Variables Aleatorias

Dr. Cristian Carvajal Muquillaza

Universidad de Playa Ancha

Contenido

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias

Definición (Variable Aleatoria)

Una variable aleatoria es una función con dominio en el espacio muestral y el recorrido es un subconjunto de los números reales. Una variable aleatoria puede ser discreta o continua, dependiendo del soporte de la función.

Ejemplo: Tipo de Variables Aleatorias

Experimento	Variable Aleatoria
Lanzar dos dados	$X = \text{Suma de los números}$
Lanzar una moneda 25 veces	$Y = \text{Número de caras}$
Aplicar distinta cantidad de fertilizante a las plantación de maíz	$Z = \text{Rendimiento/acre}$

Variables Aleatorias

Ejemplo:

Suponga el experimento aleatorio de lanzar tres monedas. Se define la variable aleatoria X el número de caras obtenidas

Espacio Muestral								
s	CCC	CCS	CSC	CSS	SCC	SCS	SSC	SSS
$X(s)$	3	2	2	1	2	1	1	0

El rango de la v.a X es $\chi = \{0, 1, 2, 3\}$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias

Ejemplo:Continuación

Probabilidad				
x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Por ejemplo

$$P(X=1)=P(\{CSS,SCS,SSC\})=\frac{3}{8}$$

Funciones de Variables Aleatorias

Definición (Función de Distribución Acumulada)

Una ***Función de Distribución Acumulada (f.d.a)****, de una variable aleatoria X, denotada $F_X(x)$, es definida por:*

$$F_X(x) = P_X(X \leq x), \quad \forall x$$

Funciones de Variables Aleatorias

Ejemplo: Función de Distribución Acumulada (f.d.a)

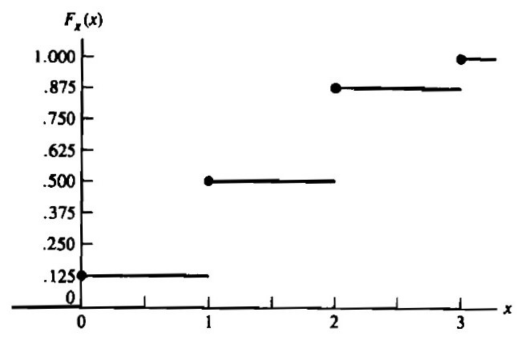
Se lanzan tres monedas, y se define la v.a, $X = \{\text{número de caras}\}$, entonces:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad -\infty < x < 0 \\ 1/8 & \text{Si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{Si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & \text{Si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{Si} \quad 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

AMENTO
NARIO
EMÁTICA
ÍSTICA

Funciones de Variables Aleatorias

Ejemplo: Continuación



Funciones de Variables Aleatorias

Teorema

La función $F_X(x)$, es una función de distribución acumulada (f.d.a), de una variable aleatoria X, si y solo si:

1. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
2. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
3. *$F_X(x)$, es una función No decreciente en X*

Funciones de Variables Aleatorias

Ejemplo:

Determine si $F_X(x)$, es una función de distribución acumulada (f.d.a), si :

$$F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Funciones de Variables Aleatorias

Definición (Variable aleatoria continua y discreta)

Una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ *es continua si* $F_X(x)$ *es una función continua de* x *y una variable aleatoria* $\boldsymbol{X}$ *es discreta si* $F_X(x)$ *es una función de paso de* x.

Definición (Variables aleatorias identicamente distribuidas)

Las variables aleatorias $\boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{Y}$ *son* ***identicamente distribuidas*** *si para cualquier evento* A

$$P(X \in A) = P(Y \in A)$$

Funciones de Variables Aleatorias

Funciones de Masa y Densidad

Asociado a una variable aleatoria **X** y a una función de distribución acumulada (f.d.a) $F_X(x)$, se definen las siguientes funciones:

1. **Función de Masa de Probabilidad** (fmp) si **X** es una v.a Discreta.
2. **Función de Densidad de Probabilidad** (fdp) si **X** es una v.a Continua,

Funciones de Variables Aleatorias

Definición (Función de Masa de Probabilidad (f.m.p))

La Función de Masa de Probabilidad (f.m.p) de una variable aleatoria discreta está dada por:

$$f_X(x) = P(X = x), \quad \forall x$$

Funciones de Variables Aleatorias

Ejemplo: Función de Masa de Probabilidad (f.m.p)

Sea X una v.a discreta con Función de Masa de Probabilidad (f.m.p) definida por:

$$f_X(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}; \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

- $P(X = C) = f_X(C) = p(1-p)^{C-1}$ (Probabilidad en un Punto C)
- $P(a \leq x \leq b) = \sum_{k=a}^{b} f_X(k) = \sum_{k=a}^{b} p(1-p)^{k-1}$ (Probabilidad en un intervalo $[a, b]$)
- $P(X \leq b) = \sum_{k=1}^{b} f_X(k) = F_X(b)$ (Probabilidad en el intervalo $[1, b]$)

Funciones de Variables Aleatorias

Definición (Función de Densidad de Probabilidad (f.d.p))

La función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ de una variable aleatoria continua ***X***, *esta dada por la función que satisface:*

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, si $f_X(x)$ es continua entonces

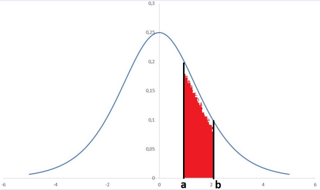
$$\frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$$

Funciones de Variables Aleatorias

Observación (Función de Densidad de Probabilidad (f.d.p))

Si X es una variable aleatoria continua con Función de Densidad de Probabilidad (f.d.p) $f_X(x)$, entonces:

- $P(X = x) = 0$
- $P(a < x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a \leq x \leq b)$
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$



Funciones de Variables Aleatorias

Teorema (Función de Densidad y Masa)

*Una función $f_X(x)$, es una función de masa o función de densidad de una Variable Aleatoria **X**, si y solo si:*

1. $f_X(x) \geq 0; \qquad \forall x.$
2. $\sum_x f_X(x) = 1;$ *Si X es discreta*
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1;$ *Si X es continua*

Transformación de una Variable Aleatoria

Teorema (Transformación de una Variable Aleatoria)

Sea $\boldsymbol{X}$ *una variable aleatoria con función de distribución acumulada (f.d.a)* $F_X(x)$, *y sea* $Y = g(X)$ *una función transformadora de* $\boldsymbol{X}$, *entonces la función de distribución acumulada (f.d.a) de Y, es decir* $F_Y(y)$ *es:*

1. *Si g es una función creciente, entonces*

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$$

2. *Si g es una función decreciente, entonces*

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Transformación de una Variable Aleatoria

Ejemplo: Transformación de una Variable Aleatoria

Sea **X** una variable aleatoria con función de distribución acumulada $F_X(x) = X, 0 < x < 1$, y sea la transformación $Y = g(X) = -ln(x)$.

1. Determine $F_Y(y)$
2. Determine $f_Y(y)$
3. Pruebe que $f_Y(y)$ es una función de densidad

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Transformación de una Variable Aleatoria

Teorema (Transformación de una Variable Aleatoria)

Sea $\boldsymbol{X}$ *una variable aleatoria con función de densidad o masa* $f_X(x)$, *y sea* $Y = g(X)$ *una función monotona, entonces la función de densidad o masa de* $\boldsymbol{Y}$, *es decir* $f_Y(y)$ *es:*

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Transformación de una Variable Aleatoria

Ejemplo: Transformación de una Variable Aleatoria

Sea **X** una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{3}{7}x^2; \quad 1 < x < 2$$

y sea la transformación $Y = g(X) = \dfrac{5x+2}{3}$.

1. Determine $f_Y(y)$
2. Pruebe que $f_Y(y)$ es una función de densidad

Valores Esperados

Definición (Valor Esperado o Esperanza)

El Valor Esperado o Esperanza de una variable aleatoria g(X) denotado por $\mathbb{E}(g(X))$ es:

- $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) \cdot f_X(x)dx$ *Si X es Continua*
- $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in \chi} g(X) \cdot f_X(x)$ *Si X es Discreta*

Obs: Si $\mathbb{E}|g(X)| = \infty$, entonces $\mathbb{E}(g(X))$ NO EXISTE.

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Valores Esperados

Teorema (Valor Esperado o Esperanza)

Sea $\boldsymbol{X}$ *una variable aleatoria y sean* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$ *constantes. Entonces para cualquier función* $g_1(x)$ *y* $g_2(x)$ *se tiene:*

1. $\mathbb{E}(ag_1(x) + bg_2(x) + c) = a\mathbb{E}(g_1(x)) + b\mathbb{E}(g_2(x)) + c$
2. *Si* $g_1(x) \geq 0 \quad \forall x$, *entonces* $\mathbb{E}(g_1(x)) \geq 0$
3. *Si* $g_1(x) \geq g_2(x) \quad \forall x$, *entonces* $\mathbb{E}(g_1(x)) \geq \mathbb{E}(g_2(x))$
4. *Si* $a \leq g_1(x) \leq b \quad \forall x$, *entonces* $a \leq \mathbb{E}(g_1(x)) \leq b$

Valores Esperados

Ejemplo: Valor Esperado CASO DISCRETO

Sea **X** una variable aleatoria discreta con función de masa

$$f_X(x) = \frac{1}{N}; \quad x = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Determine $\mathbb{E}(3x - 5)^2$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Valores Esperados

Ejemplo: Valor Esperado CASO CONTINUO

Sea **X** una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}; \quad \alpha \leq x \leq \infty, \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0.$$

Determine $\mathbb{E}(3x+1)$

Universidad de Playa Ancha
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Momentos y Función Generadora de Momentos

Definición (Momentos)

Para cada entero $\boldsymbol{n}$, *el n-ésimo momento de* $\boldsymbol{X}$, $\mu_n^{'}$ *se define:*

$$\mu_n^{'} = \mathbb{E}\left(X^n\right).$$

El n-ésimo momento central de $\boldsymbol{X}$, μ_n *se define:*

$$\mu_n = \mathbb{E}\left(X - \mu\right)^n,$$

donde $\mu = \mu_1^{'} = \mathbb{E}(X)$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Momentos y Función Generadora de Momentos

Definición (Varianza)

*La Varianza de una variable aleatoria **X** es el segundo momento central, es decir:*

$$Var(X) = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Momentos y Función Generadora de Momentos

Teorema (Varianza)

*Sea **X** una variable aleatoria con varianza finita, y sean **a** y **b** constantes, entonces:*

1. $Var(X) > 0$
2. $Var(aX) = a^2 Var(X)$
3. $Var(b) = 0$
4. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Momentos y Función Generadora de Momentos

Definición (Función Generadora de Momentos (fgm))

*Sea **X** una variable aleatoria con f.d.a $F_X(x)$, la Función Generadora de Momentos **(fgm)** de **X**, la que se denota $M_X(t)$, se define:*

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Momentos y Función Generadora de Momentos

Teorema (Función Generadora de Momentos (fgm))

Si la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ *tiene f.g.m* $M_X(t)$, *entonces*

$$\mathbb{E}\left(X^n\right) = M_X^{(n)}(0)$$

donde

$$M_X^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)|_{t=0}$$

Universidad de Playa Ancha Facultad de Ciencias Naturales y Exactas DEPARTAMENTO DISCIPLINARIO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Momentos y Función Generadora de Momentos

Ejemplo:

Sea X una variable aleatoria, con función de densidad

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}; \qquad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

Utilizando la f.g.m, encuentre la $Var(X)$.