

módulo 6:**6.1.- COCLASES (CLASES LATERALES)**

En este capítulo se entregará las bases para el estudio de subgrupos normales; es por eso que presentamos una variada gama de ejemplos que permitirán relacionarse con el concepto de coclases, como el conjunto de todos los elementos de un grupo, obtenidos al multiplicar cada elemento del subgrupo (a la izquierda o a la derecha, según la coclase pedida) por el elemento x del grupo.

Además de algunas proposiciones y teoremas importantes, haciendo gran énfasis en el teorema de Lagrange y a los corolarios que se desprenden de él.

Definición 1 : Sea $(G,*)$ un grupo , H es un subgrupo de G y g un elemento fijo de G , entonces

6.1.1.- El conjunto $g * H = \{ g * h : h \in H \}$

Recibe el nombre de **coclase izquierda de H en G , determinada por g .**

6.1.2.- El conjunto $H * g = \{ h * g : h \in H \}$

Recibe el nombre de **coclase derecha de H en G , determinada por g .**

Nota: Si $(G,*)$ es un grupo de tipo aditivo anotamos $g+H$ a la coclase izquierda determinada por g y $H+g$ a la coclase derecha, determinada por g .

Si $(G,*)$ es un grupo de tipo multiplicativo, anotamos gH a la coclase izquierda determinada por g y Hg a la coclase derecha determinada por g

A posteriores se hará uso de G como grupo multiplicativo, a no mediar confusiones.

Ejemplo 1: Determinar todas las coclases izquierdas y derechas de:

$$H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle \leq S_3$$

Donde: $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle = \{ (1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \}$

$$S_3 = \{ (1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2) \}$$

Coclases izquierdas de H en S_3 :

$$(1) H = \{ (1)(1), (1)(1\ 2\ 3), (1)(1\ 3\ 2) \} = H$$

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3) H &= \{ (1\ 2\ 3)(1), (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2) \} \\ &= \{ (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1) \} = H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1\ 3\ 2) H &= \{ (1\ 3\ 2)(1), (1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2) \} \\ &= \{ (1\ 3\ 2), (1), (1\ 2\ 3) \} = H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\ 3) H &= \{ (2\ 3)(1), (2\ 3)(1\ 2\ 3), (2\ 3)(1\ 3\ 2) \} \\ &= \{ (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1\ 3) H &= \{ (1\ 3)(1), (1\ 3)(1\ 2\ 3), (1\ 3)(1\ 3\ 2) \} \\ &= \{ (1\ 3), (1\ 2), (2\ 3) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1\ 2) H &= \{ (1\ 2)(1), (1\ 2)(1\ 2\ 3), (1\ 2)(1\ 3\ 2) \} \\ &= \{ (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3) \} \end{aligned}$$

Se observa que hay sólo dos coclases izquierdas distintas de H en S_3 , a saber:

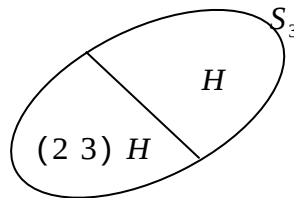
$$H \text{ y } (2\ 3) H$$

Luego se puede observar que $|H| = |(2\ 3)H| = 3$

$$H \cap (2\ 3)H = \emptyset$$

$$H \cup (2\ 3)H = S_3$$

El grupo S_3 se ha particionado en coclases izquierdas.



Coclases derechas de H en S_3 :

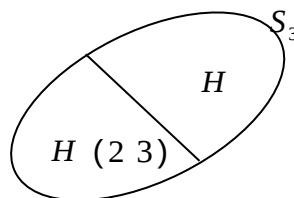
$$H(1) = H(1\ 2\ 3) = H(1\ 3\ 2) = H$$

$$H(2\ 3) = H(1\ 3) = H(1\ 2)$$

Hay dos coclases derechas distintas de H en S_3 a saber:

$$H \text{ y } H(2\ 3)$$

El grupo se ha particionado en coclases derechas.



En el ejercicio anterior se puede observar que las coclases derechas y las coclases izquierdas de H en S_3 son iguales, cuando esto ocurre se dice que el subgrupo H es un subgrupo normal (subgrupos invariantes) que detallaremos mas adelante.

Ejemplo 2: Determinar las coclases izquierdas y derechas de:

$$H = \langle (1\ 2) \rangle \leq S_3$$

Donde: $H = \{ (1), (1\ 2) \}$

Coclases izquierdas de H en S_3 :

$$\begin{aligned} (1)H &= (1\ 2)H = H \\ (1\ 2\ 3)H &= \{ (1\ 2\ 3)(1), (1\ 2\ 3)(1\ 2) \} \\ &= \{ (1\ 2\ 3), (1\ 3) \} = (1\ 3)H \\ (1\ 3)H &= \{ (1\ 3)(1), (1\ 3)(1\ 2) \} \\ &= \{ (1\ 2\ 3), (1\ 3) \} \\ (1\ 3\ 2)H &= \{ (1\ 3\ 2)(1), (1\ 3\ 2)(1\ 2) \} \\ &= \{ (1\ 3\ 2), (2\ 3) \} = (2\ 3)H \\ (2\ 3)H &= \{ (2\ 3)(1), (2\ 3)(1\ 3\ 2) \} \\ &= \{ (2\ 3), (1\ 3\ 2) \} \end{aligned}$$

Coclases derechas de H en S_3 :

$$H(1) = H(12) = H$$

$$\begin{aligned} H(123) &= \{(1)(123), (12)(123)\} \\ &= \{(123), (23)\} = H(23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(132) &= \{(1)(132), (12)(132)\} \\ &= \{(132), (13)\} = H(13) \end{aligned}$$

En este ejercicio, H no es subgrupo normal, las coclases izquierdas no son iguales a las coclases derechas, $\forall g \in S_3$.

Observación: Si G es un grupo abeliano evidentemente:

$$\forall g \in G : gH = Hg$$

Definición 2 : Sea G un grupo y $H \leq G$:

Dados $x, y \in G$, diremos que $x \equiv y \pmod{H}$ ssi $y^{-1} \cdot x \in H$
(notación: $x \equiv y \pmod{H}$ “ x es congruente con y modulo H ”)

6.2.- Teorema:

Dados $H \leq G$; $x, y \in G$: $x \equiv y \pmod{H}$ ssi $y^{-1} \cdot x \in H$, es una relación de equivalencia.

Demostración:

✓ **Refleja**

$$\forall x \in G$$

$$x \equiv x \pmod{H}, \text{ pues } x^{-1} \cdot x = e_G \in H$$

$\therefore$ Es refleja

✓ **Simétrica**

$$\text{Si } x \equiv y \pmod{H}$$

$$\Rightarrow y^{-1}x \in H$$

$$\text{Como } H \leq G, \exists (y^{-1}x)^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow x^{-1}y \in H$$

$$\Rightarrow y \equiv x \pmod{H}$$

$\therefore$ Es simétrica

✓ **Transitiva**

$$\text{Si } x \equiv y \pmod{H}$$

$$\Rightarrow y^{-1}x \in H$$

$$\text{Si } y \equiv z \pmod{H}$$

$$\Rightarrow z^{-1}y \in H$$

$$\text{Luego por ser } H \leq G$$

$$\Rightarrow (z^{-1}y)(y^{-1}x) \in H$$

$$\Rightarrow z^{-1}x \in H$$

$$\Rightarrow x \equiv z \pmod{H}$$

$\therefore$ Es transitiva

$\therefore$ La relación módulo H es una relación de equivalencia, por lo que particiona al grupo G en clases de equivalencia.

Para cada $x \in G$, la clase de x es:

$$\bar{x} = \{ y \in G : y \equiv x \pmod{H} \}$$

Definición 3 : Dado G un grupo y $H \leq G$. Para $x, y \in G$

$$x \equiv y \pmod{H} \text{ si y sólo si } y^{-1}x \in H$$

Observación: La congruencia módulo H dada en definición 3, permite definir la clase de x modulo H como la coclase izquierda de H en G , determinada por x

En efecto, sabemos que:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{y \in G : y \equiv x \pmod{H}\} \\ &= \{y \in G : x^{-1}y \in H\} \\ &= \{y \in G : x^{-1}y = h ; h \in H\} \\ &= \{y \in G : y = xh, h \in H\} \\ &= xH \end{aligned}$$

Definición 4: Dado G un grupo y $H \leq G$. Para $x, y \in G$

$$x \equiv y \pmod{H} \text{ si y sólo si } xy^{-1} \in H$$

De manera análoga, la definición 4 permite definir la clase lateral derecha o coclase derecha H en G determinada por x ; esto es $\bar{x} = Hx$.

En efecto:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{y \in G : x \equiv y \pmod{H}\} \\ &= \{y \in G : yx^{-1} \in H\} \\ &= \{y \in G : yx^{-1} = h ; h \in H\} \\ &= \{y \in G : y = hx, h \in H\} \\ &= Hx \end{aligned}$$

Ejemplo 3 : Sea $G = (\{ 1, -1, i, -i \}, \cdot)$ y $H = (\{ 1, -1 \}, \cdot) \leq G$, determinemos según congruencia módulo H , las clases de los siguientes elementos $\overline{1}, \overline{-1}, \overline{i}, \overline{-i}$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
 \overline{1} &= \{ x \in G : x \equiv 1 \pmod{H} \} & \overline{-1} &= \{ x \in G : x \equiv -1 \pmod{H} \} \\
 &= \{ x \in G : 1^{-1} x \in H \} & &= \{ x \in G : (-1)^{-1} x \in H \} \\
 &= \{ x \in G : 1 x \in H \} & &= \{ x \in G : -1 x \in H \} \\
 &= \{ x \in G : x \in H \} & &= \{ x \in G : -x \in H \} \\
 &= \{ 1, -1 \} = H & &= \{ 1, -1 \} = H \\
 \overline{i} &= \{ x \in G : x \equiv i \pmod{H} \} & \overline{-i} &= \{ x \in G : x \equiv -i \pmod{H} \} \\
 &= \{ x \in G : i^{-1} x \in H \} & &= \{ x \in G : (-i)^{-1} x \in H \} \\
 &= \{ x \in G : -i x \in H \} & &= \{ x \in G : i x \in H \} \\
 &= \{ i, -i \} = i H = -i H & &= \{ i, -i \} = -i H = i H
 \end{aligned}$$

La proposición siguiente, es un lema, previo para demostrar el teorema de Lagrange.

Proposición: Sea G un grupo y $H \leq G$, entonces:

$$|H| = |gH| = |Hg|; \forall g \in G.$$

Demostración:

Sea:

$$f : H \rightarrow gH$$

$$\text{talque } h \rightarrow f(h) = gh \quad ; \quad \forall h \in H$$

i) Es claro que esta bien definida

$$\text{Si } h_1 = h_2, \text{ con } h_1, h_2 \in H \leq G$$

$$\text{entonces } gh_1 = gh_2$$

$$\therefore f(h_1) = f(h_2)$$

ii) f es inyectiva:

$$\text{Si } f(h_1) = f(h_2) \text{ con } h_1, h_2 \in H$$

$$\text{entonces } gh_1 = gh_2$$

$$g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2$$

$$eh_1 = eh_2$$

$$\therefore h_1 = h_2$$

iii) f es epiyectiva:

$\forall gh \in gH$, debe existir $x \in H$ tal que $f(x) = gh$.
Claramente basta considerar $x = h$ tal que $f(h) = gh$

$\therefore f$ es epiyectiva.

Luego f es Biyectiva.

En Consecuencia $|H| = |gH|$.

De manera similar, se demuestra $|Hg| = |H|$

Esta proposición es de gran importancia debido a que permite probar que dadas dos coclases cualesquiera, existe una biyección entre ellas. Así

entonces dos coclases izquierdas(derechas) cualesquiera de H en G tienen el mismo número de elementos, además como H es una coclase, cada coclase izquierda (derecha) de H en G tiene tantos elementos como H .

6.3.- Teorema De Lagrange:

Si G es un grupo finito y $H \leq G$, entonces:

$$|H| \mid |G|$$

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Matemático francés, en 1754 publicó su primer trabajo el cual describe la analogía entre el teorema binomial y las derivadas sucesivas del producto de funciones.

Debido a su estudio sobre permutaciones de las raíces puede considerarse como el primer paso en el desarrollo de la teoría de grupos continuada por Ruffini, Galois y Cauchy.

Demostración:

Sea:

$$|G| = n \quad \text{y} \quad |H| = m$$

Se sabe que el grupo G esta particionado por las coclases (izquierdas o derechas) de H en G determinados por g , $\forall g \in G$.

Esto es,

$$\bigcup_{g \in G} gH = G$$

Luego

$$\left| \bigcup_{g \in G} gH \right| = |G|, \text{ de lo que se tiene}$$

$$\sum_{g \in G} |gH| = |G|$$

Pero, se sabe que $|gH| = |H|$, si hay r coclases, se tiene que:

$$\sum_{g \in G} |gH| = r |gH| = r |H| = r m$$

Luego,

$$r m = n$$

$$\Downarrow$$

$$m \mid n$$

$$\therefore |H| \mid |G| \text{ Cuando } H \leq G.$$

Ejemplo 4:

Se tiene $A_n \leq S_n$ (donde A_n , llamado grupo alternante, es el subgrupo de S_n formado de las permutaciones pares de S_n)

Considerando el grupo alternante A_4 , que tiene $\frac{4!}{2} = 12$ elementos, puede probarse que, pese a que 6 divide a 12, A_4 no tiene ningún subgrupo de orden 6.

Por lo tanto el recíproco del teorema de Lagrange es falso.

Corolario 1: Si G es un grupo multiplicativo de orden n , entonces:

$$\forall g \in G, \quad g^n = e$$

Demostración:

Sea $g \in G$ y $H = \{ g^r : r \in \mathbb{Z}^+ \} \leq G$, con $|H| = m$, entonces por teorema de Lagrange:

$$m \mid n$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n = m k$$

$$\Rightarrow g^n = g^{mk} = (g^m)^k = e^k = e$$

$$\therefore g^n = e; \forall g \in G$$

Corolario 2 : Si G es un grupo finito y $g \in G$, entonces:

$$|g| \mid |G|$$

Demostración:

Sea $|G| = n$, pues G es un grupo finito y $|g| = m$.

Definamos $H \leq G$, $|H| = \langle g \rangle \Rightarrow |H| = m$

Luego por Teorema de Lagrange se tiene:

$$|H| \mid |G|, \text{ en consecuencia } m \mid n$$

$$\therefore |g| \mid |G|$$

Corolario 3: Si G es un grupo de orden p , con p un número primo, entonces G es un grupo cíclico y todo elemento de G , a excepción del neutro, es generador de G .

Demostración:

Sea $|G| = p$, con p primo y sea $g \in G \neq e$; tal que $\langle g \rangle \leq G$, luego por teorema de Lagrange se tiene:

$$|\langle g \rangle| \mid |G|$$

$$\Rightarrow |\langle g \rangle| = \begin{cases} 1 \\ p \end{cases}$$

$$\text{Si } |\langle g \rangle| = 1 \Rightarrow \langle g \rangle = \{e_G\} \Rightarrow g = e_G, \text{ pero } g \neq e_G$$

$$\therefore |\langle g \rangle| = p$$

$\therefore G$ es cíclico.

6.4.- Definición 5 : Sea G un grupo finito, y $H \leq G$. Se define el índice de H en G , como el número de coclases izquierdas (derechas) de H en G . Lo anotaremos $(G : H)$.

$$\text{Esto es } (G : H) = \frac{|G|}{|H|}$$

Ejemplo 5: Determinar el índice de H en G en:

a) $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle \leq S_3$

$$(S_3 : H) = \frac{|S_3|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$$

$\therefore$ El número de coclases de H en S_3 es 2.

b) $H = \langle (2\ 3) \rangle \leq S_3$

$$(S_3 : H) = \frac{|S_3|}{|H|} = \frac{6}{2} = 3$$

$\therefore$ El número de coclases de H en S_3 es 3.

c) $H = \{ \bar{0}, \bar{2} \} \leq \mathbb{Z}_4$

$$(\mathbb{Z}_4 : H) = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore$ El número de coclases de H en $\mathbb{Z}_4$ es 2.

d) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 : H = \langle (1, 3) \rangle)$

Se sabe que:

$$(1, 3)^1 = (1, 3)$$

$$(1, 3)^2 = (2, 0)$$

$$(1, 3)^3 = (0, 3)$$

$$(1, 3)^4 = (1, 0)$$

$$(1, 3)^5 = (2, 3)$$

$$(1, 3)^6 = (0, 0)$$

Luego el orden de H es 6 y de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ es 18.

$\therefore$ El número de coclases de H en $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ es 3.

e) $(\mathbb{Z}_{15} : 3\mathbb{Z}_{15})$

Los elementos de $3\mathbb{Z}_{15} = \{ \bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12} \}$, luego el orden de $3\mathbb{Z}_{15}$ es 5.

$\therefore$ El número de coclases de H en $\mathbb{Z}_{15}$ es 3.

6.5.- Guía nº 6

1.- Determinar todas las coclases del subgrupo $3\mathbb{Z}_{15}$ en $\mathbb{Z}_{15}$.

Como $\mathbb{Z}_{15}$ es abeliano, basta encontrar las coclases izquierdas.

Se sabe que: $\mathbb{Z}_{15} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \dots, \bar{14} \}$ y $3\mathbb{Z}_{15} = \{ \bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12} \}$

Las coclases de $\mathbb{Z}_{15}$ en $3\mathbb{Z}_{15}$ son:

$$\bar{0} + 3\mathbb{Z}_{15} = \{ \bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12} \} = 3\mathbb{Z}_{15}$$

$$\bar{1} + 3\mathbb{Z}_{15} = \{ \bar{1}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{13} \}$$

$$\bar{2} + 3\mathbb{Z}_{15} = \{ \bar{2}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{14} \}$$

Si se trata de encontrar más coclases sólo lograremos repetir las anteriores

$$\bar{3} + 3\mathbb{Z}_{15} = \{ \bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12} \}$$

$$\bar{4} + 3\mathbb{Z}_{15} = \{ \bar{1}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{13} \}$$

$$\bar{5} + 3\mathbb{Z}_{15} = \{ \bar{2}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{14} \}$$

$\therefore$ Son tres las coclases distintas de $3\mathbb{Z}_{15}$ en $\mathbb{Z}_{15}$ y estas forman una partición de $\mathbb{Z}_{15}$, sin ser ellas subgrupos de $\mathbb{Z}_{15}$, excepto la coclase $\bar{0} + 3\mathbb{Z}_{15} = 3\mathbb{Z}_{15}$, que evidentemente lo es.

2.- Considerar el subgrupo de S_3 , $H = \{ \rho_0, \rho_1, \rho_2 \}$, encontrar todas las coclases derechas de H en S_3 .

$$H = \langle (123) \rangle = \{ (1), (123), (132) \}$$

$$H(1) = \{ (1), (123), (132) \} = H(123) = H(132) = H$$

$$H(12) = \{ (1)(12), (123)(12), (132)(12) \}$$

$$= \{ (12), (13), (23) \} = H(13) = H(23)$$

3.- Sea $H \leq G$, demostrar que $aH = bH$ ssi $a^{-1}b \in H$

$\Rightarrow$] Hipótesis: $aH = bH$

Tesis : $a^{-1}b \in H$

Si $aH = bH$, entonces $\bar{a} = \bar{b}$,

lo que implica, $a \equiv b \pmod{H}$, luego $b^{-1}a \in H$,

pero $H \leq G$, entonces $(b^{-1}a)^{-1} \in H$,

$\therefore a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$] Hipótesis: $a^{-1}b \in H$

Tesis : $aH = bH$

Si $a^{-1}b \in H$, entonces $a^{-1}b = h$, para algún $h \in H$,

lo que implica $b = ah$, es decir $b \in aH$

$\therefore aH = bH$

4.- Demostrar que S_7 no tiene subgrupos de orden 11.

Supongamos que $H \leq S_7$ tal que $|H| = 11$

Por Teorema de Lagrange si $H \leq S_7$

$$\Rightarrow |H| \mid |S_7|$$

pero 11 no divide a 5040

$\therefore S_7$ No tiene ningún subgrupo de orden 11.

5.- Determinar el número de coclases de A_n en S_n .

Notemos que A_n es un grupo alternante, formado por todas las permutaciones pares de S_n .

$$A_n \leq S_n$$

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2} \Rightarrow \frac{n!}{\frac{n!}{2}} = 2$$

$\therefore$ El número de coclases de A_n en S_n es 2.

6.6 .- Autoevaluación 6

1.- Encontrar todas las coclases del subgrupo $\langle \overline{6} \rangle$ en $\mathbb{Z}_{24}$.

2.- Si G es un grupo de orden n , encontrar todas las coclases del subgrupo trivial $\{e\}$ en G .

- 3.- Determinar el índice de H en G de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 : H = \langle (1, 2) \rangle)$.
- 4.- Encontrar todas las coclases de $4\mathbb{Z}_8$ en $\mathbb{Z}_8$.
- 5.- Si H es subgrupo de G , demostrar que la única coclase de H en G , que es subgrupo de G es H mismo.
- 6.- Mostrar que el recíproco del teorema de Lagrange es falso: si $|G| = n$ y $m \mid n$, entonces el grupo G tiene un subgrupo de orden m .