólo "ab", para referirnos al producto "$a \cdot b$", con $a, b \in \mathbb{R}$.

Observación: A la propiedad Distributiva, también se le denomina *Factorización*, en los casos cuando hay sumando que tiene un factor en común.

Propiedad *En $\mathbb{R}$ tenemos que:*

1. *El neutro aditivo de un número real es único.*

2. *El neutro multiplicativo de un número real es único.*

3. *El inverso aditivo de un número real es único.*

4. *El inverso multiplicativo de un número real no nulo es único.*

Demostración: Supongamos que 0 y $0'$ son neutros aditivos, luego $0 + 0' = 0$, ya que 0 es el neutro, del mismo modo $0 + 0' = 0'$, y además la suma es única. luego

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

Ahora supongamos que dado $a \in \mathbb{R}$, los números $b,\ b'$ son los inversos, luego $a + b' = 0$ y $b + a = 0$, de la propiedad asociatividad tenemos

$$\begin{array}{rcl} b + (a + b') & = & (b + a) + b' \\ b + 0 & = & 0 + b' \\ b & = & b' \end{array}$$

Notaciones: $-a$ denota el inverso aditivo de a para todo $a \in \mathbb{R}$ y b^{-1} denota el inverso multiplicativo de b, con $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Observación: Un técnica de demostración bastante utilizada es el llamada *método del absurdo*. Este método muy útil para demostrar proposiciones del tipo $p \Rightarrow q$. Notemos que

$$\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}.$$

El propósito es suponer que la proposición $p \wedge \overline{q}$ es verdadera, a partir de ello llegar a una contradicción, esto significa que la proposición $p \wedge \overline{q}$ es falsa y por lo tanto $\overline{p \wedge \overline{q}}$ es verdadera, de otro modo que $p \Rightarrow q$ es verdadero.

Ejemplo *Si m^2 es par, entonces m es par.*

Demostración: Procedamos por absurdo.

Supongamos m^2 par y m impar. Como m es impar entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m = 2k + 1$$

de esto tenemos que

$$\begin{aligned} m^2 &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

luego $m^2 = 2k' + 1$, con $k' = 2k^2 + 2k$, $k' \in \mathbb{Z}$ de donde obtenemos que m^2 es un número impar, lo que contradice nuestro supuesto de que m^2 es par, así

$$m^2 \text{ par} \Rightarrow m \text{ par}.$$

Propiedad *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces*

1. $-(a+b) = (-a) + (-b)$.
2. $-(-a) = a$.
3. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \quad a \neq 0, b \neq 0$.
4. $(a^{-1})^{-1} = a$.
5. $a \cdot 0 = 0$.
6. $-(ab) = (-a)b = a(-b)$.
7. $(-a)(-b) = ab$.
8. $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$.

Demostración:

1. Sean a y b números reales, entonces también lo es $a+b$ y como $(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano, entonces existe $-(a+b)$ inverso aditivo de $a+b$ por lo tanto

$$(a+b)+(-(a+b))=0.$$

Por otra parte, también existen $-a$ y $-b$ tales que:

$$\begin{aligned}(a+b)+(-a)+(-b) &= (a+(-a))+(b+(-b))\\ &= 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

de esta última igualdad podemos concluir que $(-a)+(-b)$ es también inverso de $a+b$ y luego por unicidad del inverso tenemos que

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

Ejemplo *Reemplazar* $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{1}{3}$ *en*

$$x = \frac{ab - a}{a + 1}$$

Solución:

$$x \;=\; \frac{ab-a}{a+1} = \frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2}+1} = \frac{\frac{-1}{6} - \frac{-1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{-1+3}{6}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

EJERCICIOS:

Resuelva la ecuación $(x-2)(2x+3)(5x+1)=0$

Para los valores de $a=3$, y $c=\frac{2}{-3}$.Determine $A=\dfrac{1+\dfrac{a}{bc}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{a}{c}}$

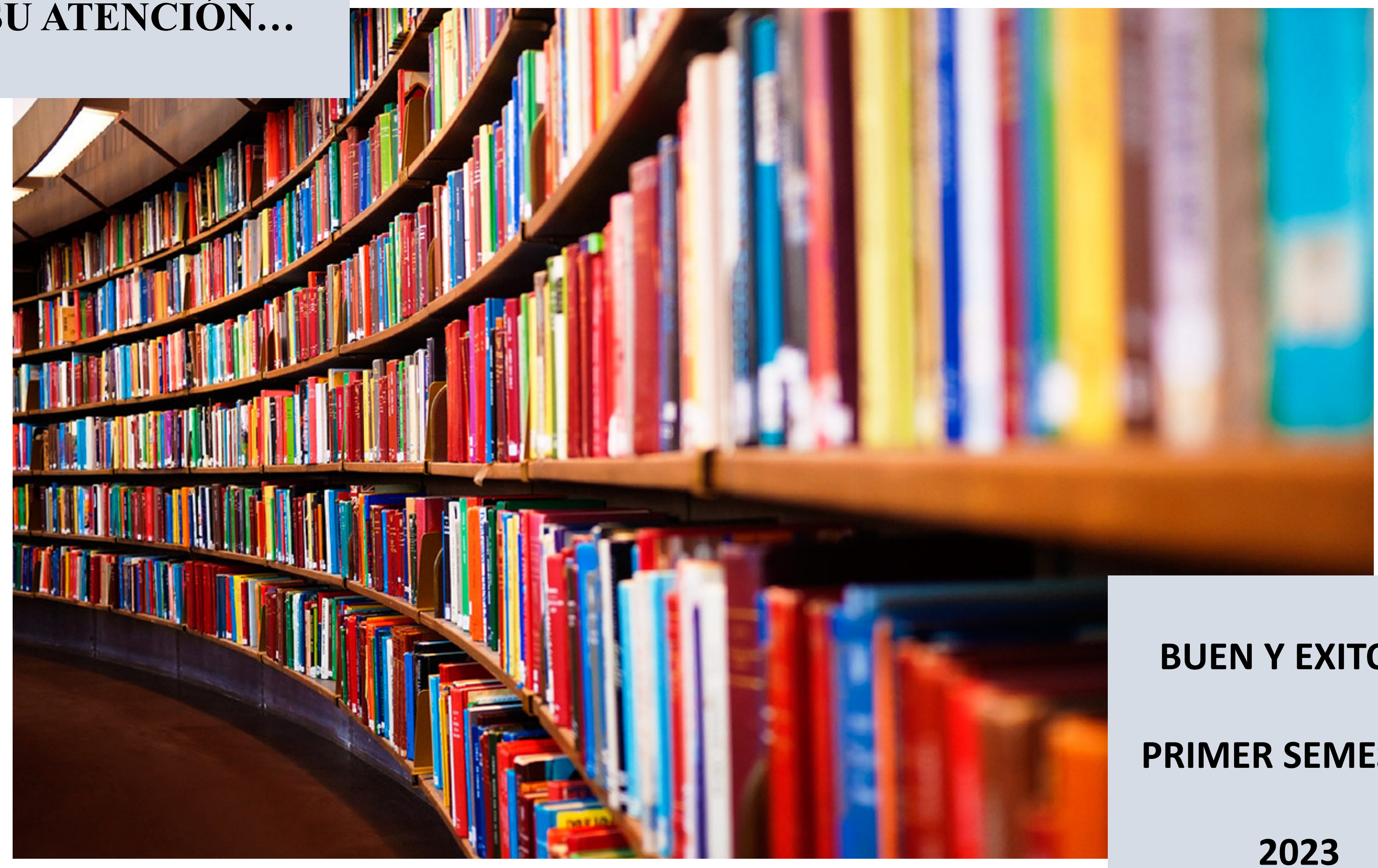
Considere el conjunto $F_2 = \{0, 1\}$ dotado de la suma y productos definidos por las siguientes tablas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

¿Posee F_2, dotado de estas operaciones, una estructura de cuerpo?

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



BUEN Y EXITOSO

PRIMER SEMESTRE

2023