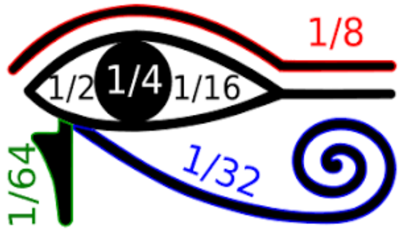
FACULTAD
CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha



NÚMEROS REALES 2

CPM 1411

2023

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1.- Capítulo Números Reales. Apuntes de Cálculo. USM. Gruenberg, V.(2016).

2.- Capítulo Números Reales. Matemática para ingeniería Arancibia S.,Mena J. (2015).

Potencias Enteras

Definición *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define la potencia real de base a y exponente n por:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-veces}$$

Más precisamente, sea $a \in \mathbb{R}$, se define por recurrencia

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Además para el caso $a \neq 0$, se define

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= (a^{-1})^n = \frac{1}{(a)^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-veces}}} \end{aligned}$$

Teorema *Sean* $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ *y* $n, m \in \mathbb{Z}$ *entonces:*

1. $a^{m+n} = a^m a^n$.
2. $a^n b^n = (ab)^n$.
3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.
5. $(a^n)^m = a^{nm}$.

Ejemplo *Simplificar completamente, para los valores de* $a, b \in \mathbb{R}$

$$X = \left(\frac{a^{-3}b}{a^2b^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{a^2b}\right)^{-3}.$$

Productos Notables

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

1. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
5. $(\forall m \in \mathbb{Z}^+)(\, a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})\,)$.

Desarrollar $(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$.

Solución:

$$\begin{aligned}(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1) &= (x^4+1)((x^2)^2-1)\\ &= (x^4+1)(x^4-1)\\ &= (x^4)^2-1\\ &= x^8-1\end{aligned}$$

Desarrollar $(3a-2b^2)^3$.

Solución:

$$\begin{aligned}(3a-2b^2)^3 &= (3a)^3+3\cdot 3a\cdot(2b^2)^2-3\cdot(3a)^2\cdot 2b^2-(2b^2)^3\\ &= 27a^3+3\cdot 3a\cdot 4b^4-3\cdot 9a^2\cdot 2b^2-8b^6\\ &= 27a^3+36ab^4-54a^2b^2-8b^6\end{aligned}$$

Sabiendo que $x + y = 6$ y que $xy = 5$, calcular el valor de $x^3 + y^3$.

Solución: Recordando el cubo de un binomio se tiene:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3$$

es decir:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3$$

sustituyendo $x + y = 6$ y $xy = 5$, se tiene:

$$6^3 = x^3 + 3 \cdot 5 \cdot 6 + y^3 \quad \Rightarrow \quad x^3 + y^3 = 216 - 90 = 126$$

Por lo tanto, $x^3 + y^3 = 126$.

Verificar que si $(x+y)^2 = 2(x^2+y^2)$, entonces $x = y$.

Solución:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= 2(x^2+y^2) \quad \Rightarrow \\ x^2+2xy+y^2 &= 2x^2+2y^2 \quad \Rightarrow \\ x^2-2xy+y^2 &= 0 \quad \Rightarrow \\ (x-y)^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

Problemas de Planteo

Comenzaremos recordando algunos conceptos que serán de gran utilidad para la resolución de problemas:

1. Se dice que y es el q por ciento de x, si y sólo si

$$y = \frac{q}{100}x.$$

2. La razón entre los números $a : b$ es el cociente

$$\frac{a}{b}.$$

Se llama *proporción* a una igualdad entre dos razones, por ejemplo

$$a : b = c : d$$

la cual se lee a es a b como c es a d.

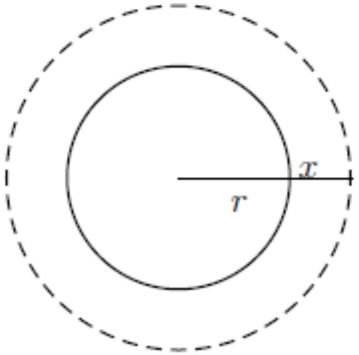
a) Se dice que a es *directamente proporcional* a b si y sólo si existe una constante k tal que

$$a = kb.$$

b) Se dice que a es *inversamente proporcional* a b si y sólo si existe una constante k tal que

$$a = k\frac{1}{b}.$$

La constante k (en ambos casos) es llamada factor de proporcionalidad.



Ejemplo *En que tanto por ciento debe aumentarse el radio de una circunferencia para que su área aumente en un 30 %.*

Solución: Sean $A = \pi r^2$ el área de la circunferencia de radio r y x la longitud del radio que debemos aumentar para que su área aumente en un 30 %.

Debemos ver que tanto por ciento es x de r.

Tenemos que el área de la circunferencia más el 30 % de la misma está dada por

$$1,3\pi r^2 = \pi(r+x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1,3}r = r + x \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{1,3} - 1\right) r \approx 0{,}14r$$

De aquí tenemos que x es aproximadamente el 14 % de r, con lo cual concluimos que el radio debe aumentar en un $100(\sqrt{1,3}-1)$ % para obtener un 30 % más de área. □

Ejemplo *Un número entero positivo de dos cifras excede en* 18 *a seis veces la suma de sus cifras. Si la cifra de las decenas excede en* 5 *a la de las unidades, ¿cuál es el número?.*

Solución: Sea x la cifra de las unidades e y la cifra de las decenas, en primer lugar tenemos que el número buscado es $N = 10y+x$, ahora bien de acuerdo a la información del problema tenemos que

$$10y + x = 6(x + y) + 18 \text{ y que } y = x + 5.$$

En consecuencia tenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} -5x + 4y & = & 18 \\ x - y & = & -5 \end{array}\right|$$

multiplicando la segunda ecuación por 4 y sumándola con la primera obtenemos que $x = 2$ y con esto que $y = 7$.

Por lo tanto el número buscado es $N = 7 \cdot 10 + 2 = 72$. $\square$

Ejemplo *Dos personas A y B se encuentran realizando un trabajo. Si A realiza el trabajo en 3 horas y B realiza el trabajo en 5 horas. ¿Cuánto tiempo demoraran en hacer el trabajo juntos?.*

Solución: Sean T el trabajo y x el tiempo (en horas) que demorarán en hacer el trabajo los dos obreros.

Como A demora 3 horas en realizar el trabajo, tenemos que en una hora A realiza $\frac{T}{3}$ del trabajo, razonando del mismo modo se tiene que B realiza $\frac{T}{5}$ del trabajo en una hora.

De acuerdo a esto podemos concluir que en una hora ambos realizan $\frac{T}{3} + \frac{T}{5} = \frac{8T}{15}$ del trabajo.

Luego tenemos que el trabajo total esta dado por la siguiente ecuación

$$\frac{8T}{15}x = T \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}$$

simplificando obtenemos que $x = 1{,}875$ horas. Por lo tanto tenemos que los obreros demoran 1,875 horas en realizar el trabajo juntos. $\square$

Ejemplo *Una pareja de estudiantes universitarios debe resolver un determinado problema. Después que el primero de ellos a trabajado durante 7 horas en la resolución del problema y el segundo a trabajado durante 4 horas en la solución del mismo, juntos han completado* $\frac{5}{9}$ *de la solución total. Si ellos siguieran trabajando juntos durante 4 horas más, solo les quedaría por resolver* $\frac{1}{18}$ *del problema. ¿Cuánto tardaría cada uno en resolver completamente el problema?.*

Solución: Sea "s" la solución del problema. Denotemos por "x" la cantidad de horas que tardaría el primer estudiante en resolver el problema y denotemos por "y" la cantidad de horas que tardaría el segundo estudiante en dar solución al problema. Entonces en una hora el primer estudiante realiza $\frac{s}{x}$ de la solución completa mientras que el segundo realiza en el mismo tiempo $\frac{s}{y}$ de la solución completa.

De acuerdo a la información del problema tenemos que

$$7\frac{s}{x} + 4\frac{s}{y} = \frac{5s}{9}.$$

Ahora bien como ellos trabajarán juntos durante 4 horas, realizarán $\frac{4s}{x}+\frac{4s}{y}$ de la solución, que es igual a

$$s - \left(\frac{5s}{9} + \frac{s}{18}\right) = \frac{7s}{18}$$

así se tiene que

$$\frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} = \frac{7s}{18}$$

luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{7s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{5s}{9} \\ \frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{7s}{18} \end{array}\right|$$

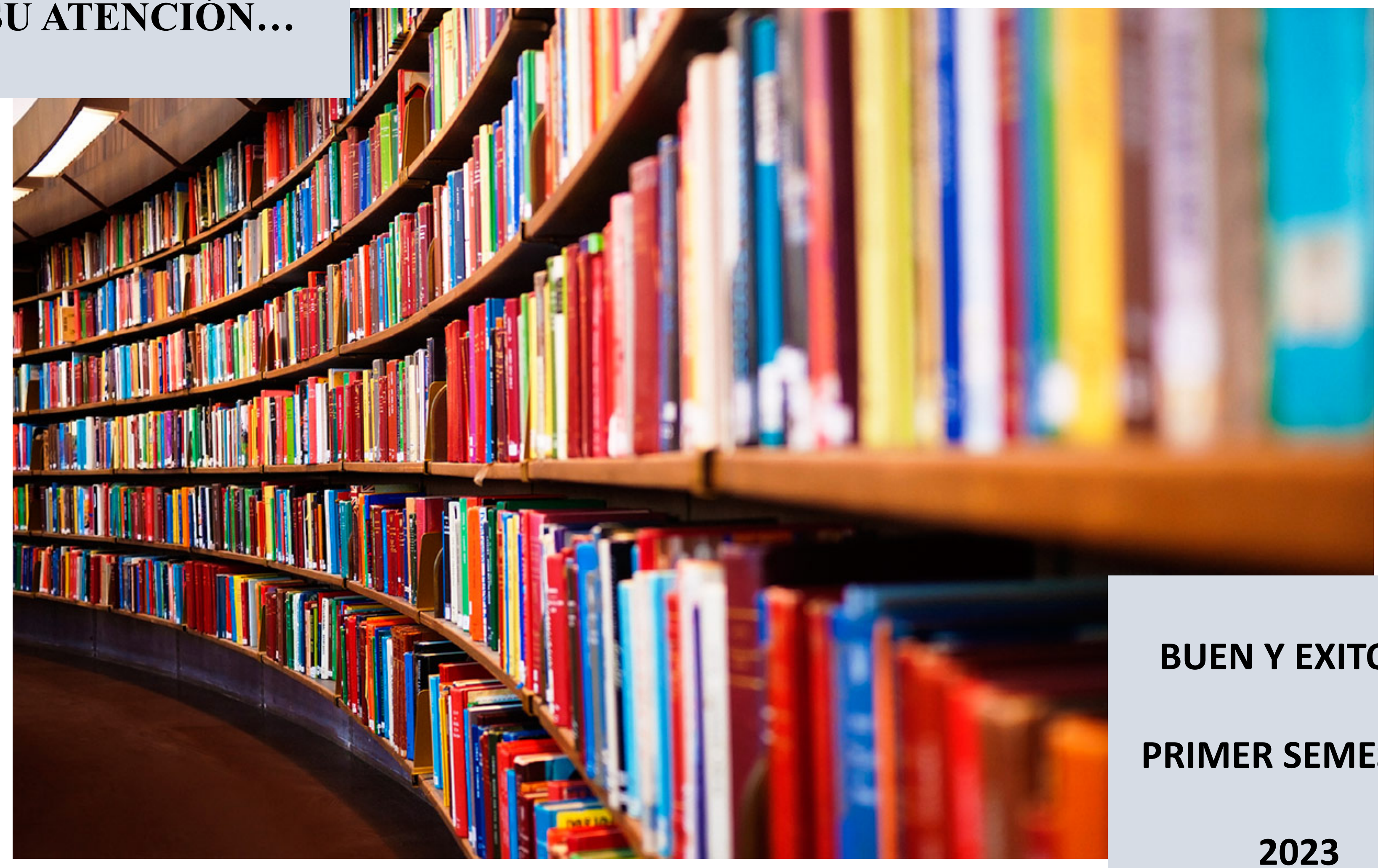
simplificando obtenemos,

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} & = & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} & = & \frac{7}{18} \end{array}\right|$$

resolviendo tenemos que $x = 18$ e $y = 24$. Por lo tanto el primer estudiante tarda 18 horas en dar solución al problema, mientras el segundo tarda 24 horas en realizar la misma tarea.

$\square$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



BUEN Y EXITOSO

PRIMER SEMESTRE

2023