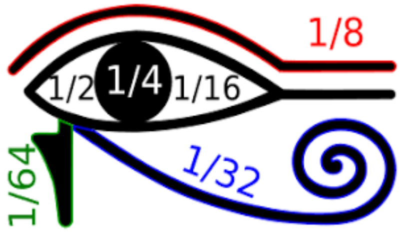
FACULTAD
CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Universidad de Playa Ancha



Números Reales 8

LOGARITMO Y EXPONENCIAL

CPM 1411

2023

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1.- Capítulo Números Reales. Apuntes de Cálculo. USM. Gruenberg, V.(2016).

2.- Capítulo Números Reales. Matemática para ingeniería Arancibia S.,Mena J. (2015).

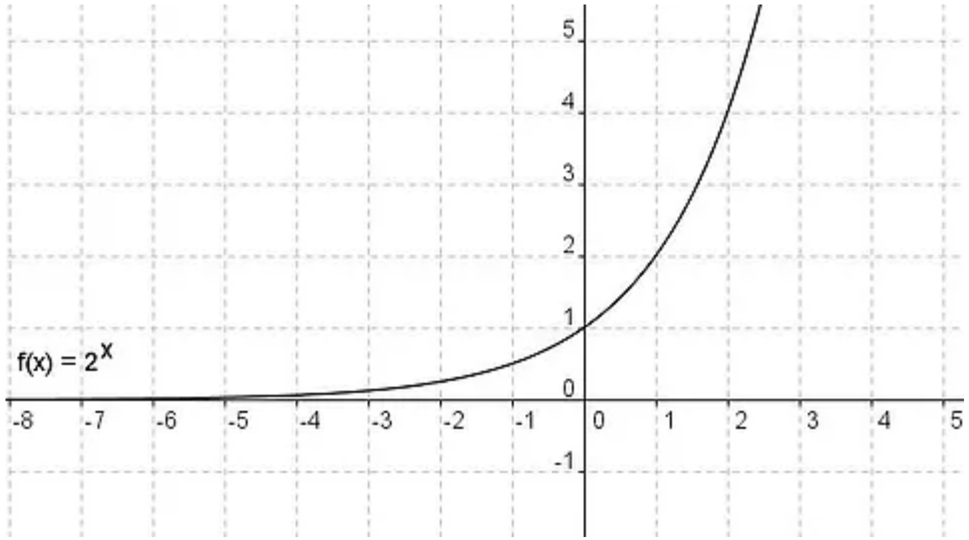
3.-Capítulo 8 la función exponencial y logaritmo. Álgebra e Introducción al Cálculo PUC Irene F. Mikenberg

Función exponencial

DEFINICIÓN

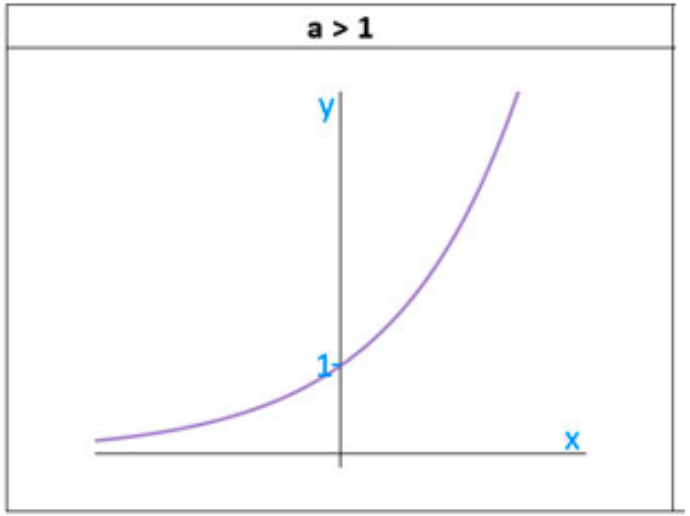
Sea $a > 0,\ a \neq 1$. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto f(x) = a^x$ se llama *función exponencial de base* a.

OBSERVACIÓN: Puede observar que $\quad a^x = \sup\{a^r : \ r \leq x,\ r \in \mathbb{Q}\}\quad$ lo que permite definir la función exponencial para cualquier número real.



PROPIEDADES La función exponencial satisface las siguientes:

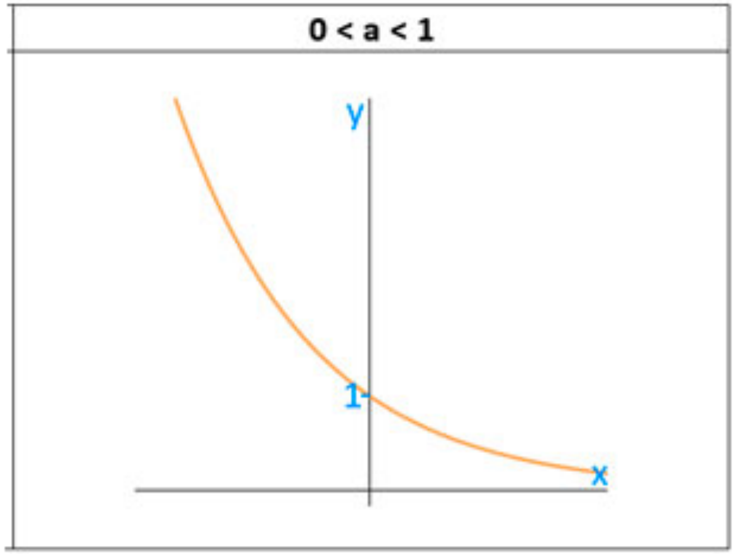
Si $f(x) = a^x,\ a > 1$:



1. $f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = 1$
3. $f(1) = a$
4. f es biyectiva.
5. f es creciente en todo su dominio.
6. Si $x \to \infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$.
7. Si $x \to -\infty$ entonces a^x tiende a 0.

PROPIEDADES La función exponencial satisface las siguientes:

Si $g(x) = a^x,\ 0 < a < 1$:



1. $g(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $g(0) = 1$
3. $g(1) = a$
4. g es biyectiva
5. g es decreciente en todo su dominio.
6. Si $x \to \infty$ entonces a^x tiende a 0.
7. Si $x \to -\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$.

PROPIEDADES Las funciones arriba definidas satisfacen las siguientes:

Función exponencial de base a

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $a^{\log_a x} = x$

Ejemplos:

$$2^{x+2} = 16$$

solución

$$2^{x+2} = 2^4 = 16$$

$$x + 2 = 4 \quad \rightarrow x = 2.$$

$$3^{2x+2} + 3^{x+2} = 4$$

solución

$$(3^x)^2 \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^2 = 4$$

cambio de variable

$$3^x = t \quad \rightarrow \quad (3^x)^2 = t^2$$

$$9t^2 + 9t - 4 = 0$$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-4)}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm 15}{18} = \begin{cases} 1/3 \\ -4/3 \end{cases}$$

$$t = 1/3, \quad \rightarrow \quad 3^x = 1/3, \quad \rightarrow \quad x = -1$$

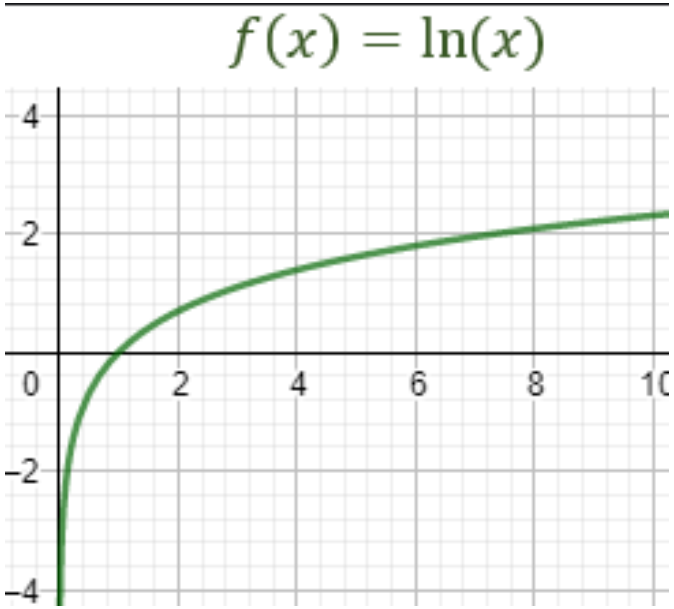
$$t = -4/3 \quad \rightarrow \quad 3^x = \cancel{-4/3}$$

Función Logaritmo

Definición

Sea $a > 0$, con $a \neq 1$. La función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \log_a(x)$ se llama *función logaritmo en base a* y es la función inversa de a^x, es decir,

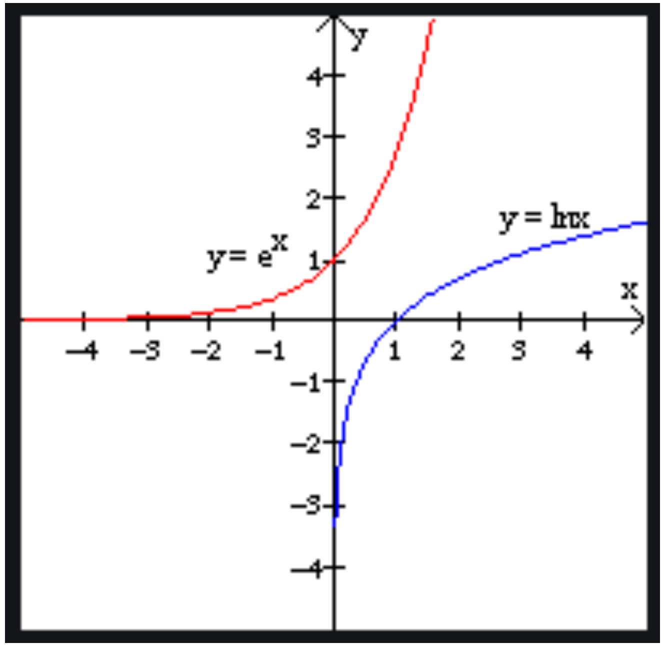
$$y = a^x \iff \log_a y = x$$



PROPIEDADES La función logaritmo satisface las siguientes propiedades:

Si $f(x) = \log_a x,\ a > 1$, entonces

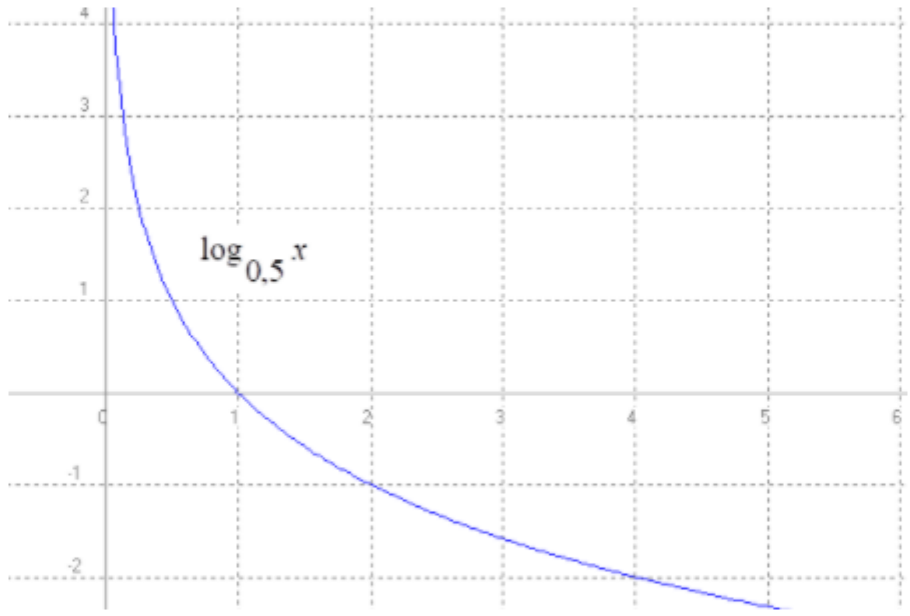
1. $\log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$.
2. $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$.
3. f es biyectiva.
4. f es creciente en todo su dominio.
5. Si x se acerca $+\infty$ entonces $\log_a x \to +\infty$.
6. Si x se acerca a 0 desde valores positivos, entonces $\log_a x \to -\infty$.



PROPIEDADES La función logaritmo satisface las siguientes propiedades:

Si $g(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$, entonces

1. $\log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$.
2. $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$.
3. g es biyectiva.
4. g es decreciente en todo su dominio.
5. Si x se acerca a $+\infty$ entonces $\log_a x \to -\infty$.
6. Si x se acerca a 0 desde valores positivos, entonces $\log_a x \to +\infty$.



PROPIEDADES Función logaritmo de base a

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^y = y \log_a x$
4. $\log_a a^x = x$
5. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Ejemplo:

$$\log_5 x + \log_5 30 = 3$$

$$\log_5 x + \log_5 30 = 3 \rightarrow$$
$$\log_5 30x = 3 \rightarrow$$
$$\log_5 30x = \log_5 125 \rightarrow$$
$$30x = 125 \rightarrow$$
$$x = \frac{125}{30} = \frac{25}{6}$$

Bases 10 y e

Las bases más usuales son $a = 10$ y $a = e$, donde e es el número de Euler que, veremos más adelante, satisface la relación $2 < e < 3$. Los logaritmos en estas bases se llaman y denotan de la siguiente manera:

Logaritmo decimal $(a = 10)$: $\quad y = \log_{10} x = \log x$

Logaritmo natural $(a = e)$: $\quad y = \log_e x = \ln x$

EJEMPLOS:

1. Resolver en $\mathbb{R}$ las ecuaciones:

   a) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Solución:

a) Pasamos los términos a base 2:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 16} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 x = 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7$$

$$\therefore \quad \frac{7}{4}\log_2 x = 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_2 x = 4 \qquad \therefore \quad x = 16$$

b) $\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$

Solución:

$$b)\ \log_2(9^{x-1}+7) - \log_2(3^{x-1}+1) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2\left(\frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1}\right) = \log_2 4$$

$$\therefore \quad 9^{x-1}+7 = 4(3^{x-1}+1) \quad \Longleftrightarrow \quad 3^{2(x-1)} - 4\cdot 3^{x-1} + 3 = 0$$

Sea $u = 3^{x-1}$. Entonces, la ecuación puede escribirse en la forma:

$$u^2 - 4u + 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (u-3)(u-1) = 0$$

$$u = 3 \quad \Rightarrow \quad 3^{x-1} = 3 \quad x = 2 \qquad \vee \qquad u = 1 \quad \Rightarrow \quad 3^{x-1} = 1 \quad x = 1$$

Resuelva en $\mathbb{R}$:

a) $\log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x \geq 1$

Solución:

a) Restricción: $x > 0$. Aplicamos exponencial en base $\frac{1}{3}$:

$$x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x \leq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \left]0, \frac{1}{3}\right]$$

b) $e^{\ln x} < 0$

Solución:

b) Restricción: $x > 0$. Pero, $e^{\ln x} = x$. Luego, la inecuación queda:

$x < 0$, lo que contradice la restricción, de donde $S = \emptyset$.

c) $\log_4 \left(\frac{1}{8}\right)^x = 5$

Solución:

c) Como $\left(\frac{1}{8}\right)^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, no hay restricciones. Aplicamos exponencial en base 4:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x = 4^5 \quad \Rightarrow \quad (2^{-3})^x = (2^2)^5 \quad \Rightarrow \quad 2^{-3x} = 2^{10}$$

Aplicando $\log_2$: $-3x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{10}{3}$.

Resuelva en $\mathbb{R}$:

d) $\log_7 \sqrt{x} + 4 = \log_7 x$

Solución:

d) Restricción: $x > 0.$ Rescribiendo la ecuación:

$$\log_7 \sqrt{x} + \log_7 7^4 = \log_7 x \quad \Rightarrow \quad \log_7(7^4\sqrt{x}) = \log_7 x \quad \Rightarrow \quad 7^4\sqrt{x} = x$$

$$\therefore \quad \sqrt{x}(\sqrt{x} - 7^4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 0 \quad \vee \quad \sqrt{x} = 7^4$$

Como $x > 0:$ $\sqrt{x} = 7^4$ $x = 7^8$

Resolver las siguientes ecuaciones, aplicando las propiedades:

a) $\ln[(x+3)(x+5)] = \ln 15$

b) $\ln(x^2 - 3x + 2) = \ln(x^2 - 5x + 5)$

c) $9 \cdot 3^{2x} - 15 \cdot 3^x - 6 = 0$

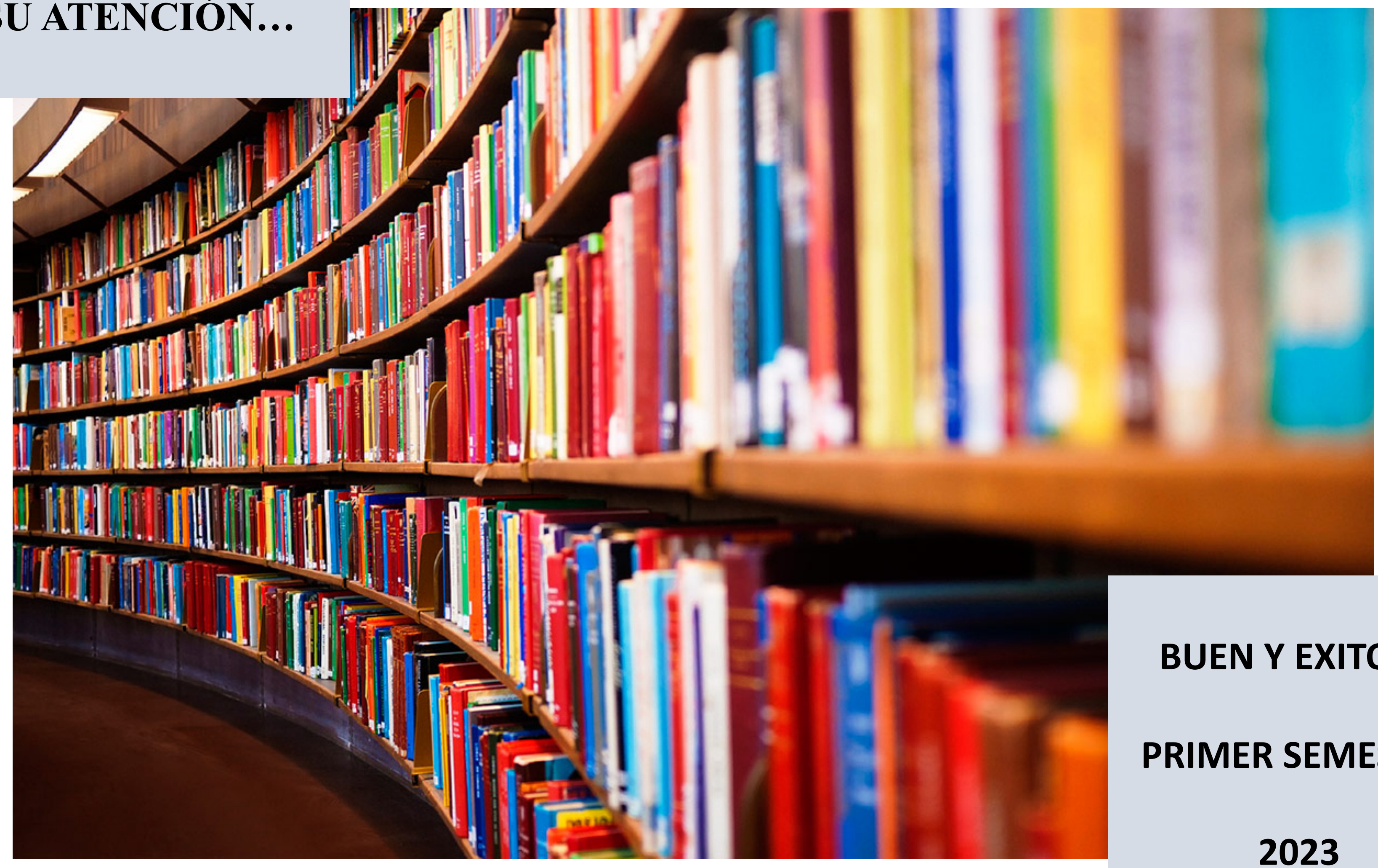
Verifique que $\log_{12} 2 + \log_{12} 6 = 1$

Resuelva *a)* $\log_{1/3}(\log_3(x+2)) > 0$ *b)* $\log_5\left(\log_{1/2}(x+5)\right) > 0$

Resuelva $-1 < \log_3 x^2 < 2$

Resuelva $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 960.$

…GRACIAS POR SU ATENCIÓN…



BUEN Y EXITOSO

PRIMER SEMESTRE

2023