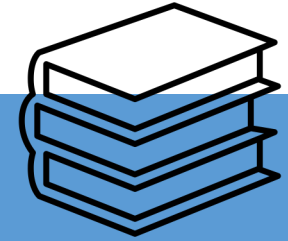


Números Reales
POLINOMIOS
CPM1411

2023



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS



1.- Capítulo Números Reales. Apuntes de Cálculo. USM. Gruenberg, V.(2016).

2.-

DEFINICIÓN Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo (en nuestro caso, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

Un **polinomio** de grado n sobre $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

en donde $a_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \dots, n$.

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 8$$

Polinomios

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 8$$

Los números a_i serán llamados como los **coeficientes** del polinomio. En particular, el coeficiente a_n será llamado el *coeficiente principal* del polinomio, y el coeficiente a_0 se llama *término constante*.

El **grado** de un polinomio es el exponente más grande en la variable x .
se denota por $gr(p(x)) = gr(p) = n$.

Si $a_i = 0 \quad \forall i \geq 1$, $p(x)$ es el polinomio constante y $gr(p) = 0$. Por convención, se dice que el polinomio *nulo*, $p(x) = 0$, **no** tiene grado.

Denotaremos por $\mathbb{K}[x]$ al conjunto de **todos** los polinomios en la variable x , cuyos coeficientes están en $\mathbb{K}$. En particular, $\mathbb{R}[x]$ es el conjunto de todos los polinomios en la variable x , cuyos coeficientes están en $\mathbb{R}$.

Polinomios

DEFINICIÓN Sean $p, q \in \mathbb{K}[x]$ con $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$. Diremos que ellos son iguales, " $p(x) = q(x)$ ", si:

1. Tienen el mismo grado, es decir: $gr(p) = gr(q)$, o equivalentemente, $m = n$.
2. Tienen los mismos coeficientes, es decir: $a_i = b_i \quad \forall i = 0, \dots, n$.

Ejemplo:

Sean $p(x) = \sum_{k=0}^3 k^2 x^k$, $q(x) = (5 + a)x^4 - 3bx^3 + (2 + c)x^2 + x$. Determine a, b, c de modo que $p(x) = q(x)$.

DEFINICIÓN Sean $p, q \in \mathbb{K}[x]$ con $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ con $m \geq n$, y sea

$\alpha \in \mathbb{K}$. Se definen las siguientes operaciones:

Adición

$$\begin{aligned}(p + q)(x) &= p(x) + q(x) \\ &= (a_0 + \dots + a_n x^n) + (b_0 + \dots + b_m x^m) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_m x^m\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 7 \\ q(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 + 5 \end{array} \right\} p(x) + q(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 7x^2 + x - 2$$

Polinomios

Multiplicación

$$\begin{aligned}(p \cdot q)(x) &= p(x) \cdot q(x) \\&= (a_0 + \dots + a_n x^n) \cdot (b_0 + \dots + b_m x^m) \\&= (a_0 \cdot b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \dots + a_n b_m x^{n+m}\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 2x^6 + 3x^4 + x^2 - 6 \\ q(x) = x^3 + x \end{array} \right\} \begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= [2x^6 + 3x^4 + x^2 - 6] \cdot [x^3 + x] \\ &= [2x^9 + 3x^7 + x^5 - 6x^3] + [2x^7 + 3x^5 + x^3 - 6x] \\ &= 2x^9 + 5x^7 + 4x^5 - 5x^3 - 6x \end{aligned}$$

Producto por escalar

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot p)(x) &= \alpha \cdot (a_0 + \dots + a_n x^n) \\ &= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_n x^n\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$r(x) = -2x^2 + 5x - 3,$$

$$4 \cdot r(x) = 4 \cdot (-2x^2 + 5x - 3) = -8x^2 + 20x - 12$$

TEOREMA En $\mathbb{K}[x]$ dotado de la adición, que escribimos $(\mathbb{K}[x], +)$, se cumplen las siguientes:

1. Si $p, q \in \mathbb{K}[x]$ entonces $(p + q) \in \mathbb{K}[x]$. **(Clausura)**
2. $\forall p, q, r \in \mathbb{K}[x]: p(x) + (q(x) + r(x)) = (p(x) + q(x)) + r(x)$. **(Asociatividad)**
3. $\forall p, q \in \mathbb{K}[x]: p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$. **(Conmutatividad)**
4. $\exists e \in \mathbb{K}[x]: p(x) + e(x) = p(x) \quad \forall p \in \mathbb{K}[x]$. Además, $e(x) = 0$ **(Existencia del neutro aditivo)**
5. $\exists q \in \mathbb{K}[x]: p(x) + q(x) = e(x) \quad \forall p \in \mathbb{K}[x]$, donde $q(x) = -p(x)$. **(Existencia del inverso aditivo)**

TEOREMA En $\mathbb{K}[x]$ dotado de la suma y la multiplicación, se cumplen las siguientes:

1. Si $p, q \in \mathbb{K}[x]$ entonces $(p \cdot q) \in \mathbb{K}[x]$. **(Clausura)**
2. $\forall p, q, r \in \mathbb{K}[x] : p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x)) = (p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x)$. **(Asociatividad)**
3. $\forall p, q \in \mathbb{K}[x] : p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$. **(Conmutatividad)**
4. $\exists e \in \mathbb{K}[x]$ de modo que $p(x) \cdot e(x) = p(x) \quad \forall p \in \mathbb{K}[x]$. Además: $e(x) = 1$. **(Existencia del neutro multiplicativo)**
5. Si $p, q, r \in \mathbb{K}[x]$ entonces $p(x) (q(x) + r(x)) = p(x)q(x) + p(x)r(x)$. **(Distributividad)**

OBSERVACIÓN: Si $p(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 1, entonces no existe su **inverso multiplicativo**. Basta considerar $p(x) = x$. Su inverso debe ser un polinomio $q(x)$ tal que $p(x) \cdot q(x) = 1$, es decir, $x \cdot q(x) = 1$, de donde $q(x) = 1/x = 1 \cdot x^{-1}$, luego $q \notin \mathbb{K}[x]$. Solo existen los inversos para los polinomios constantes no nulos, siempre que $\mathbb{K}$ sea un cuerpo.

Considere los polinomios

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 3, \quad q(x) = 3x^2 + 6x - 2 \in \mathbb{R}[x], \quad \text{con}$$

$$p(x) \cdot q(x) = r(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i, \quad p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^m d_i x^i$$

Determine n, m, d_2 y c_4 .

Dado el polinomio $p(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}$, calcule $p(p(1))$.

Raíces

DEFINICIÓN Sean $p \in \mathbb{K}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{K}$. Se dice que x_0 es una **raíz (o cero)** de $p(x)$ si $p(x_0) = 0$. Se dirá que x_0 es una raíz de **multiplicidad** k ($k \leq n$) si existe un polinomio $h(x)$ tal que $p(x) = (x - x_0)^k \cdot h(x)$, con $h(x_0) \neq 0$.

Ejemplo:

Sea $p(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$.

Si $p \in \mathbb{R}[x]$, se tiene que $x_0 = 1$ es una raíz de multiplicidad 2 (aquí $h(x) = (x + 2)(x^2 + 1)$), por otra parte $x_1 = -2$ es una raíz de multiplicidad 1 (aquí $h(x) = (x - 1)^2(x^2 + 1)$).

OBSERVACIÓN: Sean $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ una raíz de $p(x)$. Si se gráfica $p(x)$ como función de x , es decir, $y = p(x)$, se tendrá que $(x_0, 0)$ corresponde al punto en donde la gráfica de $p(x)$ intersecta al eje x .

DEFINICIÓN Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Diremos que $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado si todo polinomio de grado mayor o igual que 1 tiene al menos una raíz en $\mathbb{K}$.

Notar que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se tiene que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ no es algebraicamente cerrado: basta considerar en $\mathbb{R}[x]$ el polinomio $p(x) = x^2 + 1$. Este es un polinomio de grado 2 sin raíces en $\mathbb{R}$.

TEOREMA

(Teorema Fundamental del Álgebra)

$\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.

OBSERVACIÓN: Una formulación equivalente del teorema anterior es, *todo polinomio de grado mayor o igual a 1 tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.*

PROPOSICIÓN

Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ de modo que $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(x)$, entonces $\bar{z} \in \mathbb{C}$ también es una raíz de $p(x)$.

EJERCICIO :

1. Encuentre el polinomio en $\mathbb{R}[x]$ de grado más pequeño que tenga entre sus raíces a $1 - i$, $3 + 2i$, 5 .
2. Encuentre las raíces del polinomio $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ si sabe que $2 + 3i$ es una raíz del polinomio.

Algoritmo de la División (o de Euclides)

PROPOSICIÓN Dados $p(x), d(x) \in \mathbb{K}[x]$, existen $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x), \text{ en donde } \text{gr}(r) < \text{gr}(d) \text{ o } r(x) = 0.$$

EJEMPLO

Sean $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ y $d(x) = x^2 + x + 1$. Encuentre la división de $p(x)$ con $d(x)$ indicando cual es el cuociente y el resto.

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^2 + 2x - 1 : x^2 + x + 1 = x^2 - x - 3 \\ -(x^4 + x^3 + x^2) \\ \hline -x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \\ -(x^3 + x^2 + x) \\ \hline -3x^2 + 3x + 1 \\ -(-3x^2 - 3x - 3) \\ \hline 6x + 4 \end{array}$$

De aquí se obtiene que el cuociente viene dado por $q(x) = x^2 - x - 3$ y su resto por $r(x) = 6x + 4$.

Notar que $x^4 - 3x^2 + 2x - 1 = (x^2 - x - 3)(x^2 + x + 1) + (6x + 4)$.

DEFINICIÓN Dados $p, d \in \mathbb{K}[x]$ se dice que $d(x)$ divide a $p(x)$ si $r(x) = 0$. Es decir, existe $q \in \mathbb{K}[x]$ de modo que $p(x) = d(x)q(x)$. Esto será denotado por $d(x) \mid p(x)$.

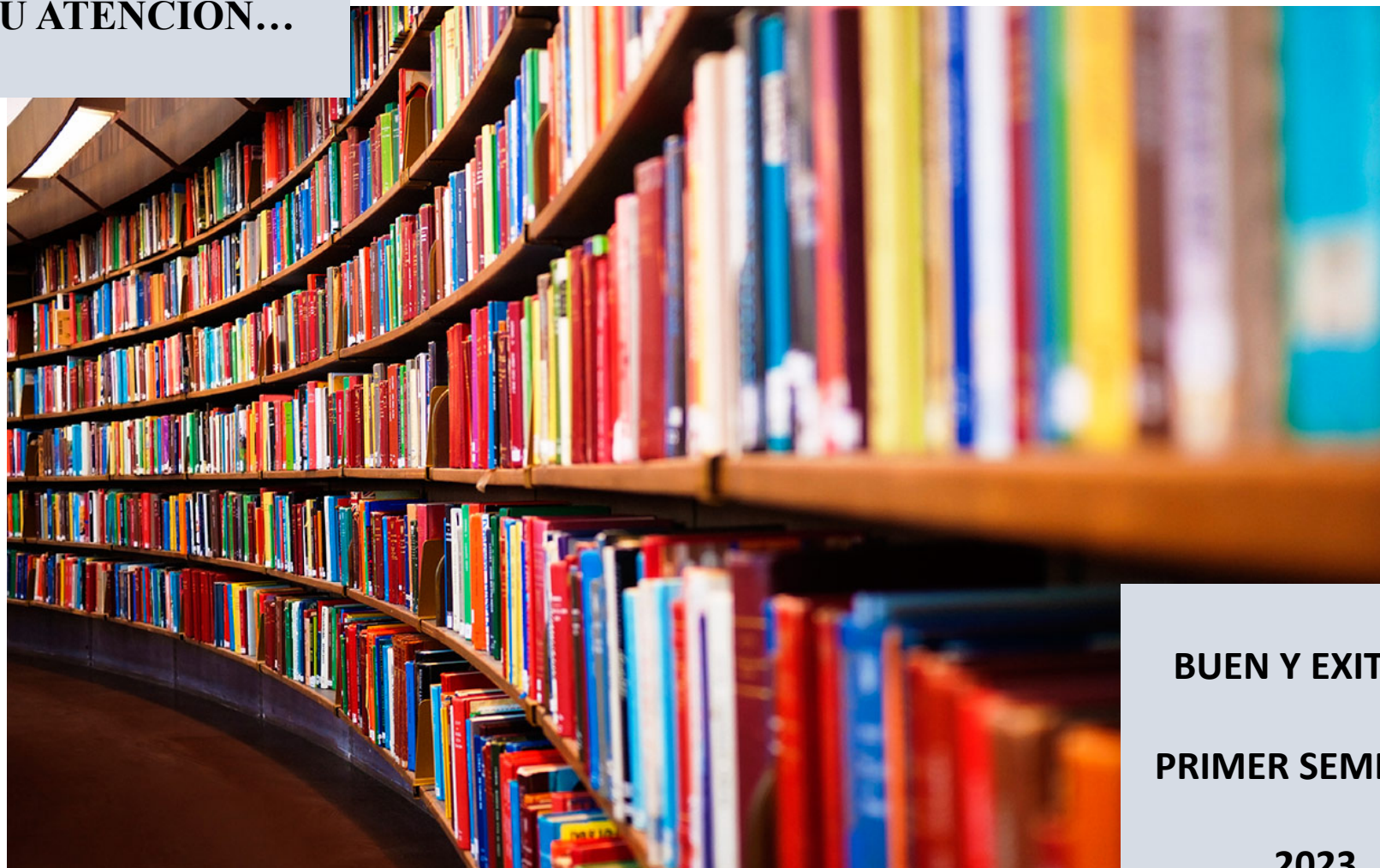
Ejercicios:

Sean $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ y $q(x) = x^2 + x + 1$. Calcule $p(x)$ dividido por $q(x)$, indicando el cociente y el resto.

Considere el polinomio $p(x) = (k - 3)x^3 - 3(k - 1)x^2 + 8kx - 6k$.

- a) Demuestre que $x = 1$ es una raíz de $p(x)$.*
- b) Encuentre los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que todas las raíces de $p(x)$ sean reales.*

...GRACIAS POR SU ATENCIÓN...



**BUEN Y EXITOSO
PRIMER SEMESTRE
2023**