

módulo 4:**4.1.- GRUPO DE PERMUTACIONES**

Definición 1: Una permutación es una biyección definida en un conjunto cualquiera.

Sea X un conjunto no vacío, $|X| = n$, diremos que $(\text{Bij } X, \cdot)$ es un grupo donde $\text{Bij } X = \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ es biyectiva} \}$.

Este grupo recibe el nombre de **grupo de permutaciones** (o grupo de simetrías o de transformaciones).

Lo anotaremos como S_n , así diremos que $(S_n, \cdot)$ es el grupo de permutaciones. Si $\sigma \in S_n$ entonces $\sigma : X \rightarrow X$ es biyección.

Nota: Sea $X = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ con $a_i \neq a_j$ con $i \neq j$ y si $\sigma \in S_n$, anotaremos a σ como:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \dots & \sigma(a_n) \end{pmatrix} \in S_n$$

Donde $\sigma(a_i)$ es la imagen de a_i según σ

Observaciones:

- Si $\sigma \in S_n$ y $\rho \in S_n$, entonces $\sigma\rho \in S_n$
- El producto de dos permutaciones consiste en la composición de las bisecciones correspondientes y es no conmutativo es decir $\sigma\rho \neq \rho\sigma$.
- $|S_n| = n!$

Ejemplo 1: Sean $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$ y $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$

Procedemos a componer permutaciones tal como lo hacemos en funciones, es decir operamos de derecha a izquierda, luego obtenemos:

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo se aprecia claramente que $\sigma\rho \neq \rho\sigma$ lo que verifica la observación anterior.

Ejemplo 2: Determinar todos los elementos de S_2 y S_3 , donde $X = \{1, 2\}$ y $X = \{1, 2, 3\}$ respectivamente.

i) El grupo S_2 queda definido de la siguiente manera:

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{ \int_0, \int_1 \}, \text{ donde } (S_2, \cdot) \cong \mathbb{Z}_2$$

Podemos hacer la tabla de doble entrada en la cual se verifica claramente que S_2 es un grupo conmutativo.

$\cdot$	$\int_0$	$\int_1$
$\int_0$	$\int_0$	$\int_1$
$\int_1$	$\int_1$	$\int_0$

ii) El grupo S_3 queda definido de la siguiente manera:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{luego}$$

tenemos $S_3 = \{ \rho_0, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \}$, donde $(S_3, \cdot) \cong (D_3, \cdot)$

$\cdot$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	σ_3	σ_1	σ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Ejemplo 3: Describir el subgrupo de S_4 que es isomorfo con D_4

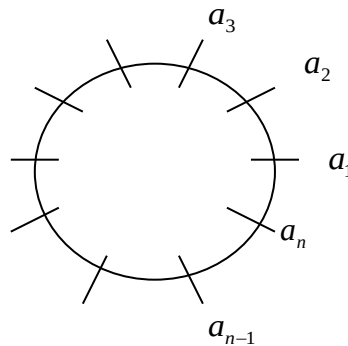
El subgrupo de S_4 será H que esta definido de la siguiente manera:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H \cong D_4 \text{ con } H \leq S_4$$

4.2.- Ciclo y Notación de Ciclo

Supongamos que n elementos de un conjunto A se distribuyen en una circunferencia de tal modo que el círculo rota en $\frac{2\pi}{n}$ radianes, donde $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.



Entonces la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \in S_n$,

Esta permutación es un ciclo y se anotará en notación de ciclo, como sigue: $\sigma = (a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n)$

Ejemplo 4: Del grupo S_4 consideremos lo siguiente:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$, es un ciclo.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3) (2 \ 4)$, es un producto de ciclos.

Observación: Toda permutación puede ser un ciclo o bien un producto de ciclos.

Ejemplo 5: Escribir como ciclo (o producto de ciclo) los elementos de S_3

Considerando que:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Al escribirlo como ciclo o producto de ciclo obtenemos lo siguiente:

$$S_3 = \{(1)(2)(3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$$

Observación: Cuando el elemento no está, es fijo, es decir es su propia imagen. Del ejemplo 6 podemos rescatar que en $(2\ 3)$ está fijo el 1, en $(1\ 3)$ está fijo el 2, en $(1\ 2)$ está fijo el 3.

Notación: $Id_S = (1)(2)(3)\dots(n) = (1)$.

Definición 2: Una **transposición** es un ciclo de longitud 2

Todo ciclo se puede expresar como un producto de transposiciones. Si $\sigma = (a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_{n-1}\ a_n) \in S_n$ entonces $\sigma = (a_1\ a_n)(a_1\ a_{n-1})\dots(a_1\ a_2)$.

Las permutaciones se clasifican según su paridad (o signo) que puede ser par (o signo $+1$) o bien impar (signo -1).

Definición 3:

Diremos que una permutación es par:

- Si es un ciclo de longitud impar (se descompone en un número par de transposiciones)
- Si es un producto de 2 ciclos de igual paridad.

Diremos que una permutación es impar si:

- Si es un ciclo de longitud par (se descompone en un número impar de transposiciones).
- Si se descompone en un producto de dos ciclos de distinta paridad.

Ejemplo 6: Determinar la paridad de $\rho = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) \in S_6$.

Como $(1\ 2\ 3)$ es un ciclo de longitud impar, entonces $(1\ 2\ 3)$ es par. Por otro lado como $(4\ 5\ 6)$ es un ciclo de longitud impar entonces $(4\ 5\ 6)$ es par. Luego ρ es par.

Ejemplo 7: Determinar la paridad de $\mu = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8) \in S_8$.

Sabemos que $\mu_1 = (1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, luego μ_1 es impar o

-1 , pues $(1\ 2\ 3\ 4)$ es un ciclo de longitud par.

También sabemos que $\mu_2 = (1\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ es

impar o -1 , ya que $(1\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8)$ es un ciclo de longitud par.

Pudiendo concluir de esto que μ es par, pues $-1 \cdot -1 = 1$

Ejemplo 8: Determinar la paridad de $\alpha = (1\ 2\ 3)(4\ 5) \in S_5$.

Claramente $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$ es impar pues, $(1\ 2\ 3)$ es par, y $(4\ 5)$ es impar.

Nota:

- El producto de dos ciclos de igual paridad es par.
- El producto de dos ciclos de distinta paridad es impar.

Ejemplo 9: Determine la paridad de $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_9$

Lo primero que debemos hacer es escribirla como ciclo, para poder determinar su paridad, $\rho = (1 \ 3 \ 4 \ 2)(5 \ 6)(7 \ 9)(8)$

$$\Rightarrow \rho = (1 \ 3 \ 4 \ 2)(5 \ 6)(7 \ 9)$$

Observamos que $(1 \ 3 \ 4 \ 2)$ es impar, $(5 \ 6)$ es impar y $(7 \ 9)$ también es impar, por lo que podemos concluir que ρ es impar.

Definición 4:

- $\sigma \in S_n$ es par si y sólo si $\prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = +1$
- $\sigma \in S_n$ es impar si y sólo si $\prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = -1$

Ejemplo 10: Consideremos $\sigma = (1 \ 2 \ 3) \in S_3$, determine su paridad.

Por definición se tiene:

$$\prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \cdot \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{1-3}{1} \cdot \frac{1-2}{2} \cdot \frac{3-2}{1}$$

$$= -2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 1 = 1$$

$\therefore \sigma$ es par

4.3.- Guía nº5

1.- Determine la paridad de:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$

Descomponemos en producto de ciclos y obtenemos lo siguiente:

$\sigma = (1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4) = \sigma_1 \cdot \sigma_2$, donde claramente σ_1 y σ_2 son impar, por lo que tenemos que σ es par, pues es un producto de igual paridad.

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$

Descomponemos en producto de ciclos obteniendo

$\sigma = (1\ 3\ 2)(4\ 5\ 6) = \sigma_3 \cdot \sigma_4$, acá σ_3 y σ_4 son ciclos de longitud impar, lo que implica que σ_3 y σ_4 son par, luego podemos concluir que σ es un producto de igual paridad, por lo tanto es par.

2.- Determine el orden de:

a) $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_3$

Para determinar el orden de σ debemos realizar lo siguiente:

$$\sigma = (1\ 2\ 3)$$

$$\sigma^2 = (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2)$$

$$\sigma^3 = (1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3) = (1)(2)(3) = (1)$$

$$\therefore \text{ord}(\sigma) = 3$$

b) $\psi = (1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7) \in S_7$, luego tenemos:

$$\psi = (1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7)$$

$$\psi^2 = (1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7)(1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7) = (4\ 6)(5\ 7)$$

$$\psi^3 = (4\ 6)(5\ 7) \cdot (1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7) = (1\ 2)(3)(4\ 7\ 6\ 5) = (1\ 2)(4\ 7\ 6\ 5)$$

$$\psi^4 = (1\ 2)(4\ 7\ 6\ 5) \cdot (1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7) = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) = (1)$$

$$\therefore \text{ord}(\psi) = 4$$

3.- Demostrar que las cuatro permutaciones forman un grupo con la multiplicación de permutaciones.

Tenemos lo siguiente:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Escrito como ciclo $\alpha_0 = (1), \alpha_1 = (1\ 2\ 3\ 4), \alpha_2 = (1\ 3)(2\ 4), \alpha_3 = (1\ 4\ 3\ 2)$

Procedemos a realizar la tabla

$\cdot$	α_0	α_1	α_2	α_3
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	α_2	α_3	α_0
α_2	α_2	α_3	α_0	α_1
α_3	α_3	α_0	α_1	α_2

- El neutro de es $\alpha_0 = (1)$
- Es cerrada la operación
- El grupo es asociativo
- El inverso de α_0 es α_0
- El inverso de α_1 es α_3

- El inverso de α_2 es α_2
- El Inverso de α_3 es α_1

-

$\therefore$ Las permutaciones con la operación multiplicación forman un grupo y además abeliano.

4.- En el grupo S_4 , resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Escribiendo las permutaciones como ciclo obtenemos:

$$\begin{aligned} (1\ 3)(2\ 4) \cdot x &= (1\ 2)(3\ 4) \quad / \ (1\ 3) \text{ izquierda} \\ (1\ 3)(1\ 3)(2\ 4) \cdot x &= (1\ 3)(1\ 2)(3\ 4) \\ (1)(3)(2\ 4) \cdot x &= (1\ 3)(1\ 2)(3\ 4) \\ (2\ 4) \cdot x &= (1\ 3)(1\ 2)(3\ 4) \quad / \ (2\ 4) \text{ izquierda} \\ (2\ 4)(2\ 4) \cdot x &= (2\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(3\ 4) \\ (2)(4) \cdot x &= (2\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(3\ 4) \\ x &= (2\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(3\ 4) \\ x &= (1\ 4)(2\ 3) \end{aligned}$$

$$\therefore x = (1\ 4)(2\ 3)$$

4.4.- Autoevaluación 4

1.- Determine la paridad de:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in S_7$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$

e) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2.- Determine el orden de:

a) $\kappa = (2 \ 1 \ 4 \ 3) \in S_4$

b) $\rho = (1 \ 2)(2 \ 3 \ 5) \in S_5$

c) $\alpha = (1 \ 2)(3 \ 4 \ 5) \in S_5$

3.- Verificar que en el grupo S_3 existen cuatro elementos que satisfacen la ecuación $x^2 = e$ y tres elementos que satisfacen $y^3 = e$.