Probabilidad

Dr. Cristian Carvajal Muquillaza

Universidad de Playa Ancha

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Contenido

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Teoría de Conjuntos

Definición (Espacio Muestral)

*El conjunto, **S** de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio es llamado **Espacio Muestral** del experimento*

Ejemplo:

Si el experimento consiste en tirar al aire una moneda, entonces el *espacio Muestral* contiene dos posibles resultados, **cara** y **sello**

$$\S = \{c, s\}\,.$$

Podemos clasificar el Espacio Muestral en dos tipos, de acuerdo al número de elementos que poseen, en *Contable* y *No Contable*.

Teoría de Conjuntos

Definición (Espacio Muestral Contable)

*Sea **S** un espacio Muestral, entonces diremos que **S** es un Espacio Muestral Contable si se puede realizar una relación biunívoca (1-1) con algún subconjunto de los números entero,en caso contrario será No Contable .*

Observación

Todo Espacio Muestral finito es contable.

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Teoría de Conjuntos

Definición (Evento o Suceso)

Un ***Evento o Suceso A*** *es un subconjunto de un Espacio Muestral, es decir:*

$$A \subseteq S$$

Teoría de Conjuntos

Operaciones de Eventos

Dado dos eventos o conjuntos A y B, se pueden definir las siguientes operaciones de conjuntos.

Unión La unión de A y B, descrita como $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o B o a ambos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B.\}$$

Intersección La intersección de A y B, descrita como $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y B al mismo tiempo:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B.\}$$

Teoría de Conjuntos

Operaciones de Eventos

Dado dos eventos o conjuntos A y B, se pueden definir las siguientes operaciones de conjuntos.

Complementación El complemento de A, descrito como A^c, es el conjunto de todos los elementos que NO pertenecen al evento A:

$$A^c = \{x : x \notin A.\}$$

Teoría de Conjuntos

Teorema (Operaciones de Eventos)

Sean A, B y C, tres eventos cualquiera definidos en un espacio muestral S, entonces:

- *Conmutatividad*

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- *Asociatividad*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Teoría de Conjuntos

Teorema (Operaciones de Eventos)

Sean A, B y C, tres eventos cualquiera definidos en un espacio muestral S, entonces:

- *Ley Distributiva*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- *Ley De Morgan*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

AMENTO
NARIO
EMÁTICA
ÍSTICA

Teoría de Conjuntos

Operaciones de Eventos

Las operaciones de unión e intersección pueden ser extendidas por infinitos conjuntos, es decir si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es una colección de conjuntos, todos definidos en un espacio muestral S, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in S : x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in S : x \in A_i, \forall i.\}$$

Teoría de Conjuntos

Ejemplo:

Sea $S = (0, 1]$ y definimos $A_i = \left[\frac{1}{i}, 1\right]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i}, 1\right] \\
&= \left\{x \in (0, 1] : x \in \left[\frac{1}{i}, 1\right] \text{para algún } i\right\} \\
&= \{x \in (0, 1]\} \\
&= (0, 1]
\end{aligned}$$

Teoría de Conjuntos

Ejemplo:

Sea $S = (0, 1]$ y definimos $A_i = \left[\frac{1}{i}, 1\right]$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcap_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i}, 1\right] \\
&= \left\{ x \in (0, 1] : x \in \left[\frac{1}{i}, 1\right] \forall i \right\} \\
&= \{x \in (0, 1] :\in [1, 1]\} \\
&= \{1\} .
\end{aligned}
$$

Teoría de Conjuntos

Definición (Eventos disjuntos)

Dos eventos A y B son disjuntos o mutuamente excluyentes si

$$A \cap B = \phi$$

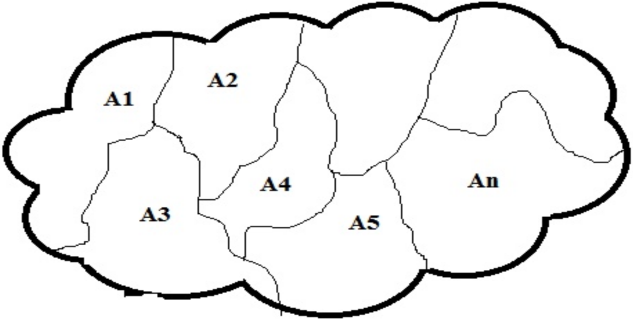
Los eventos $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos de a dos si

$$A_i \cap B_j = \phi \quad \forall i \neq j.$$

Teoría de Conjuntos

Definición (Partición)

Si $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos de a dos y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S$, entonces la colección $A_1, A_2, \ldots$ forma una partición de S.



Teoría de Conjuntos

Ejemplo:

Los conjuntos $A_i = [i, i+1]$ forma una partición de $[0, \infty)$.

Teoría de Probabilidad

Fundamentos Axiomáticos

Para cada evento A en el espacio muestral S deseamos asociar a A un número entre cero y uno, al cual se le denominará probabilidad de A, denotado por $P(A)$.

Parece natural definir el dominio de la función P, como todos los subconjuntos de S; esto es, para cada $A \subseteq S$ definimos $P(A)$ como la probabilidad de que ocurra A.

Teoría de Probabilidad

Definición (σ-Algebra)

Una colección de subconjuntos de S es llamado ***Espacio de Borel*** *o* ***σ-Algebra****, denotado por $\mathcal{B}$, si satisface las siguientes tres condiciones :*

1. $\phi \in \mathcal{B}$.*(el conjunto vacío está contenido en $\mathcal{B}$)*
2. *Si $A \in \mathcal{B}$, entonces $A^c \in \mathcal{B}$.(es cerrado para el complemento)*
3. *Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$, entoces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.(es cerrado para uniones contables)*

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Teoría de Probabilidad

Ejemplo:

Si S es un conjunto finito o contable de n elementos , entonces existen 2^n conjuntos en $\mathcal{B}$. Por ejemplo si $S = \{1, 2, 3\}$, entonces la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es $2^3 = 8$, definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{B} = \{\{1\}\,;\{2\}\,;\{3\}\,;\{1,2\}\,;\{1,3\}\,;\{2,3\}\,;\{1,2,3\}\,;\phi\}\,.$$

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Teoría de Probabilidad

Ejemplo:

Sea $S = (-\infty, \infty)$, entonces $\mathcal{B}$ es elegido tal que contenga a todos los conjuntos de la forma

$$[a, b] \, ; (a, b] \, ; (a, b) \, ; y \;\; [a, b)$$

para todos los números reales **a** y **b**.

Teoría de Probabilidad

Definición (Función de Probabilidad)

Dado un espacio muestral S y un sigma álgebra $\mathcal{B}$ asociado a el , diremos que una ***función de probabilidad*** *es una función P con dominio en $\mathcal{B}$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $P(A) \geq 0; \forall A \in \mathcal{B}$.
2. $P(S) = 1$.
3. *Si* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ *son disjuntos de a pares, entonces* $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Estas tres propiedades son denominadas ***axiomas de Kolmogorov****, uno de los padres de la teoría de probabilidad.*

Teoría de Probabilidad

Ejemplo:

Consideremos el experimento de lanzar una moneda al aire, nuestro espacio muestral S, está definido por

$$S = \{\text{Cara,Sello}\}$$

Si las monedas están balanceadas, es razonable pensar que la función de probabilidad le asignará igual probabilidad a la Cara y al Sello, esto es

$$P\left(\{\text{Cara}\}\right) = P\left(\{\text{Sello}\}\right).$$

Sabemos que

$$S = \{\text{Cara}\} \cup \{\text{Sello}\},$$

Teoría de Probabilidad

Ejemplo:Continuación

además por propiedad (2) se tiene que

$$P\left(\{\text{Cara}\} \cup \{\text{Sello}\}\right) = 1.$$

Como $\{\text{Cara}\}$ y $\{\text{Sello}\}$ son disjuntos entonces se tiene que

$$P\left(\{\text{Cara}\} \cup \{\text{Sello}\}\right) = P\left(\{\text{Cara}\}\right) + P\left(\{\text{Sello}\}\right),$$

entonces

$$P\left(\{\text{Cara}\}\right) + P\left(\{\text{Sello}\}\right) = 1$$

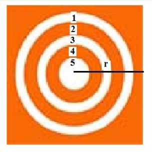
por último

$$P\left(\{\text{Cara}\}\right) = P\left(\{\text{Sello}\}\right) = \frac{1}{2}.$$

Teoría de Probabilidad

Otro Ejemplo:

Supongamos un tablero para el juego «tiro al blanco», cuyo radio es r, y la distancia entre anillos es $\frac{r}{5}$.



Si hacemos el supuesto de que el tablero es siempre golpeado, entonces tenemos:

Teoría de Probabilidad

Ejemplo:Continuación

$$P(\text{obtener } i \text{ punto}) = \frac{\text{Area de la región } i}{\text{Area del tablero}}$$

Por ejemplo

$$P(\text{obtener 1 punto}) = \frac{\pi r^2 - \pi\,(4r/5)^2}{\pi r^2} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

De aquí podemos obtener una fórmula general, a saber:

$$P(\text{obtener } i \text{ punto}) = \frac{(6-i)^2 - (5-i)^2}{5^2} \quad i = 1, \ldots, 5$$

independiente de π y r.

Cálculo de Probabilidad

Propiedades

A partir de los axiomas de probabilidad podemos construir muchas propiedades de la función de probabilidad, propiedades que son muy utilices en el calculo de las probabilidades.
Empezaremos con algunas propiedades evidentes de la función de probabilidad que se aplican a un solo evento.

Cálculo de Probabilidad

Teorema (Propiedades)

Si P es una función de probabilidad y A es cualquier conjunto en $\mathcal{B}$, entonces

1. $P(\phi) = 0$, *donde ϕ es el conjunto vacío;*
2. $P(A) \leq 1$;
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Cálculo de Probabilidad

Teorema

Si P es una función de probabilidad, A y B son cualquier par de conjuntos en $\mathcal{B}$, entonces

1. $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$;
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
3. *Si* $A \subset B$ *entonces* $P(A) \leq P(B)$.

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Cálculo de Probabilidad

Cálculo de Probabilidad:

Sea un espacio de probabilidad y sea **A** un evento de S , entonces si el evento es equiprobable, la probabilidad Laplasciana de **A** está definida por:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

Donde $\#A$ y $\#S$, son la cardinalidad del evento **A** y la cardinalidad del espacio muestral, respectivamente.

Teoría de Probabilidad

Ejemplo:

Se tienen 5 pacientes con obesidad mórbida, de los cuales 3 están siguiendo un tratamiento con la droga A y los otros dos están con la droga B. Se escoge un paciente al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté tomando la droga A?

Técnicas de Conteo

Principio Multiplicativo

Suponga que se realizan dos operaciones, de manera que:

1. La operación 1 tiene m resultados posibles.
2. Para cada uno de los resultados de la operación 1 hay n posibles resultados de la operación 2.

Entonces,

$$n \times m$$

Son todos los posibles resultados de las dos operaciones.

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Técnicas de Conteo

Principio Multiplicativo Generalizado

Suponga que se realizan **r** operaciones, de manera que:

1. La operación 1 tiene n_1 resultados posibles.
2. Para cada uno de los resultados de la operación 1 hay n_2 posibles resultados de la operación 2.
3. Para cada uno de los resultados de la operación 2 hay n_3 posibles resultados de la operación .
4. y así susesivamente para las r operaciones

Entonces, hay en total $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_r$ posibles resultados de las r operaciones.

Técnicas de Conteo

Ejemplo: Principio Multiplicativo Generalizado

Pilar tiene una cita con su pololo, y para ir a la cita tiene 15 faldas distintas, 3 paraes de zapatillas y 4 camisas. **¿De cuantas formas distintas puede combinar su ropa?**

Técnicas de Conteo

Permutación Lineal

Una permutación lineal de un conjunto con términos distintos es el reordenamiento (o un arreglo) de los elementos del conjunto.

Teorema

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos distintos es

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots . \times 1$$

Técnicas de Conteo

Ejemplo: Permutación Lineal

¿De cuantas maneras distintas se pueden sentar 9 personas en las butacas?

Técnicas de Conteo

Permutación Circular

Una permutación circular de un conjunto de elementos distintos, es el reordenamiento circular de los elementos del conjunto.

Teorema

El número de permutaciones circulares de un conjunto de n elementos es

$$P_n^{\oplus} = (n-1)!$$

Técnicas de Conteo

Ejemplo: Permutación Circular

¿De cuantas maneras distintas se pueden sentar 6 personas en la mesa redonda?

Técnicas de Conteo

Permutación con términos repetidos

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos en donde hay $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ términos repetidos, se define:

$$P_n^{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k} = \frac{n!}{r_1 \times r_2 \times r_3 \times \ldots \times r_k}$$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Técnicas de Conteo

Ejemplo: Permutación con términos repetidos

¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra ...?

P	A	R	A	L	E	L	E	P	I	P	E	D	O

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Técnicas de Conteo

Combinaciones de **n** sobre **k**

Para determinar el número de combinaciones de n sobre k, con $k < n$, se debe tener en cuenta si en la combinación importa o no el oden y si es o no con reemplazo, entonces:

	Sin Reemplazo	Con reemplazo
Con orden	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Sin Orden	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Naturales y Exactas | Y ESTADÍSTICA

Técnicas de Conteo

Ejemplo: Combinaciones de **n** sobre **k**

Se tiene 3 fichas numeradas, como en la figura, y se extraen 2 fichas. ¿Cuántos números de dos digitos se pueden formar: Con orden, sin orden, con reemplazo y sin reemplazo?

Probabilidades Especiales

Probabilidad Condicionada

Sea un espacio de probabilidad y sean **A** y **B** eventos en S, tal que $P(B) \neq 0$, entonces la probabilidad condicionada de **A** dado **B**, se denota por $P(A|B)$ y se define:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Obs: $P(A|B) \neq P(B|A)$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Probabilidades Especiales

Probabilidad Condicionada: Propiedades

Sea un espacio de probabilidad y sean A y B eventos de S , tal que $P(B) \neq 0$, entonces $P(A|B)$ cumple las siguientes propiedades:

1. $P(B|S) = P(B)$
2. $P(S|B) = 1$
3. $P(A|B) = 1 - P(A^C|B)$
4. Si $B \subset A \Rightarrow P(A|B) = 1$

Probabilidades Especiales

Ejemplo: Probabilidad Condicionada

Se lanza un dado Octaédrico, determine la probabilidad de obtener un número primo si se sabe que salió un número:

1. Mayor que 3
2. Par
3. Múltiplo de 3
4. Menor que 7

Probabilidades Especiales

Independencia

Sea un espacio de probabilidad y sean **A** y **B** eventos de S, diremos que estos eventos son independientes, si la ocurrencia del evento **A** no afecta la probabilidad de ocurrencia del evento **B** y viceversa; si los eventos no son independientes se dirá que son dependientes.
Formalmente diremos que **A** y **B** son eventos **independientes**, si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Probabilidades Especiales

Teorema (Independencia)

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ *son eventos independientes, entonces los siguientes pares de eventos, también lo son:*

- A y B^C
- A^C y B
- A^C y B^C

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Probabilidades Especiales

Ejemplo: Independencia

Se lanza una moneda y un dado, y se definen los siguientes eventos:

A = Salga cara en la moneda

B = Salga un numero par en el dado

C = Salga un numero primo y sello

Determine si los siguientes pares de eventos son independientes:

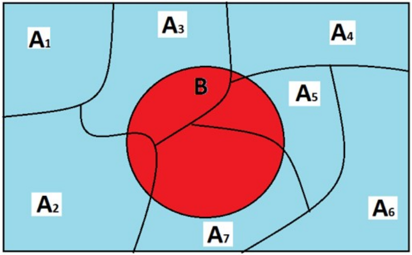
1. A y B
2. A y C
3. B y C

Probabilidades Especiales

Probabilidad Total:

Sea un espacio de probabilidad y sean $A_1, A_2, \ldots$ un conjunto de eventos, que forman una partición de S , y sea **B** otro evento cualquiera, entonces la probabilidad de **B** es:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$



Probabilidades Especiales

Teorema de Bayes:

Sean $A_1, A_2, \ldots$ un conjunto de eventos disjuntos que forman una partición de S , y sea **B** otro evento cualquiera, entonces:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

Probabilidades Especiales

Ejemplo:

Se tienen tres grupos de estudiantes, los α con un 40 % del total de los estudiantes, los β con un 35 % del total y los γ, de los alfas el 35 % son mujeres, de los betas el 48 % son mujeres y de los gammas el 62 % son mujeres. Se escoge un estudiante al azar, determine:

1. La probabilidad de escoger a un hombre.
2. Si la persona escogida es mujer, ¿Cuál es la probabilidad de pertenezca al grupo beta?