

módulo 7:

7.1.- SUBGRUPOS NORMALES

Luego de tener claros los conceptos de clases laterales o coclases, Se puede señalar que si las coclases derechas y las coclases izquierdas de un subgrupo en un grupo son iguales, se dice que el subgrupo, es un subgrupo normal (subgrupos invariantes).

Definición 1: Sea G un grupo y $H \leq G$. Diremos que H es un subgrupo normal (o invariante) de G , ssi $gH = Hg$, $\forall g \in G$.

Notación: $H \triangleleft G$ (H es subgrupo normal de G)

Observación:

$$\begin{aligned} gH &= Hg \quad ; \forall g \in G \\ \Leftrightarrow gHg^{-1} &= H \quad ; \forall g \in G \\ \Leftrightarrow gHg^{-1} &\subseteq H \quad ; \forall g \in G \\ \Leftrightarrow ghg^{-1} &\in H \quad ; \forall g \in G, \forall h \in H \end{aligned}$$

Ejemplo 1: En ejercicios anteriores hemos visto que las coclases izquierdas y derechas de $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ en S_3 son iguales, esto es $gH = Hg$, $\forall g \in S_3$, entonces se puede afirmar que $H \triangleleft S_3$.

Ejemplo 2: Demostrar que $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$

$$\text{pd. } g + n\mathbb{Z} - g \subseteq n\mathbb{Z} ; \forall g \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Si } x \in (g + n\mathbb{Z} - g)$$

$$\Rightarrow x = g + nt - g, \text{ con } t \in \mathbb{Z}, g \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = nt, \text{ con } t \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore x \in n\mathbb{Z}$$

Por lo tanto, $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$

Ejemplo 3: ¿ $Z(G) \triangleleft G$?

$$\text{Por ver si } g Z(G) g^{-1} \subseteq Z(G), \forall g \in G$$

dado $x \in g Z(G) g^{-1}$, entonces existe $h \in Z(G)$ tal que

$$x = g h g^{-1} ; h \in Z(G)$$

$$\text{luego } x = h g g^{-1}$$

$$\Rightarrow x = h \in Z(G)$$

$$\therefore x \in Z(G)$$

$$\therefore Z(G) \triangleleft G$$

Teorema: Sea G un grupo y $H \leq G$, entonces son equivalentes:

a) $H \triangleleft G$

b) $aHbH = abH$; $\forall a, b \in G$

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b)

Hipótesis: $H \triangleleft G$

Tesis : $aHbH = abH$

i) Sea $x \in gH \Rightarrow x = gh$; $h \in H$

Como $H \triangleleft G$ se tiene que

$$ghg^{-1} \in H \quad ; \quad \forall g \in G, \forall h \in H$$

$$\Rightarrow \exists h_1 \in H \text{ tal que } ghg^{-1} = h_1$$

$$\Rightarrow gh = h_1g$$

$$\text{Luego } x = gh = h_1g \in Hg$$

$$\therefore x \in Hg$$

$$\therefore gH \subseteq Hg$$

ii) Sea $y \in Hg \Rightarrow \exists h \in H$ tal que $y = hg$

Como $H \triangleleft G$ se tiene

$$g^{-1} h (g^{-1})^{-1} \in H, \forall g \in G, \forall h \in H$$

esto es, $g^{-1} h (g^{-1})^{-1} = h_2, h_2 \in H$

$$\Rightarrow h (g^{-1})^{-1} = g h_2$$

es decir, $h g = g h_2; \forall g \in G, h, h_2 \in H$

Luego $y = h g = g h_2 \in gH$

$$y \in gH$$

$$\therefore Hg \subseteq gH$$

$\therefore$ De i) y ii) se tiene que $gH = Hg, \forall g \in G$ cuando $H \triangleleft G$.

iii) Por demostrar $aHbH \subseteq abH$

Sea $x \in aHbH$

$$\Rightarrow x = ah_1bh_2; h_1, h_2 \in H$$

Como $gH = Hg$

Se tiene que $\exists h_3 \in H$ talque:

$$h_1 b = b h_3$$

Luego $x = ab h_3 h_2; h_2, h_3 \in H$

$$= ab h_4; h_4 \in H$$

$$\therefore x \in abH$$

iv) Por demostrar $abH \subseteq aHbH$

$$\begin{aligned}
 \text{Dado} \quad x &\in abH \\
 \Rightarrow x &= abh \quad ; \quad h \in H, \text{ con } h = h_1 h_2 \\
 &= abh_1 h_2 \quad ; \text{ por hipótesis } bh_1 = h_3 b \\
 &= a h_3 b h_2 \\
 \therefore x &\in aHbH
 \end{aligned}$$

$\therefore$ De iii) y iv) se tiene que $aHbH = abH$.

b) $\rightarrow$ a)

Hipótesis: $aHbH = abH$;

Tesis : $H \triangleleft G$

Si $x \in g H g^{-1}$, por demostrar $x \in H$.

$$\begin{aligned}
 \text{Si } x \in g H g^{-1} \Rightarrow x &= g h g^{-1} \quad ; \quad h \in H \\
 &= g h g^{-1} e \\
 &= g h g^{-1} h_1 h_1^{-1} \quad ; \text{ asociando} \\
 &= g g^{-1} h_2 h_1 h_1^{-1} \quad ; \text{ por hipótesis} \\
 &= h_3 \quad ; \quad h_3 \in H \\
 \therefore x &\in H \\
 \therefore H &\triangleleft G
 \end{aligned}$$

7.2.- Teorema: Sea G un grupo y $H \triangleleft G$, entonces $(G/H, \cdot)$ es un grupo, llamado grupo cociente o grupo factor.

Demostración:-

Se define :

$$\begin{aligned} \cdot : \quad G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \quad \text{tal que} \\ (g_1 H, g_2 H) &\longmapsto g_1 H \cdot g_2 H := g_1 g_2 H \end{aligned}$$

Por ver si la operación “ $\cdot$ ” esta bien definida en G/H .

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad (xH, yH) &= (uH, vH) \\ \Rightarrow \quad xH = uH &\quad \wedge \quad yH = vH \\ \text{La} \quad x \equiv u \bmod H &\quad \wedge \quad y \equiv v \bmod H \\ &\quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \\ &\quad u^{-1}x \in H \quad \wedge \quad v^{-1}y \in H \\ &\quad \Downarrow \exists h_1 \in H \quad \wedge \quad \Downarrow \exists h_2 \in H \\ &\quad u^{-1}x = h_1 \quad \wedge \quad v^{-1}y = h_2 \\ &\quad x = uh_1 \quad \wedge \quad y = vh_2 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} xy &= uh_1vh_2 \quad ; H \triangleleft G \\ xy &= uvh_3h_2 \quad ; h_3 \in H \\ xy &= uvh_4 \quad ; h_4 \in H \\ (uv)^{-1}xy &= h_4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (uv)^{-1}(xy) \in H$$

$$\Rightarrow xy \equiv uv \bmod H$$

$$\therefore xyH = uvH$$

$\therefore$ La operación “ $\cdot$ ” esta bien definida en G/H

asociatividad es trivial, por demostrar la existencia de elemento neutro en G/H .

Debe existir $xH \in G/H$, tal que $aHxH = xHaH = aH$, $\forall aH \in G/H$

Supongamos que $aHxH = aH$; como $H \triangleleft G$

$$a \times H = aH$$

$$a \times a^{-1} = H$$

$$a \times a^{-1} \in H$$

$$a \times a^{-1} = h \quad ; h \in H$$

$$a \times = ha$$

$$x = a^{-1}ha \quad ; a \in G, h \in H$$

Como $H \triangleleft G$, existe $h' \in H$ tal que $ha = ah'$

$$x = a^{-1}ah'$$

$$x = h' \quad ; h' \in H$$

$$x \in H$$

Luego $xH = H$; con $x \in H$

(verifica ser neutro, además por la izquierda)

$\therefore$ El neutro en G/H es H

Por demostrar la existencia de elemento inverso en G/H .

$\forall aH \in G/H$, debe existir $uH \in G/H$ tal que $aHuH = uHaH = e_{G/H} = H$.

Supongamos que $aHuH = H$

$$auH = H$$

$$au \in H$$

$$au = h \quad ; h \in H$$

$$u = a^{-1}h \quad ; h \in H, a^{-1} \in G$$

$\therefore$ El inverso de aH es $a^{-1}H$.

(se verifica también por la derecha)

$\therefore (G/H, \cdot)$ es un grupo.

7.3.- Guía nº 7

1.- Demostrar que todo subgrupo de un grupo abeliano es normal.

Hipótesis: $H \leq G$, donde G es abeliano,

Tesis : $H \triangleleft G$

Se sabe por teorema que: “Todo subgrupo de un grupo abeliano es abeliano”, entonces por hipótesis H es abeliano, entonces basta demostrar que $H \triangleleft G$

Si $x \in g H g^{-1}$; P.d. $x \in H$

$$x = g h g^{-1} ; \text{ Con } h \in H$$

$$x = h g g^{-1} \quad H \text{ es abeliano}$$

$$x = h$$

$$\therefore x \in H$$

$$\therefore H \triangleleft G$$

2.- Dado $f \in \text{Hom}(G, H)$, demostrar $\ker(f) \triangleleft G$

Se tiene: $g \ker(f) g^{-1} \subseteq \ker(f) \quad \forall g \in G$

Si $x \in g \ker(f) g^{-1}$ P.D. $x \in \ker(f)$

$$x = g k g^{-1} ; \text{ con } k \in \ker(f)$$

$$f(x) = f(g k g^{-1}) ; f \text{ es Homo}$$

$$f(x) = f(g) f(k) f(g^{-1}) ; \text{ Pero } k \in \ker(f)$$

$$f(x) = f(g) e_H f(g^{-1}) ; f \text{ es Homo}$$

$$f(x) = f(g g^{-1})$$

$$f(x) = f(e_g)$$

$$f(x) = e_H$$

$$\therefore x \in \text{Ker}(f)$$

$$\therefore \text{Ker}(f) \triangleleft G$$

3.- Si $H \triangleleft G$, demostrar que G/H es conmutativo ssi

$$\forall a, b \in G, a b a^{-1} b^{-1} \in H.$$

$\Rightarrow$] Hipótesis: G/H es conmutativo.

$$\text{Tesis} : a b a^{-1} b^{-1} \in H ; \forall a, b \in G,$$

Si G/H es conmutativo se tiene:

$$a H b H = b H a H$$

$$a b H = b a H ; / (b a)^{-1}$$

$$a b H (b a)^{-1} = H ; H \triangleleft G$$

$$a b (b a)^{-1} H_1 = H$$

$$a b a^{-1} b^{-1} \in H$$

$$\therefore a b a^{-1} b^{-1} \in H$$

* De manera similar se demuestra $\Leftarrow$].

4.- Si $H \triangleleft G$, probar que:

$$\begin{aligned}\varphi: G &\rightarrow G/H \\ g &\rightarrow \varphi(g) := gH\end{aligned}$$

Es un epimorfismo y demostrar que $\text{Ker}(\varphi) = H$

- Por ver si φ es un Homomorfismo

$\forall g, g_1 \in G$, se tiene:

$$\begin{aligned}\varphi(g g_1) &= g g_1 H, H \triangleleft G \\ &= g H g_1 H \\ &= \varphi(g) \varphi(g_1)\end{aligned}$$

$\therefore \varphi$ es Homo.

- Por ver si φ es un epimorfismo.

$\forall gH \in G/H$ debe existir un $a \in G$, tal que $\varphi(a) = gH$

Basta considerar un $a = g$

$\therefore \varphi$ es epimorfismo

- Por ver si $\text{Ker}(\varphi) = H$

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{ g \in G / \varphi(g) = H \} \\ &= \{ g \in G / gH = H \} \\ &= \{ g \in G / g \in H \}\end{aligned}$$

$\therefore \text{Ker}(\varphi) = H$

5.- Si $H \leq G$ y $N \triangleleft G$, demostrar que $H \cap N \triangleleft H$

- Por demostrar que $H \cap N \leq H$

-Si $x, y \in H \cap N$ P.D. $xy \in H \cap N$

$$\text{Si } x \in H \cap N \Rightarrow x \in H \wedge x \in N$$

$$\text{Si } y \in H \cap N \Rightarrow y \in H \wedge y \in N$$

Como H y N son subgrupos de G , entonces

$$xy \in H \wedge xy \in N$$

$$\therefore xy \in H \cap N$$

Si $x \in H \cap N$ P.D. $x^{-1} \in H \cap N$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in H \cap N &\rightarrow x \in H \wedge x \in N \\ x^{-1} \in H, (H \leq G) &\wedge x^{-1} \in N, (N \triangleleft G, N \leq G) \\ \therefore x^{-1} &\in H \cap N \end{aligned}$$

$$\therefore H \cap N \leq H$$

- Ahora debemos demostrar. $H \cap N \triangleleft H$, es decir,

Por demostrar que $h H \cap N h^{-1} \subseteq H \cap N$

Si $x \in h H \cap N h^{-1}$

$$\Rightarrow x = h a h^{-1} \quad ; \text{ Con } a \in H \cap N$$

$$\Rightarrow x = h a h^{-1} \in H \quad \text{Cuando } a \in H, y$$

$$\Rightarrow x = h a h^{-1} \in N \quad \text{Cuando } a \in N, N \triangleleft G$$

$$\therefore x \in H \wedge x \in N$$

$$\therefore x \in H \cap N$$

$$\therefore H \cap N \triangleleft H$$

7.4.- Autoevaluación 7

1.- Si G es un grupo abeliano y $H \triangleleft G$ demostrar que G/H es abeliano ¿es verdadera la proposición recíproca?

2.- Demostrar que la intersección de dos subgrupos normales de un grupo G es un subgrupo normal de G .

3.- $\text{Int } G := \{ f : G \xrightarrow{\text{Aut}} G / f_g(x) = g x g^{-1}, \forall g \in G \}$, entonces $\text{Int } G \triangleleft \text{Aut } G$.

4.- $G' = \langle \{a^{-1} b^{-1} a b; a, b \in G\} \rangle \triangleleft G$. Donde G es un grupo, G' recibe el nombre de grupo derivado con $a^{-1} b^{-1} a b$ un conmutador de a y b ($ab = ba(a^{-1} b^{-1} a b)$).

5.- Demostrar: Si $G = \langle a \rangle \Rightarrow H \triangleleft G, \forall H \leq G$.

6.- Sean $H, K \triangleleft G$ y $H \leq K$, entonces $K/H \triangleleft G/H$.