Familia de Distribuciones

Dr. Cristian Carvajal Muquillaza

Universidad de Playa Ancha
Facultad De Ciencias Naturales y Exáctas
Departamento de Matemática, Física y Computación

Contenido

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Distribuciones discretas

Distribución Bernoulli

La **Distribución Bernoulli** es una distribución de probabilidad que toma el valor 1 con probabilidad p (éxito) y el valor 0 con probabilidad $q = 1 - p$ (fracaso).

Tabla de la Distribución Bernoulli

	Éxito	Fracaso
X	1	0
$f(x) = P(X = x)$	p	$1 - p$

Obs: $(1 - p) = q$

Distribuciones discretas

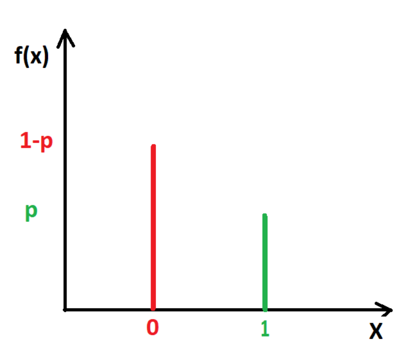
Definición (Distribución Bernoulli)

Sea X una v.a discreta, con ***Distribución Bernoulli*** (p), *lo que denotaremos como* "$X \sim \text{Ber(p)}$", *entonces su función de masa se define*

$$f_X(x|p) = P(X = x|p) = p^x (1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1 \quad 0 \leq p \leq 1$$

Distribuciones discretas

Representación Gráfica Distribución Bernoulli



Distribuciones discretas

Distribución Bernoulli

Si $X \sim$ Ber(p) , entonces:

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = p$$

Varianza

$$Var(X) = p(1-p)$$

f.g.m

$$M_X(t) = (1-p) + pe^t$$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas | DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Distribuciones discretas

Ejemplo:

Se lanza un dado octaédrico, y se define:
$X = 1$ si en el dado sale un número divisor de 14.
$X = 0$ en cualquier otro caso:

1. ¿Cuál es la distribución de X?
2. Determine la Esperanza y Varianza de X
3. Grafique la distribución de X

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Distribuciones discretas

Distribución Binomial

- Suponga un experimento aleatorio en el que el resultado es la ocurrencia o la no ocurrencia de un evento, en donde se llamará **éxito** a la ocurrencia del evento y **fracaso** a la no ocurrencia (Ensayo Bernoulli).
- Sea p la probabilidad de éxito cada vez que el experimento se lleva a cabo y $1 - p$ la probabilidad del fracaso.
- El experimento se lleva a cabo n veces, y cada una de éstos es **independiente** de todos los demás.
- X = Número de éxitos en los n ensayos, por lo que $x = 0, 1, \ldots, n$.

Distribuciones discretas

Definición (Distribución Binomial)

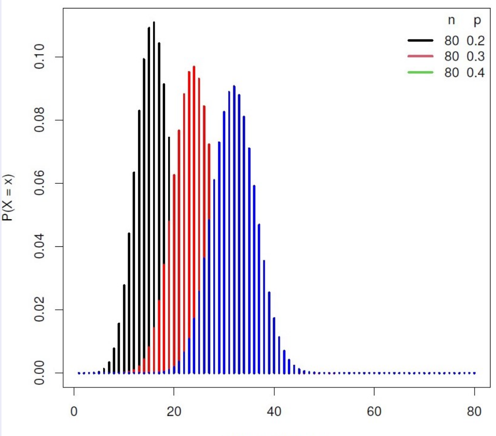
Si la variable aleatoria X *tiene una* ***Distribución Binomial*** (n, p), *lo que denotaremos* "$X \sim \mathrm{Bin(n, p)}$", *entonces su función de masa se define como*

$$P\left(X = x|n, p\right) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad 0 \leq p \leq 1$$

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Distribuciones discretas

Representación Gráfica Distribución Binomial



Distribuciones discretas

Distribución Binomial

Si $X \sim \text{Bin(n, p)}$, entonces:

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = np$$

Varianza

$$Var(X) = np(1-p)$$

f.g.m

$$M_X(t) = \left[pe^t + (1-p)\right]^n$$

Distribuciones discretas

Ejemplo:

Suponga que un examen contiene 15 preguntas del tipo Verdadero o Falso. El examen se aprueba contestando correctamente por lo menos nueve preguntas. Si se lanza una moneda para decidir el valor de verdad de cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

Distribuciones discretas

Definición (Distribución Uniforme Discreta)

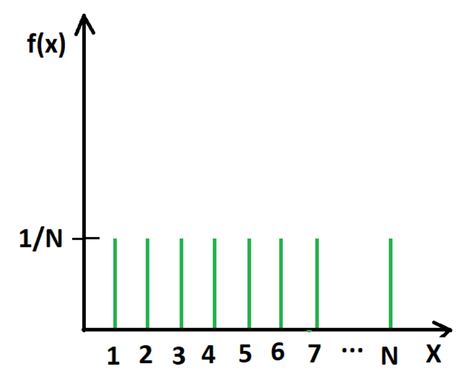
*Sea X una v.a discreta, diremos que X tiene una **Distribución Uniforme Discreta** $(1, N)$, lo que se denota "$X \sim U(1, N)$" si*

$$P(X = x|N) = \frac{1}{N}, \qquad\qquad x = 1, 2, ..., N$$

donde N es un valor entero especificado.
Esta distribución le asigna la misma probabilidad a cada uno de las resultados $1, 2, 3, ..., N$

Distribuciones discretas

Representación Gráfica Distribución Uniforme Discreta



Distribuciones discretas

Distribución Uniforme Discreta

Si $X \sim U(1, N)$, entonces:

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{(N-1)(N+1)}{12}$$

f.g.m

$$M_X(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{it}$$

Distribuciones discretas

Ejemplo:

Se numeran 10 fichas del 1 al 10 y se colocan en una urna. Se saca una ficha de la urna al azar.

1. Encuentre la función de masa de la variable aleatoria
2. Grafique la función de masa de la variable aleatoria
3. Encuentre el valor esperado y la varianza.
4. Calcule la probabilidad de que el número de la ficha sacado esté entre 7 y 10.

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Distribuciones discretas

Distribución Hipergeométrica

- Supongamos que se dispone de una población finita de tamaño N, que está dividida en dos grupos:
- **Éxitos**, con M elementos.
- **Fracaso** con $N - M$ elementos.
- X = "Número de éxitos obtenidos al extraer al azar y sin reposición K objetos de esta población"

Distribuciones discretas

Definición (Distribución Hipergeométrica)

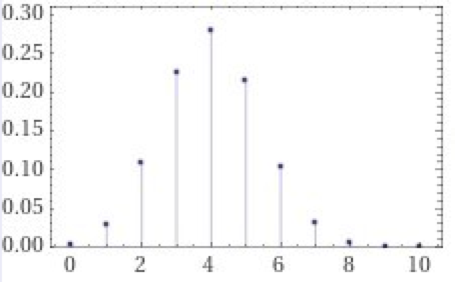
Sea X una v.a discreta, diremos que X tiene una ***Distribución Hipergeométrica*** (N, M, K)*, lo que se denota "*$X \sim Hip(N, M, K)$*" si*

$$P(X = x | N, M, K) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{K-x}}{\binom{N}{K}}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, K$$

Con $M \geq x \quad y \quad N - M \geq K - x$

Distribuciones discretas

Representación Gráfica Distribución Hipergeométrica



Distribuciones discretas

Distribución Hipergeométrica

Si $X \sim Hip(N, M, K)$, entonces:

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{KM}{N}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{KM}{N}\left(\frac{(N-M)(N-K)}{N(N-1)}\right)$$

f.g.m

$$M_X(t) = \nexists$$

Distribuciones discretas

Ejemplo:

Existen dos vacantes en el Departamento de Matemática de la UPLA. En un llamado a concurso se presentan cinco postulantes: tres tienen experiencia en modelos lineales y dos en probabilidad aplicada. El comité de búsqueda se encarga de elegir tres miembros en forma aleatoria.

1. Encuentre la función de masa de la variable aleatoria
2. ¿Cuál es la probabilidad de que dos tengan experiencia en modelos lineales?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más dos tengan experiencia en modelos lineales?
4. ¿Cuál es el valor esperado de postulantes, en la muestra, que tienen experiencia en modelos lineales?

Distribuciones discretas

Distribución Poisson

- La distribución de Poisson es una distribución discreta ampliamente aplicada y puede servir como modelo para varios tipos de experimentos diferentes.
- Por ejemplo, si estamos modelando un fenómeno en el que estamos esperando una ocurrencia, como esperar un autobús, esperar a que los clientes lleguen a un banco
- La distribución de Poisson tiene un solo parámetro λ, a veces llamado parámetro de intensidad.
- X = Número de ocurrencias en un intervalo de tiempo dado.

Distribuciones discretas

Definición (Distribución Poisson)

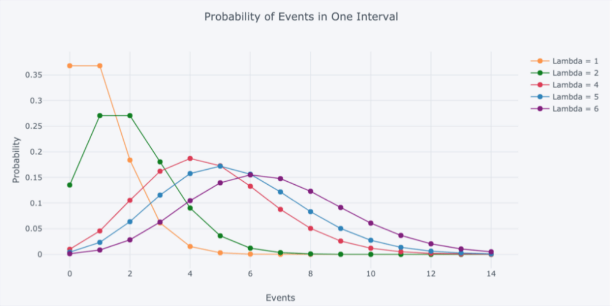
Sea X una v.a discreta, diremos que X tiene una ***Distribución Poisson*** *(λ), lo que se denota "$X \sim Pois(\lambda)$" si*

$$P(X = x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots; \quad 0 \leq \lambda < \infty$$

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Distribuciones discretas

Representación Gráfica Distribución Poisson



Facultad de Ciencias Naturales y Exactas | DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Distribuciones discretas

Distribución Poisson

Si $X \sim Pois(\lambda)$, entonces:

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

Varianza

$$Var(X) = \lambda$$

f.g.m

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Distribuciones discretas

Ejemplo:

Se estima que un operador telefónico recibe en promedio 5 llamadas telefónicas en 3 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de no recibir una llamada en el próximo minuto?

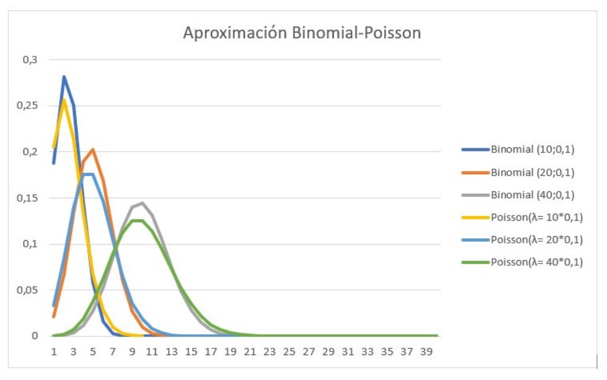
Distribuciones discretas

Aproximación Binomial-Poisson

La distribución binomial converge a la distribución de Poisson cuando el parámetro n tiende a infinito y el parámetro p tiende a cero, de manera que $n \times p$ es constante. De ocurrir esto la distribución binomial tiende a un modelo de Poisson de parámetro $\lambda = np$

Distribuciones discretas

Gáfico Aproximación Binomial-Poisson



Distribuciones discretas

Ejemplo:Aproximación Binomial-Poisson

Un tipógrafo, en promedio, comete un error en cada 500 palabras. Una página típica contiene 300 palabras. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya más de dos errores en cinco páginas?

Respuesta

Si asumimos que escribir una palabra es un ensayo Bernoulli con probabilidad de éxito $p = \dfrac{1}{500}$ (observe que estamos etiquetando un error como un "éxito") y que las pruebas son independientes, entonces:
X = Número de errores en cinco páginas (1500 palabras), luego

$$X \sim B\left(1500; \frac{1}{500}\right)$$

Distribuciones Continuas

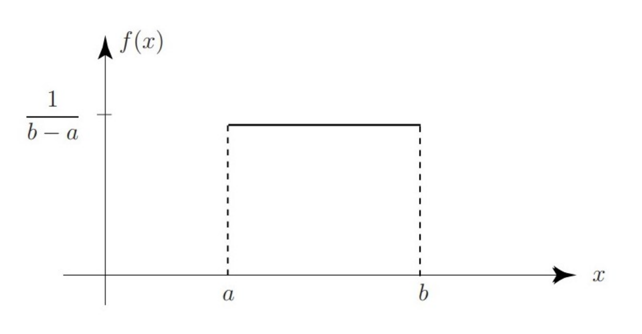
Definición (Distribución Uniforme)

Sea X una v.a continua, diremos que X tiene una ***Distribución Uniforme*** (a, b)*, lo que se denota "$X \sim U(a,b)$" si*

$$f(X|a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ \\ 0 & si \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

Distribuciones Continuas

Definición (Gráfico Distribución Uniforme)



Distribuciones Continuas

Distribución Uniforme

Si $X \sim U(a, b)$, entonces:

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

f.g.m

$$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

Distribuciones Continuas

Ejemplo:

El tiempo entre trenes en *efe-Valparaíso* es de 12 minutos. Por lo tanto el tiempo de espera de un pasajero que llega al azar a una estación del tren *efe-Valparaíso* se distribuye uniformemente entre 0 y 12 minutos

1. Encuentre la probabilidad de que una persona que llega al azar a la estación del tren tenga un tiempo de espera de al menos 5 minutos.
2. Encuentre el percentil 80 de los tiempos de espera para las personas que llegan al azar a la estación del tren.
3. Encuentre la media y la desviación estándar.

Distribuciones Continuas

Distribución Exponencial

- La distribución exponencial es una de las distribuciones continuas más utilizadas.
- Se utiliza frecuentemente para modelar el tiempo transcurrido entre eventos.

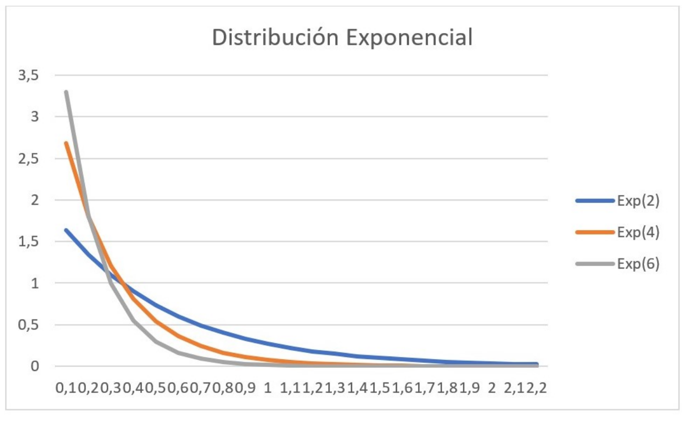
Definición (Distribución Exponencial)

Sea X una v.a continua, diremos que X tiene una ***Distribución Exponencial*** *θ, lo que se denota "$X \sim Exp(\theta)$" si*

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}; x > 0, \theta > 0$$

Distribuciones Continuas

Gráfico Distribución Exponencial



Distribuciones Continuas

Distribución Exponencial

Si $X \sim Exp(\theta)$, entonces:

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

f.g.m

$$M_X(t) = \frac{\theta}{(\theta - t)}$$

Distribuciones Continuas

Ejemplo:

El tiempo utilizado para revizar el motor de un automovil una distribución exponencial con media 22 minutos.

1. Determine la probabilidad de que el tiempo de revisión sea menor a 10 minutos.
2. El costo de revisión es de US$200 dolares fijo al que se le suma US$10 dolares por el tiempo que dure la revisión. Encontrar la media y la varianza del costo.

Distribuciones Continuas

Distribución Normal

- La distribución normal juega un rol central en la teoría de probabilidades,
- La distribución Normal es muy manejable analíticamente,
- La distribución Normal tiene forma de campana, cuya simetría la convierte en una opción atractiva para muchos modelos de población,
- A partir del Teorema del Límite Central, que muestra que, en condiciones moderadas, la distribución normal se puede utilizar para aproximar una gran variedad de distribuciones en muestras grandes.

Distribuciones Continuas

Definición (Distribución Normal)

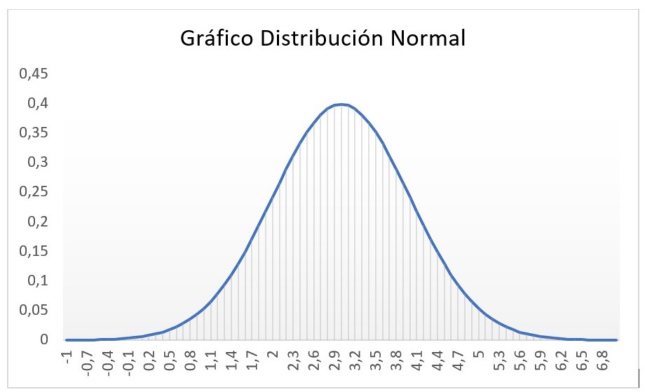
Sea X una v.a continua, diremos que X tiene una ***Distribución Normal*** (μ, σ^2)*, lo que se denota "$X \sim N(\mu, \sigma^2)$" si*

$$f\left(x|\mu,\sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\dfrac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Donde μ es un parámetro de forma y σ^2 es un parámetro de escala

Distribuciones Continuas

Gráfico Distribución Normal



Distribuciones Continuas

Distribución Normal

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces:

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

Varianza

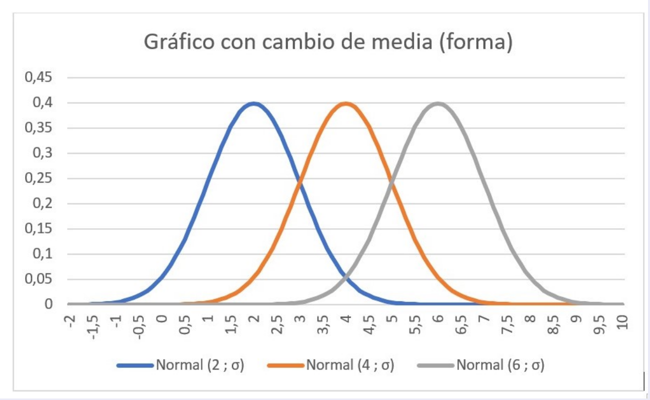
$$Var(X) = \sigma^2$$

f.g.m

$$M_X(t) = e^{ut + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

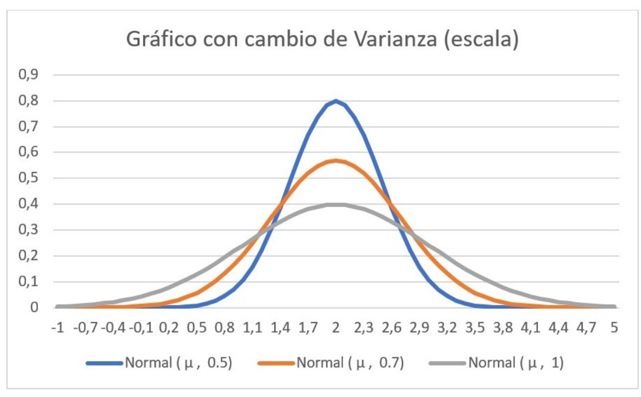
Distribuciones Continuas

Gráfico Distribución Normal (parámetro de forma)



Distribuciones Continuas

Gráfico Distribución Normal (parámetro de escala)



Distribuciones Continuas

Transformacion de la Distribución Normal

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, y tenemos la transformación $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, entonces $Z \sim N(0,1)$. Donde Z es conocida como "**Normal Estándar**"

Distribuciones Continuas

Ejemplo 1:

Se sabe que los huevos que pone una gallina en particular tienen longitudes normalmente distribuidas, con una media de 6 cm y una desviación estándar de 1,4 cm.

- ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un huevo de más de 8 cm de longitud?
- ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un huevo de menos de 5 cm de longitud?

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Distribuciones Continuas

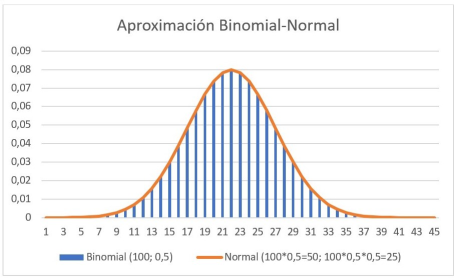
Ejemplo 2:

Una máquina produce pernos cuyas dimensiones en mm se distribuyen $N(4; 0{,}09)$. Los pernos se miden con precisión y se rechazan los que tienen menos de 3,5 mm o más de 4,4 mm. De un lote de 500 pernos, ¿cuántos serían aceptados?

Distribuciones Continuas

Aproximación Binomial - Normal

Si "$X \sim Bin(n, p)$" y $n > 10$, $n \times p > 5$ y $n \times q > 5$, entonces una aproximación bastante buena es suponer que la variable X se aproxima a una variable normal, con parámetros $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$, es decir "$X \approx N(np, npq)$".



Distribuciones Continuas

Ejemplo: Aproximación Binomial-Normal

Una máquina produce componentes electrónicos, se sabe que el 10 % de estos componentes salen defectuosos. Se elige al azar una muestra de 50 componentes. Calcular las probabilidades de que:

1. De la muestra a lo más 6 componentes estén defectuosos,
2. De la muestra, 3 o más componentes esten defectuosos.

Ejercicios Propuestos de Distribuciones

Ejercicio 1

Con base en encuestas al consumidor se sabe que la preferencia de éste con respecto a dos marcas de automoviles, AUDI y BMW, se encuentra muy pareja. Si la opción de compra entre estas marcas es independiente, ¿ cuál es la probabilidad de que entre 25 personas seleccionada al azar, no más de cinco tengan preferencia por la marca Audi?

Ejercicios Propuestos de Distribuciones

Ejercicio 2

Para un volumen fijo, el número de células sanguíneas rojas es una variable aleatoria que se presenta con una frecuencia constante. Si el número promedio para un volumen dado es de nueve células para personas normales, determinar la probabilidad de que el número de células sanguíneas rojas para una persona se encuentre dentro de una desviación estándar del promedio.

Ejercicios Propuestos de Distribuciones

Ejercicio 3

Suponga que en la intersección de la calles Pedro Montt con Rodriguez, ocurre de manera aleatoria e independiente dos accidentes vehiculares por semana. Determine la probabilidad de que ocurran 3 accidentes vehiculares en la próxima semana.

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Ejercicios Propuestos de Distribuciones

Ejercicio 4

Una fábrica produce pistones cuyos diámetros se distribuyen normal con un diámetro promedio de 5 cm y una desviación estándar de 0,001 cm. Para que un pistón sirva, su diametro debe encontrarse entre 4,998 y 5,002 cm. Si el diámetro del pistón es menor que 4,998 se desecha; si el diámetro del pistón es mayor que 5,002 se puede reprocesar.¿qué porcentaje de pistones servirán, se rechazarán y se reprocesaran?

Ejercicios Propuestos de Distribuciones

Ejercicio 5

Suponga que la concentración de cierto contaminante se encuentra distribuida de manera uniforme en el intervalo de 4 a 20 ppm (partes por millón). Si se considera como tóxica una concentración de 15 ppm o más, ¿Cuál es la probabilidad de que al tomarse una muestra la concentración de esta sea tóxica?

Ejercicios Propuestos de Distribuciones

Ejercicio 6

Suponga que el tiempo entre llamadas a un negocio de personal de mantenimiento se distribuye exponencialmente con un tiempo medio entre llamadas de 15 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llamada llegue entre 5 y 8 minutos después de la apertura?

Distribuciones Continuas

Definición (Distribución Beta)

Sea X una v.a continua, diremos que X tiene una ***Distribución Beta*** *(α, β), lo que se denota "$X \sim Beta(\alpha, \beta)$" si y solo si*

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 \leq x \leq 1; \quad \alpha > 0; \beta > 0$$

Donde $B(\alpha, \beta)$ es la ***función Beta*** *definida:*

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas | DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Distribuciones Continuas

Distribución Beta

Si $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, entonces:

Esperanza

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

f.g.m

$$M_X(t) =$$