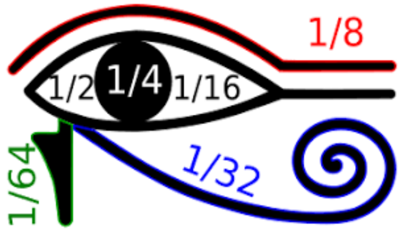
FACULTAD CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha



Unidad 1: Números Reales

Ecuación de segundo grado

CPM 1411

2023

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1.- Capítulo Números Reales. Apuntes de Cálculo. USM. Gruenberg, V.(2016).

2.- Capítulo Números Reales. Matemática para ingeniería Arancibia S.,Mena J. (2015).

Ecuación de Segundo Grado

Definición *Se llama ecuación de segundo grado en la variable x a una expresión del tipo*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad con \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Ejemplo

$5x^2 + 7x - 3.$

$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3.$

Determinemos ahora las posibles soluciones de la ecuación

$$\begin{array}{rrcl} & ax^2+bx+c & = & 0 \quad /4a \\ \Leftrightarrow & 4a^2x^2+4abax+4ac & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (2ax)^2+2(2ax)b+b^2-b^2+4ac & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (2ax+b)^2 & = & b^2-4ac \end{array}$$

Notemos que estas ecuación tiene solución o raíces en $\mathbb{R}$ si y sólo si

$$b^2-4ac \geq 0.$$

y en este caso podemos calcular

$$
\begin{aligned}
2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\
\Leftrightarrow \quad 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\
\Leftrightarrow \quad x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}
$$

Además note que, podemos factorizar el polinomio del siguiente modo

$$
ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)
$$

Definición *El discriminante de la ecuación de segundo grado* $ax^2 + bx + c = 0$ *corresponde a la expresión*

$$\triangle = b^2 - 4ac.$$

Teorema

Considerando la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, *tenemos que:*

1. *Si* $\triangle > 0$, *entonces la ecuación tiene dos soluciones o raíces distintas en* $\mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}.$$

2. *Si* $\triangle = 0$, *entonces la ecuación tiene dos soluciones raíces iguales en* $\mathbb{R}$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3. *Si* $\triangle < 0$, *entonces la ecuación no tiene soluciones o raíces en* $\mathbb{R}$.

Observación: Si denotamos $\mathcal{S}$ al conjunto solución de la ecuación , tenemos que

1. Si $\triangle > 0$, $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$.
2. Si $\triangle = 0$, $\mathcal{S} = \{x_1\}$.
3. Si $\triangle < 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Ejemplo *Determinar las raíces y factoricé el polinomio*

$$5x^2 + 7x - 3.$$

Solución: Como $\triangle = (7)^2 + 60 = 109 > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales y distintas, a saber:

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{109}}{10}, \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{109}}{10}.$$

La factorización esta dada

$$5x^2 + 7x - 3 = 5\left(x - \frac{-7 + \sqrt{109}}{10}\right)\left(x - \frac{-7 - \sqrt{109}}{10}\right)$$

Ejemplo *Determinar las raíces y factoricé el polinomio*

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3.$$

Solución: En este caso $\triangle = (2\sqrt{3})^2 - 12 = 0$, luego la ecuación tiene una raíz real (dos raíces iguales)

$$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}.$$

La factorización

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = (x + \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = (x + \sqrt{3})^2$$

Ejemplo *Determinar, si existen las raíces de la ecuación*

$$x^2 + x + 1.$$

Solución: Como $\triangle = -3 < 0$, tenemos que la ecuación no tiene raíces reales y por lo tanto no se puede factorizar en producto de factores lineales.

Ejemplo *Resolver la ecuación*

$$\sqrt{x} + x = 12.$$

Solución.

La restricción del problema es $\mathbb{R}_0^+$

usemos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ es decir $u^2 = x$.

$$u^2 + u - 12 = 0,$$

y su discriminate es $\triangle = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 > 0$, luego tenemos que

$$u = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

es decir

$$u = 3 \ \vee \ u = -4$$

pero volviendo a la variable original, tenemos una sola posibilidad

$$\sqrt{x} = 3$$ y por lo tanto $S = \{9\}$.

Ejemplo

Resolver la ecuación

$$x^2 - x = \frac{9}{x^2 - x}.$$

Solución: La restricción del problema es $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, luego

$$\begin{aligned} (x^2 - x)^2 &= 9 \\ x^2 - x &= \pm\sqrt{9} \\ x^2 - x \mp 3 &= 0 \end{aligned}$$

Para la primera ecuación $x^2 - x - 3 = 0$, se tiene $\triangle = 13 > 0$. luego la solución es

$$S_1 = \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

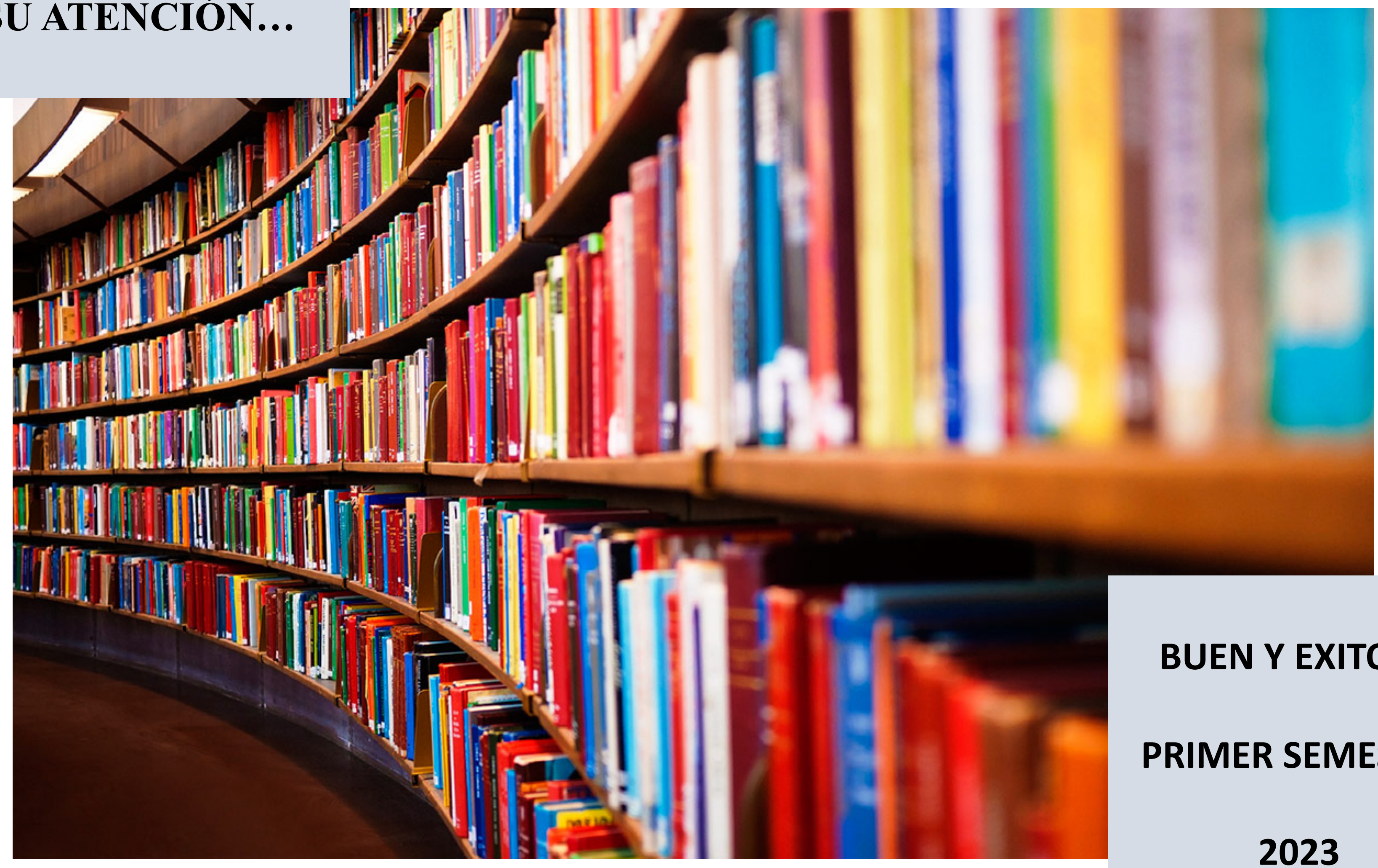
Para la segunda ecuación $x^2 - x + 3 = 0$, tenemos $\triangle = -11 < 0$. luego la solución es vacía

$$S_2 = \phi.$$

Con lo cual se obtiene que

$$S = S_1 \cup S_2 = S_1 \cup \phi = \left\{ \frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



BUEN Y EXITOSO

PRIMER SEMESTRE

2023