

Números Reales
POLINOMIOS II
CPM1411

2023



Material extraído de Apuntes de Complementos de Cálculo. USM.
Gruenberg, V.(2013).

La división sintética es un método que permite dividir un polinomio de la forma $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ por otro polinomio de la forma $q(x) = x - c$. Este método consiste en la construcción de la siguiente tabla:

que se “rellena”

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
c				$\dots$	$\dots$	
	a_n			$\dots$		

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
c		$c a_n$	$c b_{n-2}$	$\dots$	$\dots$	$c b_0$
	a_n	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	r

donde los números $b_0, b_1, \dots, b_{n-2}$ y r vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 b_{n-2} &= a_{n-1} + c a_n \\
 b_{n-3} &= a_{n-2} + c b_{n-2} \\
 &\vdots \\
 b_0 &= a_1 + c b_1 \\
 r &= a_0 + c b_0
 \end{aligned}$$

EJEMPLO :

1. Dividir $(3x^3 - 4x + 2)$ por $(x + 3)$, indicando cuál es el cuociente y el resto.

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & & -9 & 27 & -69 \\ \hline & 3 & -9 & 23 & -67 \end{array}$$

Luego el cuociente es $q(x) = 3x^2 - 9x + 23$ y el resto es $r(x) = -67$. Notar que

$$3x^3 - 4x + 2 = (3x^2 - 9x + 23)(x + 3) + (-67)$$

Teorema del Resto

Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $a \in \mathbb{K}$. El resto de dividir el polinomio $p(x)$ por $d(x) = x - a$ es $p(a)$.

Dem.: Debemos probar que $p(x) = (x - a)q(x) + p(a)$.

Por el algoritmo de la división: $p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$, con $gr(r) < gr(x - a) = 1$.

$\therefore gr(r) = 0 \vee r(x) = 0$. Luego, $r(x) = cte$. Evaluando p en a : $p(a) = r(a) = r(x)$.

Luego: $p(x) = (x - a)q(x) + p(a)$.

EJEMPLO :

Sea $p(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$. Hallar $p(-3)$.

Solución: Es posible evaluar directamente, pero es tedioso. Al hacer la división sintética, se obtiene resto igual a -2 . Luego, $p(-3) = -2$.

Teorema del Factor

Un polinomio $p(x)$ es divisible por $d(x) = x - a$ si y sólo si $p(a) = 0$.

Dem:

$$\Rightarrow p(x) \text{ es divisible por } x - a \Rightarrow r(x) = 0 \Rightarrow p(x) = (x - a)q(x) \therefore a \text{ es raíz de } p(x).$$

$$\Leftarrow \text{ Si } a \text{ es raíz de } p(x) : \Rightarrow p(x) = (x - a)q(x) \therefore p(x) \text{ es divisible por } x - a.$$

EJEMPLO

Sea $p(x) = x^5 - 10x^3 + 7x + 6$. ¿Es $x - 3$ un factor de $p(x)$?

Solución: Al dividir $p(x)$ por $x - 3$, obtenemos resto = 0, de donde $x - 3$ es un factor de $p(x)$.

EJERCICIOS:

1. ¿Cual es el resto de dividir $x^{100} - x + 2$ por $x^2 - 1$?

2. Sea $p(x) = x^4 + bx^3 - 13x^2 - 14x + 24$.

a) Determinar $b \in \mathbb{R}$ de modo que -2 sea raíz de $p(x)$.

b) Determinar las otras raíces del polinomio encontrado en a).

3. En cada una de las siguientes ecuaciones compruebe, por división sintética, que el valor indicado para x_0 es raíz de la ecuación, y determine las otras raíces reales, si es que existen.

a) $4x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0$, $x_0 = 1$.

b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_0 = -2$.

c) $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = 0$, $x_0 = 2$.

TEOREMA

Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, y $p(a) \cdot p(b) < 0$ entonces existe una raíz real de p entre a y b .

EJEMPLO

$p(x) = x^4 + 3x^2 - x - 5$ tiene un cero entre 1 y 2, pues $p(1) < 0$ y $p(2) > 0$.

TEOREMA

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_n > 0$, $a_i \in \mathbb{R}$. Si $p(x)$ se divide por $x - r$ usando

división sintética, entonces:

Si $r \geq 0$ y todos los números de la última fila (del cuociente y del resto) son ≥ 0 , entonces **todos** los ceros α de $p(x)$ satisfacen: $\alpha \leq r$.

Si $r \leq 0$ y todos los números de la última fila (del cuociente y del resto) se **alternan** en signo, pudiendo considerarse $+0$ o -0 , entonces **todos** los ceros α de $p(x)$ satisfacen: $\alpha \geq r$.

EJEMPLO

Encontrar cotas superiores e inferiores en $\mathbb{Z}$ para las raíces del polinomio

$$p(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 8.$$

DEFINICIÓN Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, escrito de manera ordenada en orden decreciente por grado. Se dice que hay una *variación de signo* si dos términos consecutivos tienen signo opuesto.

EJEMPLO

Considere $p(x) = 5x^8 + 7x^6 - 5x^4 + 2x^3 - 3x - 1$. Entonces:

$p(x)$ tiene variación de signo = 3.

TEOREMA de los signos de Descartes

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

- i) El número de ceros en $\mathbb{R}^+$ contados cada uno según su multiplicidad es igual a la variación de signo de $p(x)$ o menor que ésta en un número par.
- ii) El número de ceros en $\mathbb{R}^-$ contados cada uno según su multiplicidad es igual a la variación de signo de $p(-x)$ o menor que ésta en un número par.

EJEMPLOS: Determine el número posible de raíces reales de los siguientes:

1. $p(x) = 5x^8 + 7x^6 - 5x^4 + 2x^3 - 3x - 1.$

Las variaciones de signo de $p(x)$ y de $p(-x)$ son ambas iguales a 3.
este polinomio de grado 8 tiene:

- 3 ó 1 raíz en $\mathbb{R}^+$
- 3 ó 1 raíz en $\mathbb{R}^-$

Así, *sabemos* que posee al menos 2 raíces en $\mathbb{R}$, y a lo más 6 raíces en $\mathbb{R}$. Su factorización tiene al menos un factor irreducible de grado 2.

2. $p(x) = 4x^5 + 2x^4 - x^3 + x - 5$

3. $p(x) = x^3 - 2x - 6$

TEOREMA Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Si $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ es raíz de $p(x)$, donde c y d no tienen divisores en común, entonces

$$c \text{ divide a } a_0 \quad \text{y} \quad d \text{ divide a } a_n$$

EJEMPLO

Hallar todas las raíces reales de $p(x) = 8x^4 + 30x^3 + 29x^2 - 2x - 30$.

Solución:

- Hay una raíz entre 0 y 1. Como $\text{var}(p(x)) = 1$, hay exactamente una raíz en $\mathbb{R}^+$, que es ésta.
- Hay una raíz entre -3 y -2 .
- Las posibles raíces racionales son: $\pm\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$. Se debe probar, con la información disponible.

DEFINICIÓN

Si $p \in K[x]$ y $gr(p) \geq 2$ se dice que p es **reducible** (o reductible) en $K[x]$ si es divisible en $K[x]$, es decir, existen $q, h \in K[x]$, con $gr(q) \geq 1$, $gr(h) \geq 1$, tales que $p(x) = q(x)h(x)$. En caso contrario se dice que p es **irreducible** o primo en $K[x]$.

EJEMPLOS:

1. $p(x) = x^2 + 1$ es reducible en $\mathbb{C}[x]$ y es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$.
2. Los polinomios de grado 1, $p(x) = a_0 + a_1x$, son irreducibles o primos en $K[x]$.
3. El polinomio $x^4 + 3x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ se puede factorizar como $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$. Vemos que no tiene raíces en $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}$, pero es reducible tanto en $\mathbb{Q}$ como en $\mathbb{R}$.

TEOREMA de Factorización Única

Todo $p(x)$ reducible sobre K puede escribirse como producto en la forma

$$p(x) = ap_1(x) p_2(x) \cdots p_i(x), \quad 1 \leq i \leq \text{gr}(p(x))$$

donde a es el coeficiente principal de $p(x)$, $p_j(x)$ ($j = 1, \dots, i$) son irreducibles sobre K y cada uno de ellos tiene coeficiente principal igual a 1. Una factorización de este tipo es única, salvo el orden de los factores.

Polinomios

Descomposición en Fracciones Parciales

DEFINICIÓN Se dice que una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una **fracción propia**, si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. En caso contrario, es decir, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual al de $Q(x)$, la fracción se llama **impropia**.

Toda fracción impropia se puede expresar, efectuando la división, como la suma de un polinomio mas una fracción propia. Es decir,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N_1(x)}{Q(x)} \quad \text{donde} \quad M(x) \quad \text{es un polinomio}$$

Polinomios

Descomposición en Fracciones Parciales

TEOREMA

(Descomposición en fracciones parciales) Cualquier fracción propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer en la suma de fracciones parciales del siguiente modo:

- Si $Q(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax + b$, no repetido, entonces la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene un término de la forma $\frac{A}{ax + b}$, $A = \text{cte.}$
- Si $Q(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax + b$, repetido k veces, entonces la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma $\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$, $A_i = \text{cte.}, \forall i = 1, \dots, k.$
- Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma $ax^2 + bx + c$, no repetido, entonces la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene un término de la forma $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$, $A, B = \text{ctes.}$
- Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma $ax^2 + bx + c$, repetido k veces, entonces la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ contiene términos de la forma $\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$, $A_i, B_i = \text{ctes.}, \forall i = 1, \dots, k.$

Polinomios

Descomposición en Fracciones Parciales

Caso 1 El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.

Esto significa que podemos escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

en donde no hay factor que se repita. En este caso, existen constantes $A_1, \dots, A_k$ tal que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Polinomios

Descomposición en Fracciones Parciales

EJEMPLO

Descomponer en fracciones parciales $f(x) = \frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4}$

Solución El denominador de la función racional se puede descomponer en factores lineales en la forma:

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

Luego la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \frac{7x + 3}{(x + 4)(x - 1)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 1}$$

Para encontrar los valores de A y B , multiplicamos la igualdad por $(x + 4)(x - 1)$, obteniendo

$$7x + 3 = A(x - 1) + B(x + 4)$$

Desarrollando se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & 7 \\ -A + 4B & = & 3 \end{array} \Rightarrow A = 5, B = 2$$

Luego, la función original queda:

$$\frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \frac{5}{x + 4} + \frac{2}{x - 1}$$

Polinomios

Descomposición en Fracciones Parciales

Caso 2 El denominador $Q(x)$ es producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces, de la forma $(a_1x + b_1)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(a_1x + b_1)^k}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_k$ son constantes.

Polinomios

Descomposición en Fracciones Parciales

EJEMPLO : Descomponer en fracciones parciales

$$f(x) = \frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x-4)^2}$$

Solución La descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-4)} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por el denominador común

$$5x^2 - 36x + 48 = A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx$$

se obtiene el sistema:

$$\begin{array}{r|l} A + B & = 5 \\ -8A - 4B + C & = -36 \\ 16A & = 48 \end{array} \quad \text{de donde} \quad A = 3, B = 2, C = -4$$

Luego:

$$\frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x-4)^2} = \frac{3}{x} + \frac{2}{(x-4)} - \frac{4}{(x-4)^2}$$

Caso 3 El denominador $Q(x)$ es producto de factores cuadráticos irreducibles distintos.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático no repetido de la forma $ax^2 + bx + c$, en donde, $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A y B son constantes.

EJEMPLO : Descomponer en fracciones parciales: $f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6}$

Tenemos que

$$\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} = \frac{4x^2 - 8x + 1}{(x + 2)(x^2 - 2x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 3}$$

Multiplicando por el común denominador:

$$4x^2 - 8x + 1 = A(x^2 - 2x + 3) + (Bx + C)(x + 2)$$

obtenemos el sistema

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & 4 \\ -2A + 2B + C & = & -8 \\ 3A + 2C & = & 1 \end{array} \quad \text{de donde} \quad A = 3, \quad B = 1, \quad C = -4$$

Por lo tanto,

$$\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} = \frac{3}{x + 2} + \frac{x - 4}{x^2 - 2x + 3}$$

Caso 4 El denominador $Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible repetido.

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático repetido k veces de la forma $(ax^2+bx+c)^k$, donde $b^2-4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_k$ y $B_1, B_2, \dots, B_k$ son constantes.

EJEMPLO

Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}$$

Solución La forma de descomponer esta división de polinomios en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, y luego igualando coeficientes, se obtiene el siguiente sistema

$$A + B = 0, \quad C = -1, \quad 2A + B + D = 2, \quad C + E = -1, \quad A = 1$$

cuya solución es (**Ejercicio**):

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -1, \quad D = 1 \quad \text{y} \quad E = 0$$

Entonces

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

Descomponer en fracciones parciales

$$\textcircled{1} \quad f_1(x) = \frac{5x + 7}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\textcircled{2} \quad f_2(x) = \frac{x^2 + 11x + 15}{(x - 1)(x + 2)^2}$$

$$\textcircled{3} \quad f_3(x) = \frac{7x^2 - 11x + 6}{(x - 1)(2x^2 - 3x + 2)}$$

$$\textcircled{4} \quad f_4(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 7x - 2}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

GRACIAS POR SU ATENCIÓN