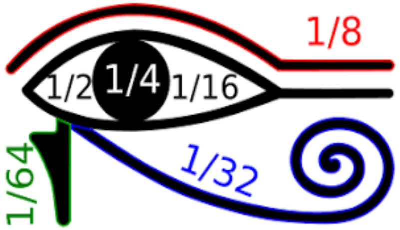
FACULTAD
CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de
Playa Ancha



NÚMEROS REALES 3

CPM 1411

2023

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1.- Capítulo Números Reales. Apuntes de Cálculo. USM. Gruenberg, V.(2016).

2.- Capítulo Números Reales. Matemática para ingeniería Arancibia S.,Mena J. (2015).

$\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado

Axiomas de Orden

Existencia de un subconjunto de $\mathbb{R} - \{0\}$, el cual sera denotado por $\mathbb{R}^+$. Los elementos de este subconjunto se llaman números reales positivos y cumplen los siguientes axiomas:

Axioma *La suma es cerrada, esto es si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$.*

Axioma *El producto es cerrado, esto es si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $ab \in \mathbb{R}^+$.*

Axioma *Ley de Tricotomía.*
Si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$a \in \mathbb{R}^+ \;\underline{\vee}\; a = 0 \;\underline{\vee}\; -a \in \mathbb{R}^+.$$

Propiedad *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces se verifican:*

1. $a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+$, *en particular* $1 \in \mathbb{R}^+$.
2. $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+$.
3. $a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge b - c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a - c \in \mathbb{R}^+$.
4. $b - a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+$.
5. $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow bc - ac \in \mathbb{R}^+$.
6. $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge -c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac - bc \in \mathbb{R}^+$.

Demostración:

1. Tenemos que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces por axioma (7),

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

   Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces por axioma (6), $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$, es decir

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+.$$

   Si $-a \in \mathbb{R}^+$ entonces por axioma (6), $(-a)(-a) \in \mathbb{R}^+$ pero por proposición (3) parte (7), $(-a)(-a) = (-a)^2 = a^2$, luego $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

   Así

$$a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Definición *Se define el conjunto de los números reales negativos como*

$$\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} \mid -a \in \mathbb{R}^+\}.$$

Observación: Notemos que por el axioma 7 podemos descomponer $\mathbb{R}$ en la unión disjunta de $\mathbb{R}^+, \{0\}$ y $\mathbb{R}^-$, esto es

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} \mathbb{R}^-.$$

Definición *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que a es* mayor *que b ó b es menor que a si y sólo si*

$$a - b \in \mathbb{R}^+$$

este hecho se anota como

$$a > b \quad o \ bien \quad b < a.$$

Diremos que a es mayor o igual *que b o bien b es menor o igual que a si y sólo si a es mayor que b o a es igual a b, es decir*

$$a > b \quad o \quad a = b,$$

de modo abreviado anotaremos este hecho como sigue

$$a \geq b \quad o \ bien \quad b \leq a.$$

Observación: De acuerdo a las notaciones precedentes, tenemos:

1. $a \in \mathbb{R}^+$ si y sólo si $a > 0$.
2. $a \in \mathbb{R}^-$ si y sólo si $a < 0$.

Corolario *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. $a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a^2 > 0$.
2. $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$.
3. $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$.
4. $b > a \Leftrightarrow b + c > a + c$.
5. $b > a \wedge c > 0 \Rightarrow bc > ac$.
6. $b > a \wedge c < 0 \Rightarrow bc < ac$.

Notación:

$$a \leq b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq c.$$

Teorema **(Tricotomía)** *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones*

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Observación: La relación $a \leq b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ es una **relación de orden total.** Pues se verifican que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Reflexividad
$$a \leq a.$$

2. Antisimetría
$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b.$$

3. Transitividad
$$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c.$$

4. Tricotomía
$$a < b \ \veebar \ a = b \ \veebar \ b < a.$$

Propiedad *Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p < q$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$.*

Demostración:

$$
\begin{aligned}
p < q &\Rightarrow p + p < p + q \\
&\Rightarrow 2p < p + q \\
&\Rightarrow p < \frac{p+q}{2}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
p < q &\Rightarrow p + q < q + q \\
&\Rightarrow p + q < 2q \\
&\Rightarrow \frac{p+q}{2} < q.
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que existe $r = \frac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$.

Raíz n-ésima

Propiedad *Dado a un número real positivo y un número natural n, existe un único b real positivo tal que*

$$a = b^n$$

en símbolos

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! b \in \mathbb{R}^+)(b^n = a).$$

Definición

El número b en se llama **raíz n-ésima** *de a y se denota por*

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \vee \quad b = a^{\frac{1}{n}}.$$

Más aún, si $m \in \mathbb{Z}$ se define

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m \text{ con } a > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N},$$

ahora bien si n resulta ser un número impar, podemos extender esta definición a bases negativas, esto es

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \quad a > 0.$$

Observación: Si $a \geq 0$ podemos asegurar que

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Propiedad *Si* $a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}$ *y* $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ *entonces*

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}.$$

Propiedad *Si* n *es un número natural par y* $a < 0$, *entonces no existe un número real* b *tal que*

$$a = b^n.$$

Propiedad *Si* n *es un número natural impar y* $a < 0$, *entonces existe un único número real* b *tal que*

$$a = b^n.$$

Ejemplo $\sqrt{2}$ *es irracional.*

Solución: En efecto procedamos por absurdo, es decir supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, esto es

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, de modo tal, que la fracción $\frac{p}{q}$ esta simplificada al máximo, ahora bien

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} = \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow\; p^2 &= 2q^2 \end{aligned}$$

luego tenemos que p^2 es un número par, entonces por (1.1) p es par, es decir $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, luego tenemos que

$$p^2 = 4k^2$$

pero $p^2 = 2q^2$, por lo tanto $2q^2 = 4k^2$ de aquí que $q^2 = 2k^2$, lo cual nos dice que q^2 es un número par y nuevamente por (1.1) tenemos que q es par.

Hemos concluido entonces que p y q son pares lo que contradice el supuesto que la fracción $\frac{p}{q}$ estaba simplificada al máximo, de este modo obtenemos por absurdo que $\sqrt{2}$ es un número irracional. $\square$

Ejemplo *Simplificar completamente, para los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ donde estén bien definidas las siguientes expresiones:*

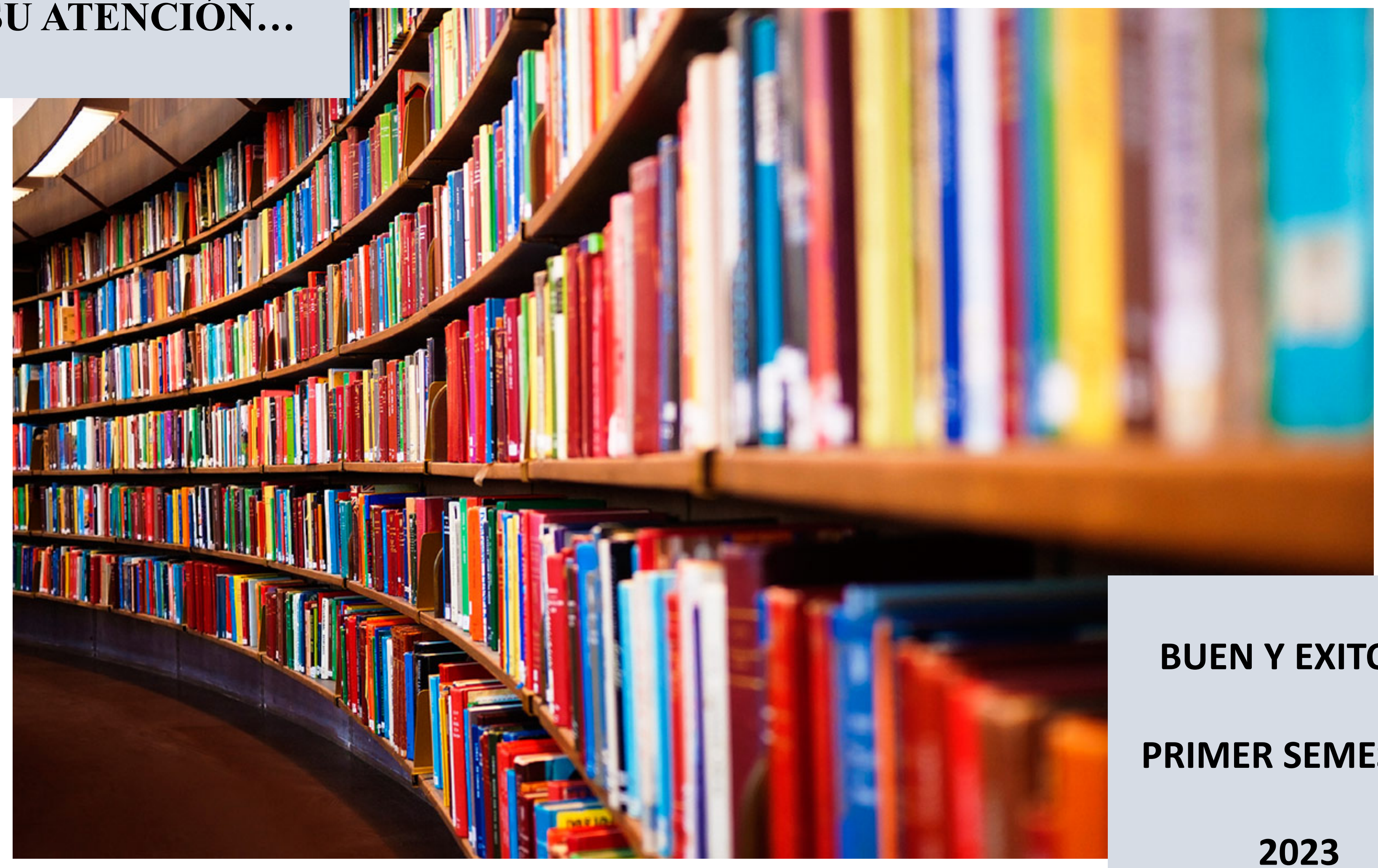
$$X = \frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-b}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}(a+b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2(a^2+b^2)(a+b)^{-\frac{1}{2}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}}.$$

Observación: Racionalizar una fracción, consiste en obtener un expresión equivalente, en la cual el denominador correspondiente, no incluye expresiones con raíces. Para lograr este cometido se recurre a los Productos Notables.

Ejemplo *Racionalizar las siguiente fracciones*

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$
6. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$
7. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$
8. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



BUEN Y EXITOSO

PRIMER SEMESTRE

2023