

módulo 8:

8.1.- ISOMORFIA

El concepto de isomorfismo es de gran relevancia en la teoría de grupos, ya que dos grupos isomorfos deben tener exactamente la misma estructura, casi atreviéndonos a afirmar que son un mismo grupo, salvo el cambio de nombres de sus elementos, pues, entre ellos existe una biyección que además conserva la operación.

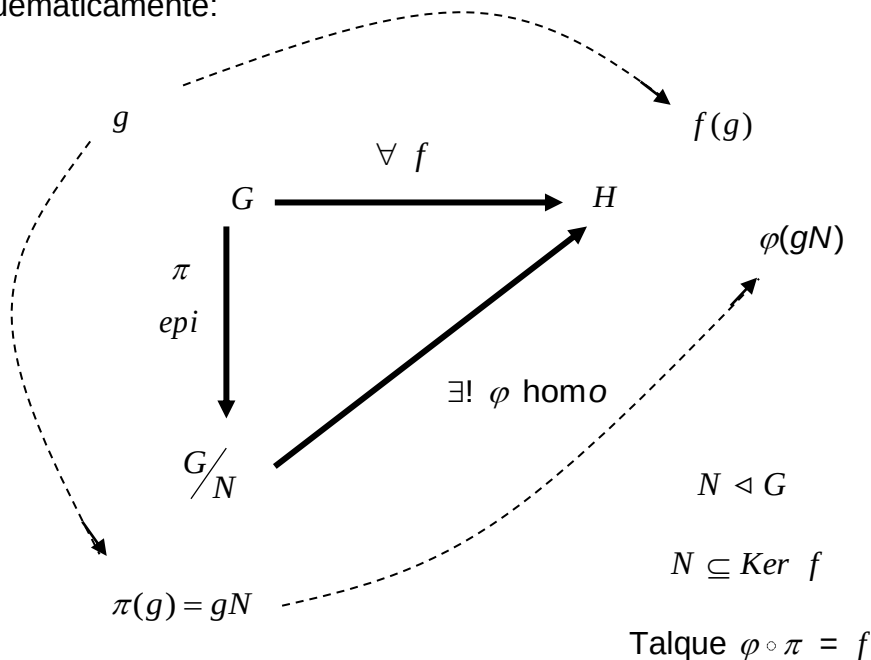
Por lo anterior cabe esperar que un isomorfismo mantenga invariantes las propiedades de un grupo a otro, es decir, dos grupos isomorfos deben tener las mismas propiedades. Por ejemplo, si uno de los grupos es abeliano, el otro que es isomorfo a él también deba serlo o si uno de ellos es un grupo cíclico, el otro debe ser también cíclico, etc.

Es precisamente en este capítulo donde se debe obtener la mayor capacidad de abstracción para lograr comprender todo lo acá expuesto. Este capítulo cuenta con Teoremas de suma importancia y ejemplos de su aplicación, que en un principio pueden parecer complicados, pero a medida que se vayan madurando los conceptos todo se verá con mayor claridad.

8.2.- Teorema Fundamental de Homomorfismo de Grupos, TFH.

Sea G un grupo y $N \triangleleft G$. Para cada homomorfismo $f: G \rightarrow H$ tal que $N \subseteq \text{Ker } f$, entonces existe un único homomorfismo $\varphi: G/N \rightarrow H$, tal que $\varphi \circ \pi = f$, donde $\pi: G \rightarrow G/N$ es un epimorfismo (epimorfismo canónico o natural).

Esquemáticamente:



Se define $\varphi: G/N \rightarrow H$, tal que $\forall gN \in G/N$, $\varphi(gN) := f(g)$

- 1) Por demostrar que φ está bien definida
- 2) φ es homomorfismo
- 3) $\varphi \circ \pi = f$
- 4) φ es única

Demostración:

1) Existencia: Definamos $\varphi: G/N \rightarrow H$ tal que $\forall gN \in G/N$, $\varphi(gN) := f(g)$

Por ver que φ está bien definida:

$\forall g_1N, g_2N \in G/N$, si $g_1N = g_2N$, entonces:

$$\begin{aligned}
 g_2^{-1}g_1 &\in N \\
 \text{pero } N &\subseteq \text{Ker } f, \\
 \text{entonces } g_2^{-1}g_1 &\in \text{Ker } f
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(g_2^{-1}g_1) = e_u$$

Pero f es homo, luego

$$\begin{aligned} f(g_2^{-1}g_1) &= f(g_2^{-1}) f(g_1) = e_H ; f \text{ es homo} \\ &= (f(g_2))^{-1} f(g_1) = e_H \\ &\quad \Downarrow \\ f(g_1) &= f(g_2) \end{aligned}$$

$$\therefore \varphi(g_1N) = \varphi(g_2N)$$

2) Por ver que φ es homomorfismo

$\forall g_1N, g_2N \in G/N$, por ser $N \triangleleft G$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi(g_1N \cdot g_2N) &= \varphi(g_1g_2N) \\ &= f(g_1g_2) , \text{ pero } f \text{ es homo} \\ &= f(g_1) \cdot f(g_2) \\ &= \varphi(g_1N) \cdot \varphi(g_2N) \end{aligned}$$

$\therefore \varphi$ es homomorfismo

3) Por ver que $\varphi \circ \pi = f$

$$\forall g \in G, (\varphi \circ \pi)(g) = \varphi(\pi(g)) = \varphi(gN) = f(g)$$

$$\therefore \varphi \circ \pi = f$$

4) Unicidad

Supongamos que $\exists \psi : G/N \rightarrow H$, tal que $\psi(gN) = f(g)$. Se tiene

$$\forall g \in G, \psi(gN) = \psi(\pi(g)) = (\psi \circ \pi)(g) = f(g) = \varphi(gN).$$

$\therefore \psi = \varphi$, es única

Luego está demostrado el Teorema Fundamental.

8.3.- Corolarios del Teorema Fundamental de Homomorfismo

8.3.1.- Corolario1: En el TFH,
Si $N = \text{Ker } f$, entonces φ es monomorfismo.

En efecto:

Basta ver que φ es inyectivo, por demostrar que si $\varphi(g_1N) = \varphi(g_2N)$ entonces $g_1N = g_2N$.

Consideremos:

$$\begin{aligned}
 &\text{Si } \varphi(g_1N) = \varphi(g_2N) \\
 \Rightarrow & f(g_1) = f(g_2) \quad ; \text{ en el grupo } H \\
 \Rightarrow & (f(g_2))^{-1} \cdot f(g_1) = e_H \quad ; f \text{ es homo} \\
 \Rightarrow & f(g_2^{-1}g_1) = e_H \\
 \Rightarrow & g_2^{-1}g_1 \in \text{Ker } f \\
 & \text{pero } \text{Ker } f = N \\
 & \text{entonces } g_2^{-1}g_1 \in N \\
 \Rightarrow & g_1N = g_2N \\
 & \therefore \varphi \text{ es monomorfismo}
 \end{aligned}$$

8.3.2.- Corolario2: Primer Teorema de Isomorfía

Del TFH y Corolario 1, se tiene: $G/N \cong \text{Im } f$.

Recuerde $f(G) = \text{Im } f \leq H$.

Corolario2.1 Del TFH, si se verifica corolario1 y f es un epimorfismo, entonces, $G/\text{ker } f \cong H$

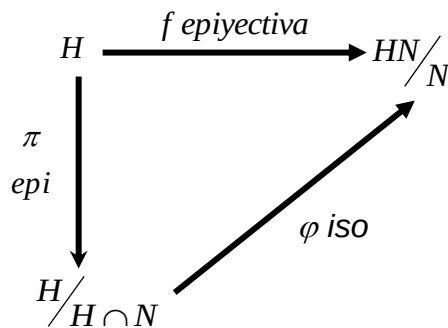
8.3.3.- Segundo Teorema de Isomorfía

Sea $N, H \leq G$ y $N \triangleleft G$, tal que $H \cap N \triangleleft H$ y $N \triangleleft HN$, entonces:

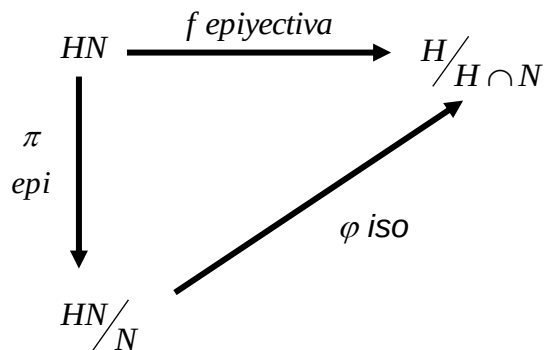
$$H/H \cap N \cong HN/N$$

Esquemáticamente se tiene:

Primer esquema:



Segundo esquema:



Para demostrar el segundo teorema de isomorfía usaremos el primer esquema, para ello:

- 1) Definir f
- 2) Ver que f definida es epimorfismo
- 3) Verificar $\text{Ker } f = H \cap N$
- 4) Aplicar el Teorema Fundamental de Homomorfismo (Primer Teorema de Isomorfismo).
Se verifica $\text{Ker } \pi = \text{Ker } f$

Demostración:

1)

i) Definamos $f: H \rightarrow HN/N$, tal que, $\forall h \in H$, $f(h) = hnN$. Por ser $N \triangleleft G$ se tiene:

$$\begin{aligned} hnN &= hNnN \\ &= hNN \\ &= hN \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \forall h \in H, f(h) := hnN$$

ii) Por ver que f es homomorfismo

$\forall h_1, h_2 \in H$, por demostrar que $f(h_1h_2) = f(h_1) \cdot f(h_2)$, luego tenemos:

$$\begin{aligned} f(h_1h_2) &= h_1h_2N, \text{ pero } N \triangleleft G \\ &= h_1Nh_2N \\ &= f(h_1) \cdot f(h_2) \end{aligned}$$

$\therefore f$ es homomorfismo

2) Por ver que f es epimorfismo

$\forall hN \in HN/N$, debe existir $x \in H$ tal que $f(x) = hN$

Basta considerar $x = h$, talque $f(h) = hN$

3)

i) Por demostrar que $\text{Ker } f = H \cap N$

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{h \in H : f(h) = e_{HN/N}\} \\ &= \{h \in H : f(h) = N\} \\ &= \{h \in H : hN = N\} \\ &= \{h \in H : h \in N\} \\ &= H \cap N \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Ker } f = H \cap N$$

ii) Por otro lado, debemos verificar que $\text{Ker } \pi = \text{Ker } f$, tenemos:

$$\begin{aligned}\text{Ker } \pi &= \{h \in H : \pi(h) = e_{H/H \cap N}\} \\ &= \{h \in H : h(H \cap N) = H \cap N\} \\ &= \{h \in H : h \in (H \cap N)\} \\ &= H \cap N\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Ker } \pi = \text{Ker } f$$

Luego por el Teorema Fundamental de Homomorfismos y el Primer Teorema de Isomorfía, se tiene que:

$$H/H \cap N \cong HN/N$$

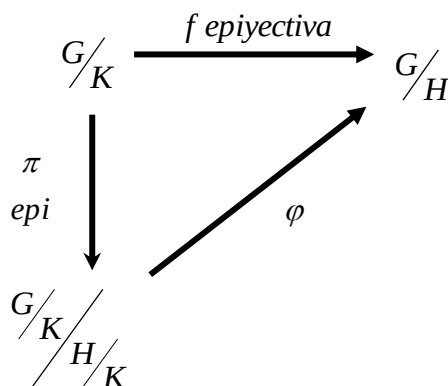
8.3.4.- Tercer Teorema de Isomorfa

Si $H, K \triangleleft G$, $K \leq H$ y $H/K \triangleleft G/K$, entonces:

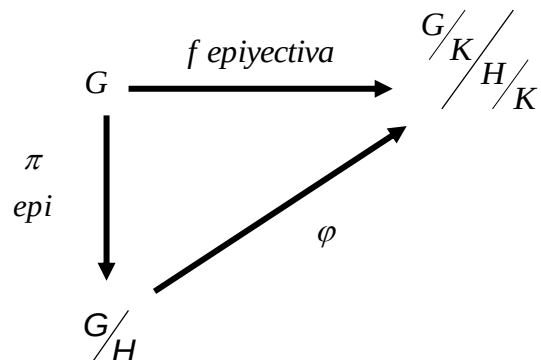
$$G/H \cong \frac{G/K}{H/K}$$

Para este teorema podemos considerar los siguientes esquemas:

Primer esquema:



Segundo esquema:



Utilizaremos el primer esquema para su demostración

1) Definamos $f: G/K \rightarrow G/H$ tal que $\forall gK \in G/K$, $f(gK) := gH$, por ver que f está bien definida.

Tenemos:

$$\begin{aligned} g_1K &= g_2K \\ \Rightarrow g_2^{-1}g_1 &\in K, \text{ pero } K \subseteq H \text{ pues } K \leq H \\ \Rightarrow g_2^{-1}g_1 &\in H \\ \Rightarrow g_1H &= g_2H \\ \therefore f(g_1K) &= f(g_2K) \end{aligned}$$

2) i) Por demostrar que $\text{Ker } f = H/K$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{gK \in G/K : f(gK) = e_{G/H}\} \\ &= \{gK \in G/K : gH = e_{G/H}\} \\ &= \{gK \in G/K : gH = H\} \\ &= \{gK \in G/K : g \in H\} \\ &= \{gK \in G/K : gK \in H/K\} \\ &= H/K \\ \therefore \text{Ker } f &= H/K \end{aligned}$$

ii) Por otro lado debemos verificar que $\text{Ker } \pi = \text{Ker } f$, luego tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \pi &= \left\{ gK \in G/K : \pi(gK) = e_{G/K/H/K} \right\} \\ &= \{gK \in G/K : (gK)H/K = H/K\} \\ &= \{gK \in G/K : (gK) \in H/K\} \\ &= H/K = \text{Ker } f \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Ker } \pi = \text{Ker } f$$

Luego por el Teorema Fundamental de Homomorfismo y el Primer Teorema de Isomorfía, se tiene que

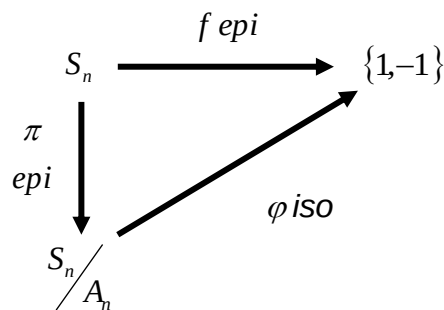
$$\frac{G/K}{H/K} \cong \frac{G}{H}$$

Quedando demostrado el Tercer Teorema de Isomorfía.

Ejemplo 1: Demuestre vía Teorema Fundamental de Homomorfismo que:

$$S_n/A_n \cong (\{1, -1\}, \cdot)$$

Elaboraremos el diagrama para facilitar la demostración:



Ahora debemos:

- i) Definir f epiyectiva
- ii) Verificar que $\text{Ker } f = A_n$

Demostración:

i) Basta definir $f : S_n \rightarrow (\{1, -1\}, \cdot)$, tal que $\forall \sigma \in S_n$, tenemos:

$$f(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es impar} \end{cases}$$

Claramente f es homomorfismo y epiyectiva.

ii)

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{ \sigma \in S_n : f(\sigma) = 1 \} \\ &= \{ \sigma \in S_n : \sigma \text{ es par} \} \\ &= A_n \end{aligned}$$

$$\therefore S_n / A_n \cong (\{1, -1\}, \cdot)$$

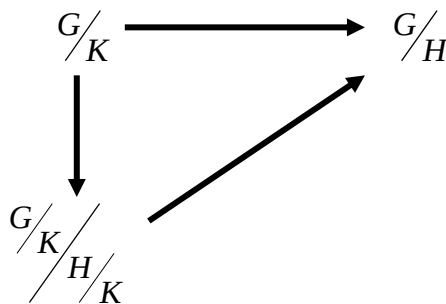
Ejemplo 2: Sea $G = \mathbb{Z}_{18}$, $H = \langle \bar{3} \rangle$, $K = \langle \bar{6} \rangle$, donde $H, K \leq G$, $K \triangleleft G$, $H/K \triangleleft G/K$. Establecer isomorfía según el Tercer Teorema.

Primero debemos encontrar los elementos de los grupos dados

$$\begin{aligned} G = \mathbb{Z}_{18} &= \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17} \} \\ H &= \{ \bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15} \} \\ K &= \{ \bar{0}, \bar{6}, \bar{12} \} \\ G/H &= \{ H, \bar{1}+H, \bar{2}+H \} \\ H/K &= \{ K, \bar{3}+K \} \\ G/K &= \{ K, \bar{1}+K, \bar{2}+K, \bar{3}+K, \bar{4}+K, \bar{5}+K \} \end{aligned}$$

Fácilmente podemos verificar que $K \triangleleft G$ y $H/K \triangleleft G/K$.

Esquemáticamente tenemos:



donde
$$G/K/H/K = \{H/K, \bar{1}+H/K, \bar{2}+H/K\}$$

Definir $f: G/K \rightarrow G/H, \forall gK \in G/K, f(gK) = gH$

Caractericemos un f epimorfismo, luego tenemos:

$$f: G/K \rightarrow G/H$$

$$\begin{aligned} K &\mapsto H \\ \bar{1}+K &\mapsto \bar{1}+H \\ \bar{2}+K &\mapsto \bar{2}+H \\ \bar{3}+K &\mapsto H \\ \bar{4}+K &\mapsto \bar{1}+H \\ \bar{5}+K &\mapsto \bar{2}+H \end{aligned}$$

Definir π epimorfismo

$$\pi: G/K \rightarrow G/K/H/K$$

$$\begin{aligned} K &\mapsto H/K \\ \bar{1}+K &\mapsto (\bar{1}+K)+H/K \\ \bar{2}+K &\mapsto (\bar{2}+K)+H/K \\ \bar{3}+K &\mapsto H/K \\ \bar{4}+K &\mapsto (\bar{1}+K)+H/K \\ \bar{5}+K &\mapsto (\bar{2}+K)+H/K \end{aligned}$$

Según el Teorema Fundamental de Homomorfismos, el diagrama es:

$$\varphi: \frac{G/K}{H/K} \rightarrow G/H$$

$$\begin{aligned} H/K &\mapsto H \\ (\bar{1} + K) + H/K &\mapsto \bar{1} + H \\ (\bar{2} + K) + H/K &\mapsto \bar{2} + H \end{aligned}$$

Es un isomorfismo

$$\therefore \frac{G/K}{H/K} \cong G/H$$

8.3.5.- Teorema de Cayley:

Sea G un grupo finito de orden n ,
entonces G es isomorfo a algún
subgrupo de S_n .

Cayley, Arthur (1821-1895)

Matemático británico. Hijo de comerciantes, los primeros ocho años de su infancia transcurrieron en San Petersburgo.

Uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, Cayley publicó a lo largo de su vida más de novecientos artículos científicos. Considerado como uno de los padres del álgebra lineal, introdujo el concepto de matriz y estudió sus diversas propiedades. Entre 1854 y 1878 escribió diversos artículos en los que desarrolló por vez primera la teoría de los invariantes.

Demostración:

Sea G un grupo cualquiera. Definamos la función:

$$\begin{aligned}\phi: G &\rightarrow S_G \\ \phi(g) &= xg, \forall x \in G\end{aligned}$$

donde S_G es el grupo de permutaciones de los elementos de G .

La demostración consistirá en establecer que ϕ es un isomorfismo de G sobre $\phi(G)$. Sabemos que $\phi(G) \leq S_G$, así $\phi(G)$ es un grupo de permutaciones. De acuerdo con estas ideas demostraremos los siguientes puntos:

(i) $\forall g \in G, \phi(g)$ es una permutación.

(ii) ϕ es un Homomorfismo.

(iii) ϕ es inyectiva (1a 1).

En efecto:

(i) $\forall g \in G, \phi(g)$ es una permutación.

- $\phi(g)$ es inyectiva:

$$\begin{aligned}\phi(g)(x) &= \phi(g)(y) \\ xg &= yg \\ x &= y\end{aligned}$$

- $\phi(g)$ es epiyectiva :

Sea $y \in G$, entonces $\exists x \in G$ tal que:

$$\phi(g)(x) = y$$

Basta tomar $x = yg^{-1}$, en efecto:

$$\phi(g)(x) = (yg^{-1}) \cdot g = y \cdot (g^{-1} \cdot g) = y$$

(ii) ϕ es un Homomorfismo.

$$\begin{aligned} \phi(gh)(x) &= x \rightarrow (gh)x \\ &= (x \rightarrow hx)(hx \rightarrow ghx) \\ &= \phi(g)(\phi(h)(x)) \\ &= \phi(g)\phi(h)(x) \end{aligned}$$

(iii) ϕ es inyectiva (1-1).

$$\begin{aligned} \text{Ker } \phi &= \{g \in G / \phi(g) = i_{S_G}\} \\ &= \{g \in G / gx = x, \forall x \in G\} \\ &= \{g \in G / g = e\} \\ &= \{e\} \end{aligned}$$

Luego de (i), (ii) y (iii) ϕ es un monomorfismo, por lo tanto es un isomorfismo de G en $\phi(G)$.

Así, $G \simeq \phi(G)$, y como $\phi(G) \leq S_G$, entonces se demuestra que G es isomorfo a un grupo de permutaciones.

Generalizando:

Si G es un grupo, entonces existe un conjunto $X \neq \Phi$, tal que G es isomorfo a algún subgrupo de S_X .

8.4.- Guía nº 8

1.- Considere los grupos $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ y la función:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}^*, \text{ donde } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ -1 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

a) Demostrar que f es homomorfismo

b) Encontrar $\text{Ker}(f)$

c) Hallar el isomorfismo $\mathbb{Z} / \text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$

a) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, por demostrar que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

Caso 1:

Si x, y son pares, tenemos que $f(x) = 1$ y $f(y) = 1$, entonces

$$f(x+y) = 1 = 1 \cdot 1 = f(x) \cdot f(y)$$

Caso 2:

Si x, y son impares, tenemos que $f(x) = -1$ y $f(y) = -1$, luego

$$f(x+y) = 1 = (-1) \cdot (-1) = f(x) \cdot f(y)$$

Caso 3:

Si x es par e y es impar, entonces $f(x) = 1$ y $f(y) = -1$, por lo tanto

$$f(x+y) = -1 = 1 \cdot (-1) = f(x) \cdot f(y)$$

Caso 4:

Si x es impar e y es par, tenemos que $f(x) = -1$ y $f(y) = 1$, entonces

$$f(x+y) = -1 = (-1) \cdot 1 = f(x) \cdot f(y)$$

$\therefore, f$ es homomorfismo.

b) Encontrando $\text{Ker}(f)$, tenemos que:

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = e_{\mathbb{Q}^*}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = 1\}$$

$$= 2\mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{Ker}(f) = 2\mathbb{Z}$$

c) Hallando el isomorfismo $\mathbb{Z}/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$

Sea:

$$\phi: \mathbb{Z}/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$$

$$\begin{aligned} 0 + 2\mathbb{Z} &\mapsto 1 \\ 1 + 2\mathbb{Z} &\mapsto -1 \end{aligned}$$

Es el isomorfismo pedido, luego

$$\mathbb{Z}/\text{Ker}(f) = \{0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}\}$$

2.- Aprovechando que $\log: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ es un homomorfismo. Demostrar que $(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$.

Debemos demostrar que $\log$ es biyectivo, sabiendo que ya es un homomorfismo, entonces verificaremos lo siguiente:

a) $\log$ es inyectivo

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $\log(x) = \log(y)$, por demostrar que $x = y$

Luego tenemos:

$$\begin{aligned} \log(x) &= \log(y) \quad / \quad \exp \\ (\exp \circ \log)(x) &= (\exp \circ \log)(y) \\ Id(x) &= Id(y) \\ x &= y \end{aligned}$$

$\therefore \log$ es inyectivo.

b) $\log$ es epiyectivo

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, \text{ talque } \log(y) = x$. Supongamos que $\log(y) = x$, tenemos por definición que $10^x = y$, entonces basta tomar $y = 10^x$, talque $\log(10^x) = x$.

$\therefore \log$ es epiyectivo.

Podemos concluir de a) y b) que $\log$ es biyectivo. Luego de ambas condiciones tenemos que $\log$ es un isomorfismo de grupos.

$$\therefore (\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +).$$

3.- Si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo, demostrar que f^{-1} también lo es.

Como f , por hipótesis es isomorfismo, f es biyectiva; esto nos dice que f^{-1} también es biyectiva, de lo que podemos concluir que basta demostrar sólo que f^{-1} sea homomorfismo. Luego tenemos;

$$\begin{aligned} f^{-1} : H \rightarrow G. \text{ Donde, } \forall a, b \in H \Rightarrow \exists u \in G \text{ tal que } f(u) = a \Rightarrow f^{-1}(a) = u \\ \Rightarrow \exists v \in G \text{ tal que } f(v) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = v \end{aligned}$$

Luego;

$$\begin{aligned} f^{-1}(a \cdot b) &= f^{-1}(f(u) \cdot f(v)) ; f \text{ es homomorfismo} \\ &= f^{-1}(f(u \cdot v)) \\ &= u \cdot v \\ &= f^{-1}(a) \cdot f^{-1}(b) \end{aligned}$$

$\therefore f^{-1}$, es homomorfismo.

Finalmente podemos concluir que si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo $f^{-1} : H \rightarrow G$. También lo es.

4.- Si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo, demostrar que G es abeliano si y sólo si H es abeliano.

$\Rightarrow$] Hipótesis: G es abeliano, $f : G \rightarrow H$ es isomorfismo
Tesis: H es abeliano.

Demostración

Si $a \in H \Rightarrow \exists p \in G$ tal que $f(p) = a$, f es epiyectiva

Si $b \in H \Rightarrow \exists q \in G$ tal que $f(q) = b$, f es epiyectiva.

Como f es epiyectiva tenemos:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= f(p) \cdot f(q) ; f \text{ es homomorfismo} \\ &= f(p \cdot q) : G \text{ es abeliano} \\ &= f(q \cdot p) \\ &= f(q) \cdot f(p) \\ &= b \cdot a \end{aligned}$$

$\therefore H$ es un grupo abeliano.

$\Leftarrow$] Hipótesis: H es abeliano.
Tesis: G es abeliano

Demostración:

$\forall x, y \in G$, por demostrar que $x \cdot y = y \cdot x$, luego tenemos lo siguiente considerando que f es homomorfismo.

$$\begin{aligned} f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \quad / H \text{ es abeliano} \\ &= f(y) \cdot f(x) \\ &= f(y \cdot x) \\ \therefore x \cdot y &= y \cdot x \end{aligned}$$

$\therefore G$ es un grupo abeliano.

Finalmente, si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo, entonces G es abeliano si y sólo si H es abeliano

8.5.- Autoevaluación 8

1.- Sea $\tau_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\tau_{a,b}(x) = ax + b$ y $G = \{\tau_{a,b} / a \neq 0\}$, con la composición de funciones.

- Demostrar que $\phi: G \rightarrow G$ es homomorfismo.
 $\tau_{a,b} \mapsto \phi(\tau_{a,b}) = \tau_{a,0}$
- Encontrar $\text{Ker}(\phi)$ y $\text{Im}(\phi)$.
- Encontrar el isomorfismo $G/\text{Ker}(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi)$

2.- Sea el grupo $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ con la adición de matrices.

Demostrar que $\phi: G \rightarrow \mathbb{Z}$, donde $\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$ es un epimorfismo de G en los enteros con la adición. Encontrar $\text{Ker}(\phi)$ y probar que $G/\text{Ker}(\phi) \cong \mathbb{Z}$.

3.- Probar que la composición de isomorfismos, es un isomorfismo.

4.- Si $H \triangleleft G$, probar que $\phi: G \rightarrow G/H$, donde $\phi(g) = gH$, es un epimorfismo y demostrar que $\text{Ker}(\phi) = H$

5.- Probar que todo grupo cíclico de orden n es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$

6.- Si $G = \mathbb{Z}_{36}$, $H = \langle \bar{6} \rangle$, $N = \langle \bar{9} \rangle$. Establecer una correspondencia entre $H + N/N$ y $H/H \cap N$, usando el Teorema Fundamental de Homomorfismo.

7.- Sea $S = \{x \in \mathbb{R}, / x \neq -1\}$ y la operación definida en S como $a * b = a + b + a \cdot b$. Demostrar que: $(S, *) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$

8.- Si $f \in \text{Hom}(G, H)$ de grupos, entonces probar que $\text{Ker } f \triangleleft G$.

9.- Si G y H grupos y $K \subseteq H$, $f \in \text{Hom}(G, H)$, entonces $f^{-1}(K) \subseteq G$. Si $K \triangleleft H$ entonces $f^{-1}(K) \triangleleft G$.

- 10.- Sea G un grupo $N \triangleleft G$, $g \in G$. Demuestre que $\text{ord}(gN)$ divide al $\text{ord}(G)$.
- 11.- Considerando $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \langle \bar{2} \rangle$, $K = \langle \bar{4} \rangle$. Caracterice el segundo teorema de Isomorfía.
- 12.- Determine *Kernel* e *Imagen* de los siguientes Homomorfismos.
- a) $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ tal que $k \mapsto nk$, $n \in \mathbb{Z}$, fijo.
 - b) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ tal que $k + 6\mathbb{Z} \mapsto 2k + 6\mathbb{Z}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
 - c) $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$ dado por $r \mapsto e^{ir}$, $r \in \mathbb{R}$.