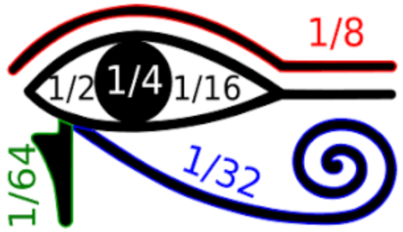
FACULTAD
CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

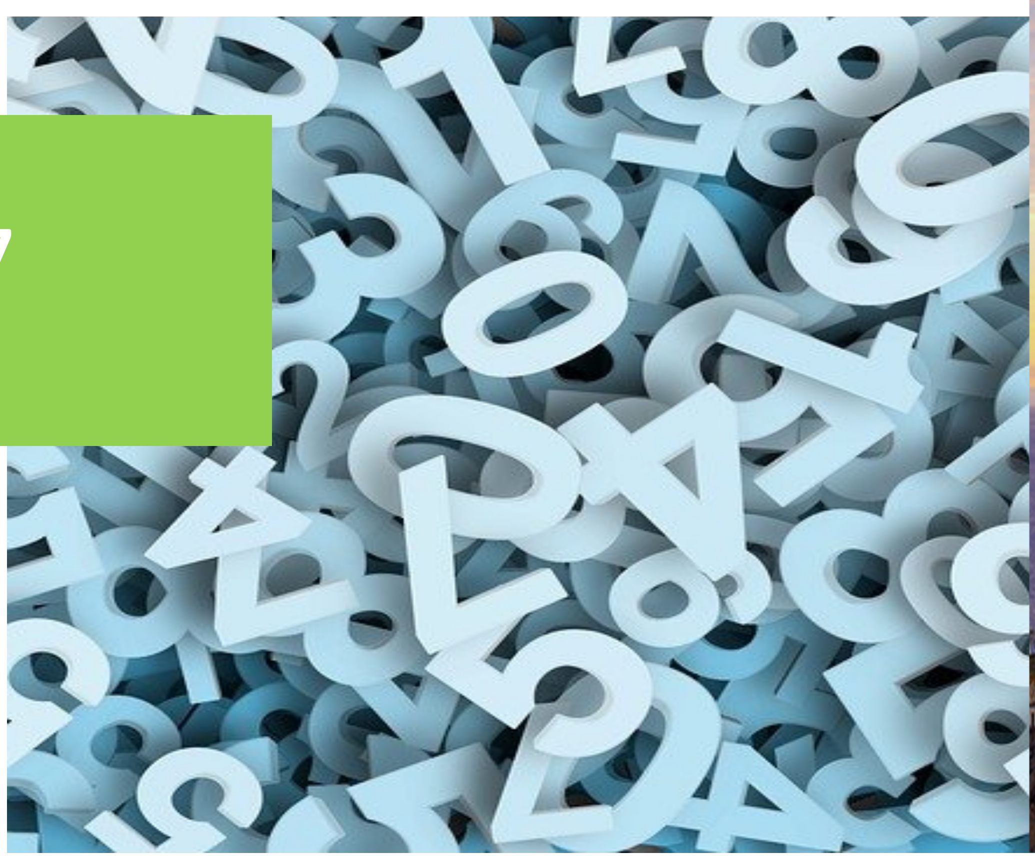
Universidad de Playa Ancha

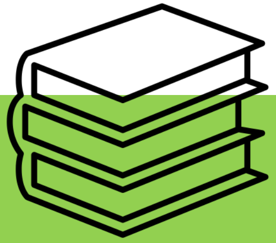


Números Reales 7

CPM 1411

2023





REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1.- Capítulo Números Reales. Apuntes de Cálculo. USM. Gruenberg, V.(2016).

2.- Capítulo Números Reales. Matemática para ingeniería Arancibia S.,Mena J. (2015).

Inecuaciones

1. Conjunto Restricción

Llamaremos conjunto restricción de una expresión que involucra términos $P(x)$ y $Q(x)$ al conjunto $\mathcal{R}$ de los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales cada término de la expresión esta definido en $\mathbb{R}$. Los términos $P(x)$ y $Q(x)$ son tales que al menos uno de ellos involucra la variable x.

2. Conjunto Solución

Llamaremos conjunto solución de la ecuación $P(x) = Q(x)$ o de la inecuación $P(x) \leq Q(x)$ al subconjunto $\mathcal{S}$ de los x en $\mathcal{R}$ que satisfacen la ecuación o inecuación, es decir

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid P(x) = Q(x)\} \quad \vee \quad \mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid P(x) \leq Q(x)\}.$$

Intervalos en $\mathbb{R}$: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$ se denotan

$$
\begin{aligned}
{[a, b[} &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}; &]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}; \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}; &]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}; \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}; &]a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}; \\
{[a, b]} &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}; & [a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$3x + 5 \leq 10.$$

Propiedad *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$

1. $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$.
2. $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$.

Corolario *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$

1. $ab \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$.
2. $ab \leq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \leq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \geq 0)$.

Ejemplo *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$\frac{x-3}{x+5} \geq 0.$$

Solución:

El conjunto restricción de la inecuación es $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+5 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-5\}$

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x+5} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-3 \geq 0 \wedge (x+5)^{-1} > 0) \vee (x-3 \leq 0 \wedge (x+5)^{-1} < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x-3 \geq 0 \wedge x+5 > 0) \vee (x-3 \leq 0 \wedge x+5 < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 3 \wedge x > -5) \vee (x \leq 3 \wedge x < -5) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 3) \vee (x < -5).
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{R} \;\middle|\; \frac{x-3}{x+5} \geq 0 \right\} =]-\infty, -5[\cup [3, \infty[.$$

Observación: La resolución de la inecuación $\frac{x-3}{x+5} \geq 0$, se puede resumir en la siguiente tabla

	$]-\infty, -5[$	-5	$]-5, 3[$	3	$]3, \infty[$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-3}{x+5}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Donde el signo $+$ y $-$ indican que el factor es positivo o negativo en el intervalo analizado, y la última fila se anota el signo del cuociente.

Ahora observando la última fila de la tabla tenemos que, la solución a la inecuación

$$\frac{x-3}{x+5} \geq 0$$

es $\mathcal{S} =]-\infty, -5[\cup [3, \infty[$.

Ejemplo *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0.$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap (]-\infty, -7[\cup[-3, 2]\cup]7, \infty[) =]-\infty, -7[\cup[-3, 2]\cup]7, \infty[.$$

Propiedad *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ *y* $n \in \mathbb{N}$

1. $(a < b \wedge c < d) \Rightarrow ac < bd.$
2. $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n.$

Corolario *Para todo* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *y* $n \in \mathbb{N}$

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$x - 5 \leq \sqrt{x^2 - 2}.$$

Solución: La restricción de la inecuación es

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2} \vee x \leq -\sqrt{2}\} \\ &=]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[. \end{aligned}$$

Ahora debemos analizar los casos $x - 5 \geq 0 \wedge x - 5 < 0$, esto es

1. Supongamos $x - 5 \leq 0$ y $x \in \mathcal{R}$, es decir

   $$x \in \mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap]-\infty, 5] =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 5]$$

   como $x - 5 \leq 0$ y $0 \leq \sqrt{x^2 - 2}$, para $x \in \mathcal{R}_1$ la desigualdad $x - 5 \leq \sqrt{x^2 - 2}$ se satisface. Luego la solución en este caso está dada por

   $$\mathcal{S}_1 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 5].$$

2. Supongamos ahora $x - 5 \geq 0$ y $x \in \mathcal{R}$, es decir

$$x \in \mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap [5, \infty[= [5, \infty[$$

ahora bien como $x - 5 \geq 0$ y $\sqrt{x^2 - 2} \geq 0$ para $x \in \mathcal{R}_2$, podemos elevar al cuadrado la desigualdad

$$\begin{aligned} x - 5 &\leq \sqrt{x^2 - 2} \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 &\leq x^2 - 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &\geq \frac{27}{10} \end{aligned}$$

luego la solución en este caso está dada por

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{R}_2 \cap \left[\frac{27}{10}, \infty\right[= [5, \infty[.$$

Tenemos entonces que la solución de la inecuación es

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[.$$

Ejemplo *Resolver la inecuación*

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} \leq 1$$

Propiedad *Dado el polinomio $ax^2 + bx + c$, tenemos que:*

1. *Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ y $a > 0$, entonces*
$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. *Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ y $a < 0$, entonces*
$$ax^2 + bx + c < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo *Resolver las siguientes inecuaciones*

1. $x^2 + 2x + 7 > 0$

2. $2x^2 + 2x + 3 < 0$

3. $-x^2 + 2x - 4 > 0$

4. $-x^2 - 3x - 5 < 0$

Ejemplo *Resolver la inecuación*

$$\frac{2x-1}{x+1}+\frac{x}{x-1}\leq 2$$

Ejemplo *Resolver la inecuación*

$$\frac{\sqrt{2}\cdot x}{x+1}<-\frac{1}{x}$$

PROPIEDADES Para $x, y \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se tiene que:

1. $|x| \geq 0$, y la igualdad se satisface si y solo si $x = 0$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
3. $|-x| = |x|$.
4. $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$.
5. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$. (Desigualdad Triangular)
6. $|x| \geq c \iff x \leq -c \vee x \geq c$.

Ejemplo *Resolver la inecuación*

$$|x| < -2$$

Considere la observación anterior, luego el conjunto solución es $\mathcal{S} = \emptyset$.
Pero si consideramos la inecuación

$$|x| > -2$$

tenemos que la solución es $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

Ejemplo *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$|x+2| \geq 3.$$

Teorema **(Desigualdad Triangular)** *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Demostración: Tenemos por Proposición que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

luego sumando

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Corolario *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *entonces* $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Ejemplo *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$|x - \sqrt{2}| \;\leq\; \sqrt{x^2 - 3}.$$

Ejemplo *Determinar el conjunto solución de la inecuación*

$$\frac{(x^2 - 2x - 3)\sqrt{4 - |x - 2|}}{(x - 1)(x^2 - x + 2)} \;\geq\; 0.$$

Ejercicio *Resolver las siguientes inecuaciones*

1. $\dfrac{x}{x+1} \leq 1$ $\qquad$ $Rp.\ ]-1,\infty[$

2. $(3x+1)(x+2) > 0$ $\qquad$ $Rp.\ ]-\infty,-2[\cup]-1/3,\infty[$

3. $(x+1)(x+2) < (x+1)(4x-7)$ $\qquad$ $Rp.\ ]-\infty,-1[\cup]3,\infty[$

4. $\dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{x}{x-1} < 2$ $\qquad$ $Rp.\ ]-1,1[$

5. $\dfrac{x^2(x^2+1)(x+2)}{(x-1)(x^2+3)} \geq 0$ $\qquad$ $Rp.\ ]-\infty,-2]\cup\{0\}\cup]-1,\infty[$

6. $\sqrt{3x+1} < 2$ $\qquad$ $Rp.\ [1/3,5/3[$

7. $\sqrt{2x+5} \leq 3-x$ $\qquad$ $Rp.\ [-5/2,4-\sqrt{12}[$

8. $\sqrt{x-3} \geq 7-2x$ $\qquad$ $Rp.\ [13/4,\infty[.$

9. $\sqrt{\sqrt{2+1}-1} < \sqrt{x}$ $\qquad$ $Rp.\ ]0,\infty[.$

Ejercicio *Resolver las siguientes inecuaciones*

10. $|5x-7| > 2-x$ $\qquad$ *Rp.* $]-\infty, 5/4[\cup]3/2, \infty[$

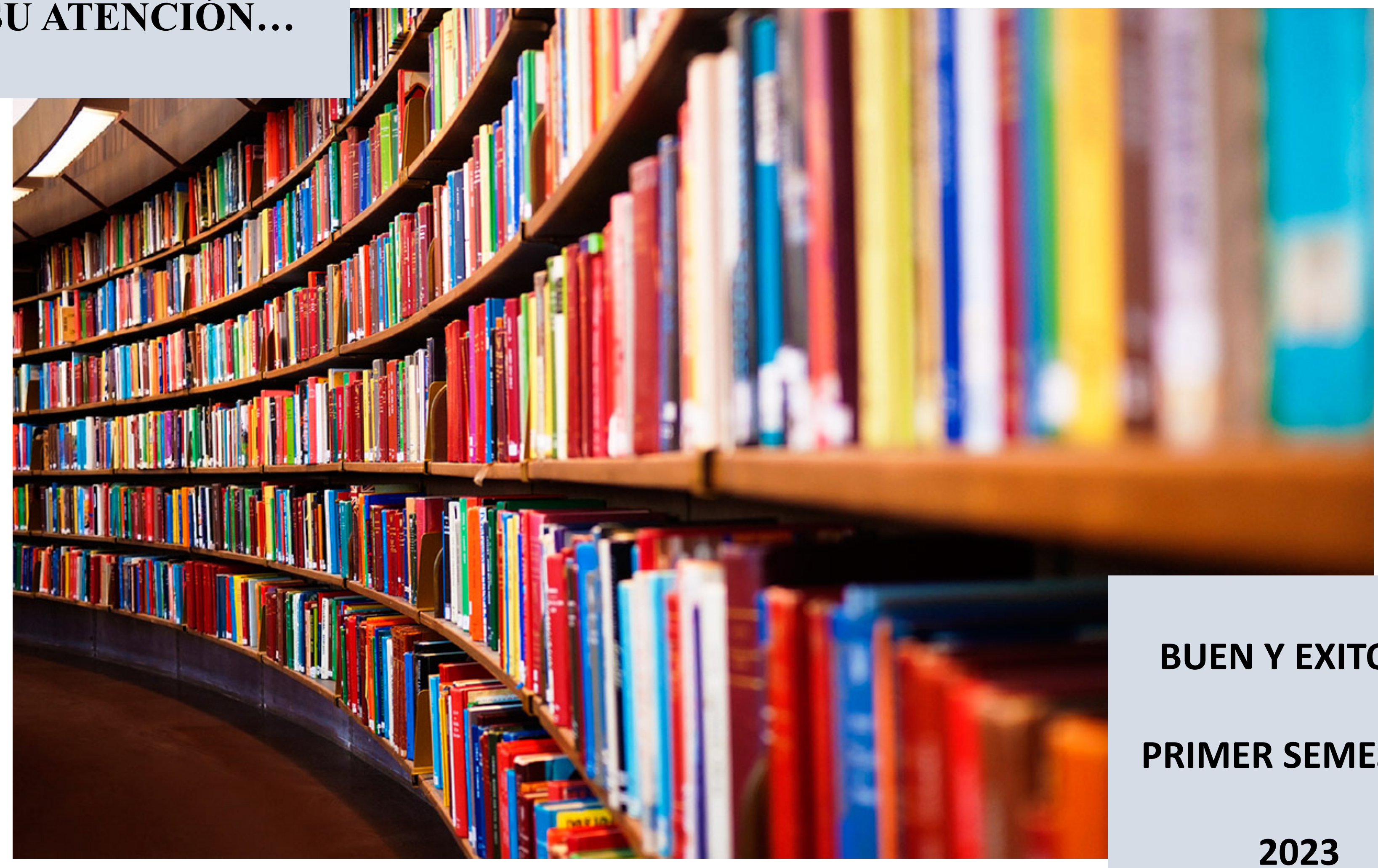
11. $|3x-5| > x+2$ $\qquad$ *Rp.* $[3/4, 7/2]$

12. $|2x-1| - |x-2| < 3x-7$ $\qquad$ *Rp.* $]4, \infty[$

13. $||2x-1| - x| < 3x-5$ $\qquad$ *Rp.* $]2, \infty[$

14. $\sqrt{2x+1} < |x| + 3$ $\qquad$ *Rp.* $]-1/2, \infty[$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



BUEN Y EXITOSO

PRIMER SEMESTRE

2023