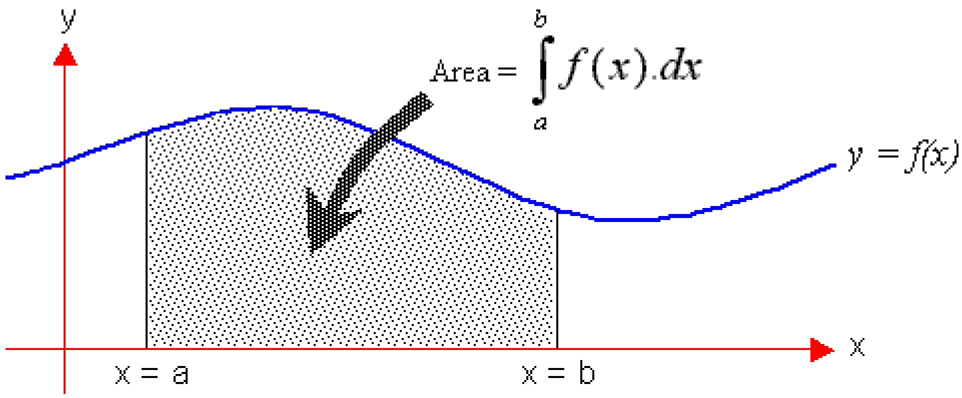
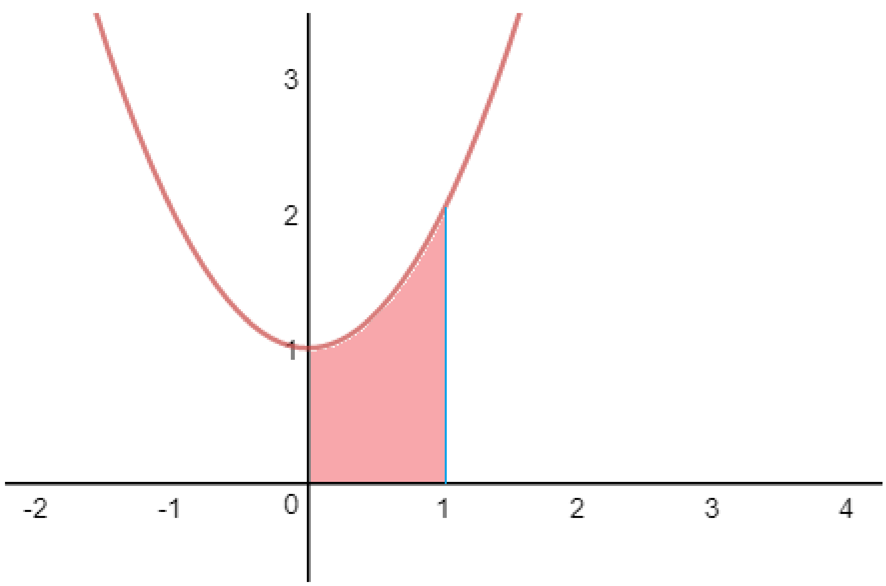
Cálculo de áreas

Como vimos anteriormente la integral definida es el área bajo una curva



Ejemplo

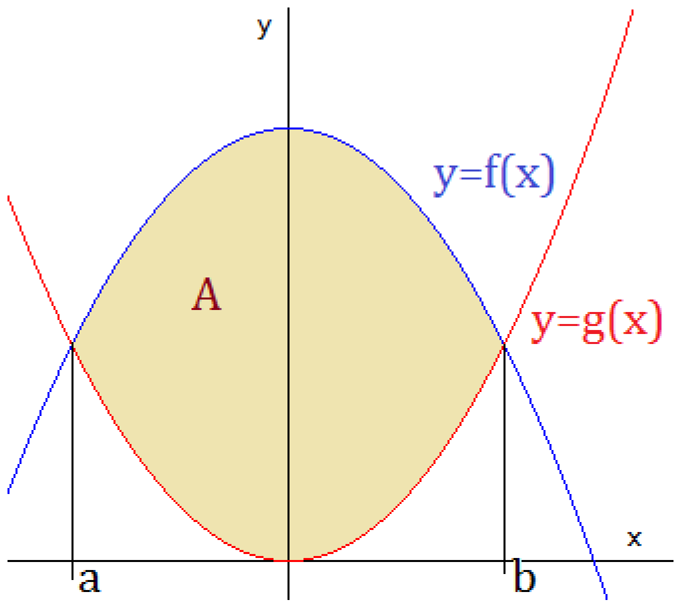
$$Calcular\ el\ área\ bajo\ la\ curva\ de\ la\ función\ f(x) = x^2 + 1\ en\ el\ intervalo\ [0,1]$$



$$A = \int_0^1 (x^2+1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)_0^1 = \left(\frac{1}{3}+1\right) - (0+0) = \frac{4}{3}$$

Observación

$$Sean\ f\ y\ g\ funciones\ dadas\ como\ en\ la\ figura\ siguiente$$

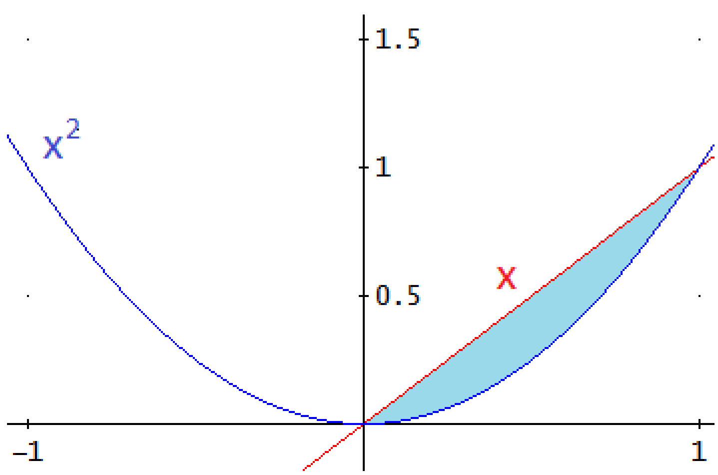


$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Ejemplos

$1. -Calcular\ el\ área\ comprendida\ entre\ las\ curvas\ de\ las\ funciones:$

$$f(x) = x \quad y \quad g(x) = x^2$$



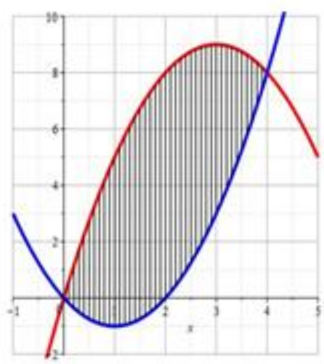
Intersecciones

$$f(x) = g(x) \quad x^2 = x \qquad x^2 - x = 0 \quad x(x-1) = 0 \qquad x = 1 \;\; o \;\; x = 0$$

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{6}$$

$2.-$ *Calcular el área encerrada por las curvas* $y = 6x - x^2 \qquad y = x^2 - 2x$

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$



En primer lugar debemos obtener las intersecciones de las curvas igualando

Esto es: $\quad 6x - x^2 = x^2 - 2x$

$$8x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(4 - x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \; o \; x = 4$$

$$A = \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)]dx$$

Tarea hacer todos los cálculos

$3.-$*Calcular el área de la región limitada por las gráficas de las funciones:*

$$y = x^2 \quad y = -x + 2 \quad y = 0 \qquad considerar\; x > 0$$

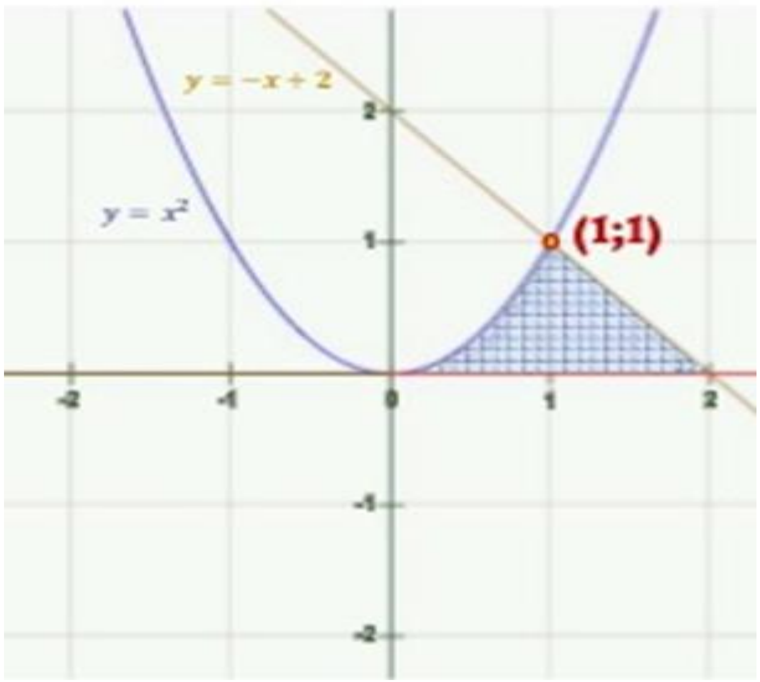
Como lo muestra la siguiente gráfica

Igualando las ecuacione para encontrar las intersecciones se tiene:

$$x^2 = -x + 2 \qquad o \;\; x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1)=0 \qquad se\ tiene\ x=-2 \quad o \quad x=1$$

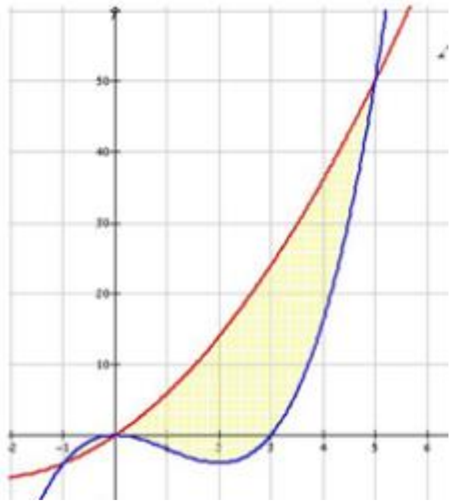
$$El\ punto\ de\ intersección\ a\ considerar\ es\ \ P=(1,1)$$



$$A=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(-x+2)dx=\left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^1+\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)_1^2=\frac{1}{3}+\left[(-2+4)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}+2-\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$$

$4.-$ *Hallar el área de la región acotada por:* $y = x^3 - 3x^2$ *y por* $y = x^2 + 5x$



Tarea

Puntos de intersección: $x^3 - 3x^2 = x^2 + 5x \qquad x^3 - 4x^2 - 5x = 0$

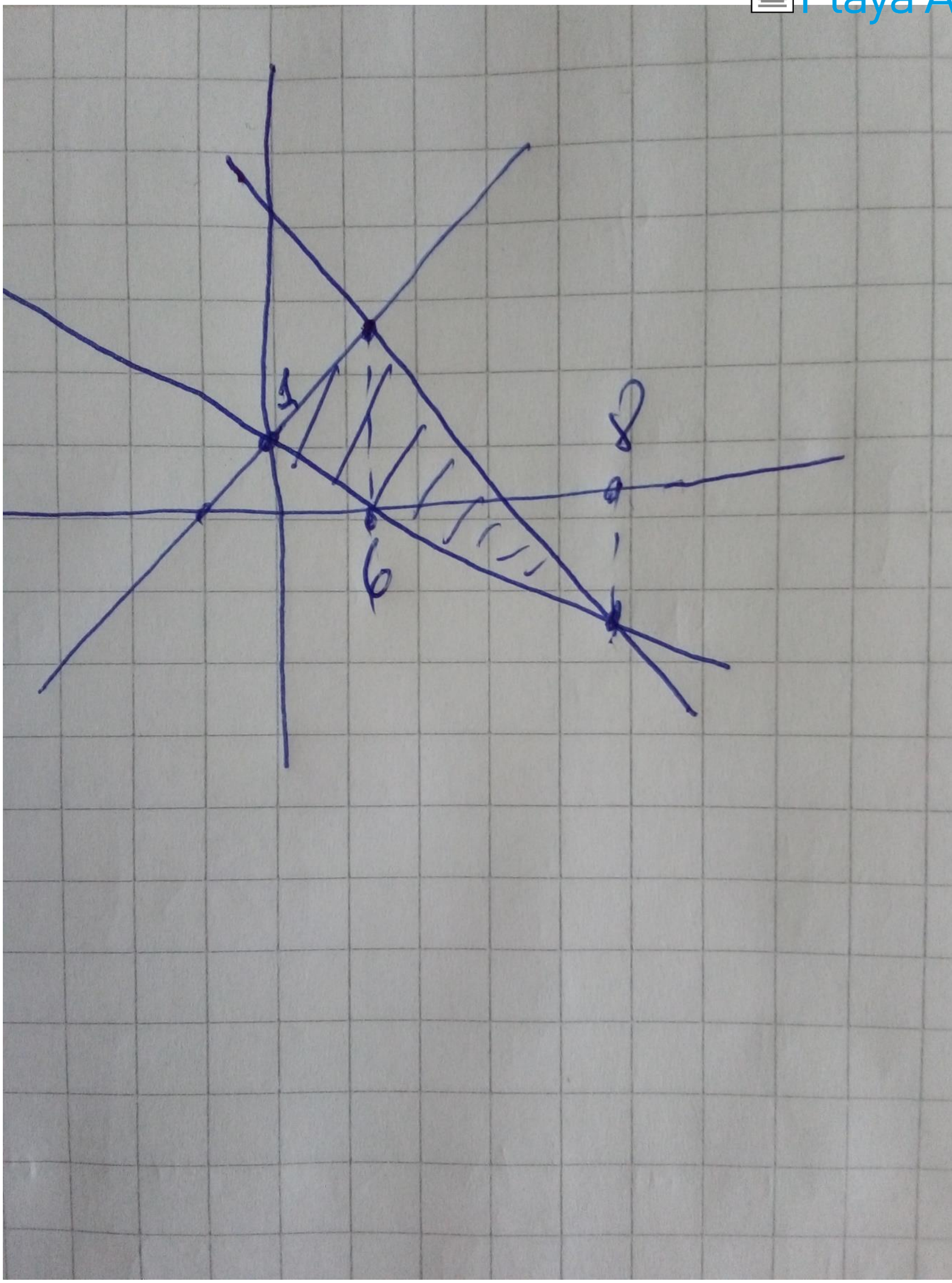
$x(x^2 - 4x - 5) = 0 \qquad x(x-5)(x+1) = 0$ *puntos intersección* $x = 0, x = 5, x = -1$

$$A = \int_{-1}^{0} [(x^3 - 3x^2) - (x^2 + 5x)]dx + \int_{0}^{5} [(x^2 + 5x) - (x^3 - 3x^2)]dx$$

$5.-$ *Calcular el área determinada por las rectas de ecuación:*

$$y = x + 1, \qquad y = -\frac{1}{2}x + 4, \qquad y = -\frac{1}{8}x + 1$$

$$A = \int_{0}^{6} \left[(x+1) - \left(-\frac{1}{8}x + 1\right)\right] dx + \int_{6}^{8} \left[\left(-\frac{1}{2}x + 4\right) - \left(-\frac{1}{8}x + 1\right)\right] dx$$


1
8
6