

Números Reales 6

CPM 1411

2023



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS



- 1.- Capítulo Números Reales. Apuntes de Cálculo. USM. Gruenberg, V.(2016).
- 2.- Capítulo Números Reales. Matemática para ingeniería Arancibia S.,Mena J. (2015).

Axioma del Supremo

Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y $c \in \mathbb{R}$. Se dice que

1. c es una cota superior de A , si y sólo si

$$(\forall a \in A)(a \leq c).$$

2. a es una cota inferior de A , si y sólo si

$$(\forall a \in A)(a \geq c).$$

3. A es un conjunto acotado superiormente, si y sólo si existe una cota superior para el conjunto A .

4. A es un conjunto acotado inferiormente, si y sólo si existe una cota inferior para el conjunto A .

5. A es un conjunto acotado, si y sólo si A es acotado superior e inferiormente

Observación:

Si $A = \emptyset$, se dice que A es un conjunto acotado.

Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y $L \in \mathbb{R}$.

Se dice que L es el supremo de A , si y sólo si, las dos condiciones siguientes se satisfacen:

1. L es una cota superior de A .
2. Si L' es una cota superior de A , entonces $L \leq L'$.

Notación:

el supremo se denota por $\sup(A) = L$.

Definición Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y $L \in \mathbb{R}$.

Se dice que L es el ínfimo de A , si y sólo si, las dos condiciones siguientes se satisfacen:

1. L es una cota inferior de A .
2. Si L' es una cota inferior de A , entonces $L' \leq L$.

Notación:

el ínfimo, se denota por $\inf(A) = L$.

Ejemplo Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq \sqrt{2}\}$. Determine el conjunto de cotas superiores e inferiores del conjunto A .

Notemos que

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq \sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x - 3 \leq \sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} + 3 \leq x \leq \sqrt{2} + 3\} \\ &= [-\sqrt{2} + 3, \sqrt{2} + 3]. \end{aligned}$$

De acuerdo a esto podemos ver que A es un conjunto acotado superior e inferiormente pues existen $r = \sqrt{2} + 3$ y $r' = -\sqrt{2} + 3$ de modo que $r' \leq a \leq r$ para todo $a \in A$. Además el conjunto de todas las cotas inferiores está dado por $] -\infty, -\sqrt{2} + 3]$ y el de las cotas superiores está dado por $[\sqrt{2} + 3, \infty[$.

Teorema Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $L \in \mathbb{R}$ cota superior de A . Entonces,

$$L = \sup(A) \text{ si y sólo si } (\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A)(x > L - \epsilon).$$

Teorema Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $L \in \mathbb{R}$ cota inferior de A . Entonces,

$$L = \inf(A) \text{ si y sólo si } (\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A)(x < L + \epsilon).$$

El conjunto de los números reales con el axioma del supremo recibe el nombre de **cuerpo ordenado y completo**, o **cuerpo totalmente ordenado** lo cual caracteriza $\mathbb{R}$.

Axioma Si $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado superiormente, entonces el supremo de A existe y es un elemento de $\mathbb{R}$.

Propiedad *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado.*

Demostración: Supongamos por absurdo que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Luego por el axioma del supremo existe $\sup(\mathbb{N}) = L, L \in \mathbb{R}$, esto es $(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(n > L - \epsilon)$

En particular si consideramos $\epsilon = 1 > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > L - 1$$

es decir,

$$n + 1 > L$$

pero $n + 1 \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción pues $L = \sup(\mathbb{N})$.

Teorema (Propiedad arquimediana)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(x < n).$$

Demostración: Procedamos por absurdo, esto es

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(x \geq n).$$

Es claro que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, luego tenemos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente, lo cual es una contradicción.

Corolario

La propiedad arquimediana la podemos expresar de manera equivalente como sigue

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \left(\frac{1}{n} < \epsilon \right).$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el número real $\frac{1}{\epsilon}$, entonces por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

de donde

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

concluyendo así la demostración.

Ejemplo Sea $A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \mid x_n = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ Demostrar que $\sup(A) = \frac{1}{2}$.

1. En primer lugar demostremos que $L = \frac{1}{2}$ es una cota superior de A .

Claramente

$$2n < 2n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{2n}{2n+1} &< 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \frac{n}{2n+1} &< \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

así

$$x_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo cual se tiene que $L = \frac{1}{2}$ es cota superior de A .

2. Solo nos queda demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists x_n \in A)(x_n > \frac{1}{2} - \epsilon)$, lo que equivale a probar la existencia de $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} - \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el número real $\frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$, ahora bien por Teorema tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n &> \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon} \\ \Leftrightarrow 4n\epsilon &> 1-2\epsilon \\ \Leftrightarrow 2n\epsilon &> \frac{1}{2} - \epsilon \\ \Leftrightarrow n &> n - 2n\epsilon + \frac{1}{2} - \epsilon \\ \Leftrightarrow n &> 2n\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) + \frac{1}{2} - \epsilon \\ \Leftrightarrow n &> (2n+1)\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \\ \Leftrightarrow \frac{n}{2n+1} &> \frac{1}{2} - \epsilon. \end{aligned}$$

Así

$$(\forall \epsilon > 0) \left(\exists x_n = \frac{n}{2n+1} \in A \right) \left(x_n > \frac{1}{2} - \epsilon \right).$$

Luego

$$\sup(A) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo Sea $A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \mid x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ Demostrar que $\inf(A) = 0$.

1. En primer lugar demostremos que $L = 0$ es una cota inferior de A .

Es evidente que

$$0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$0 < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo cual se tiene que $L = 0$ es cota inferior de A .

2. Solo nos queda demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists x_n \in A)(x_n < \epsilon)$, este hecho es clara consecuencia del Corolario

$$(\forall \epsilon > 0) \left(\exists x_n = \frac{1}{n} \in A \right) (x_n < \epsilon) .$$

luego

$$\inf(A) = 0.$$

Teorema Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$. Entonces, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Claramente si $x < 0 < y$ existe $p = 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$ y el teorema queda demostrado en este caso.

Supongamos ahora que $0 < x < y$. Sea

$$\epsilon = y - x > 0$$

luego por la corolario de propiedad arquimediana tenemos

$$\frac{1}{n} < \epsilon = y - x$$

Dado $nx \in \mathbb{R}$, nuevamente por la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > nx.$$

Sea m el mínimo que satisface $m > nx$, luego

$$m - 1 \leq nx$$

así tenemos

$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y.$$

Por lo tanto

$$x < \frac{m}{n} < y,$$

es decir, existe $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.

Por otra parte. Supongamos que $x < y < 0$, entonces $0 < -y < -x$ y por lo anterior existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$-y < p < -x.$$

Luego

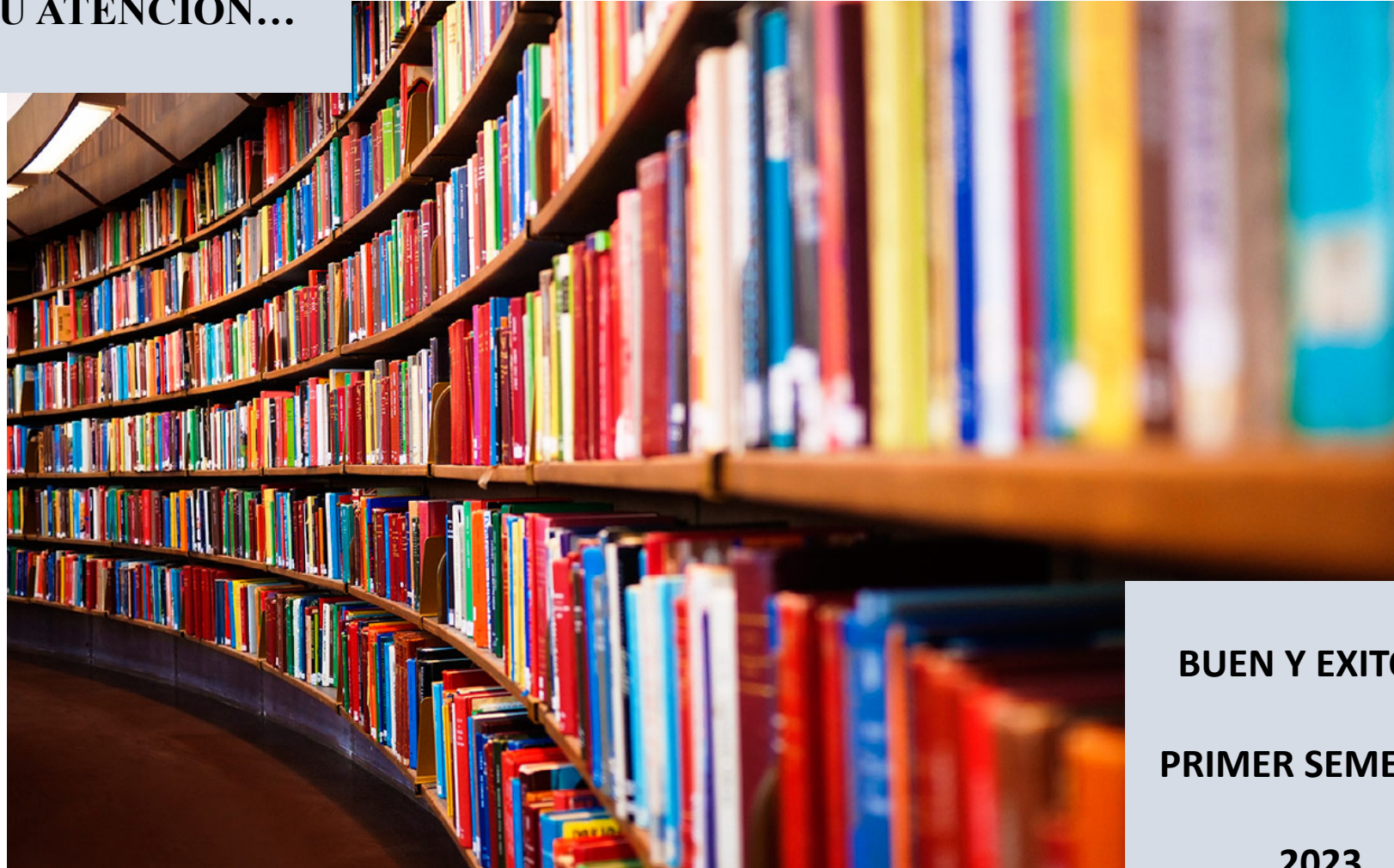
$$x < -p < y$$

y como $-p \in \mathbb{Q}$ queda completa la demostración.

Definición *Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ si y sólo si entre dos números reales cualesquiera existe algún elemento de X .*

Observación: De acuerdo al teorema y definición anteriores claramente el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$.

...GRACIAS POR SU ATENCIÓN...



BUEN Y EXITOSO

PRIMER SEMESTRE

2023