Integral Definida

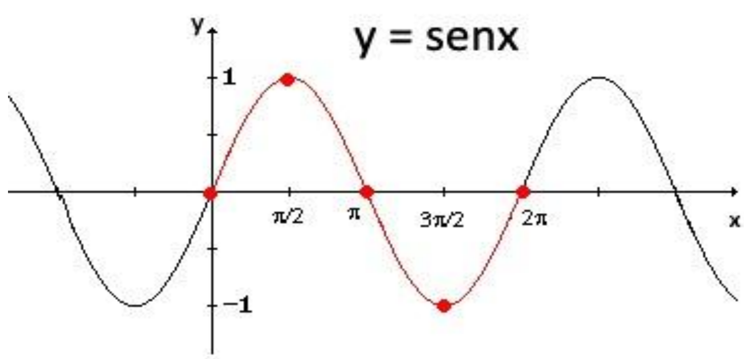
Definición:

$$Sea\ f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad diremos\ que\ f\ es\ \boldsymbol{acotada}\ en\ [a,b]$$

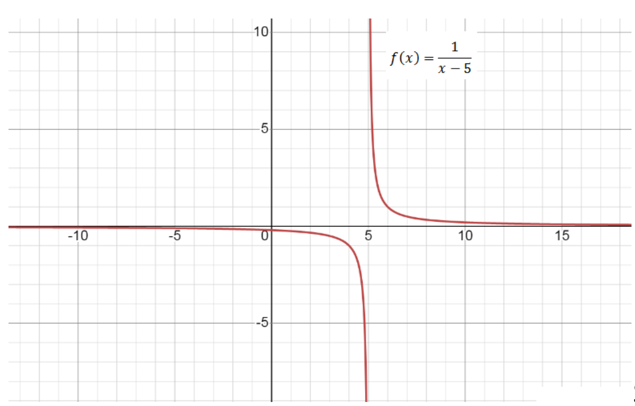
$$si\ existe\ \ M>0\ \ tal\ que\ \ |f(x)|<M\quad \forall x\in[a,b]$$

Ejemplos

1.− $la\ función\ f(x)=senx\ \ es\ acotada\ en\ todo\ \mathbb{R}\quad |senx|\leq 1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$



2.−$la\ función\ f(x)=\frac{1}{x-5}\ \ \ no\ es\ acotada\ en\ ningún\ intervalo\ que\ contiene\ 5$



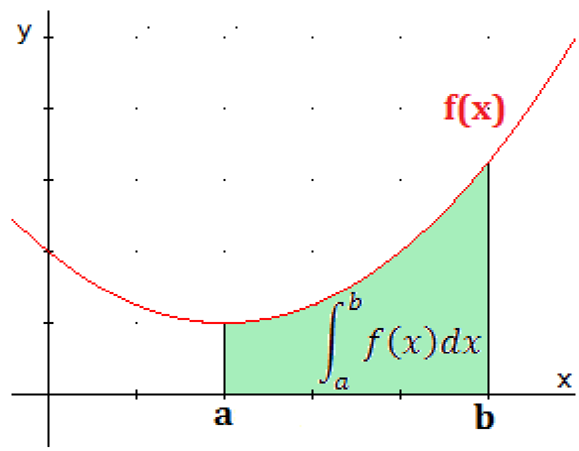
Si

$Supongamos\ que\ f\ es\ acotada\ y\ continua\ en\ el\ intervalo\ [a,b]\ entonces$

$podemos\ decir:$

$$\int_a^b f(x)dx\ \ corresponde, geométricamente, al\ área\ que\ se\ encuentra\ delimitada,$$

$bajo\ la\ curva\ que\ representa\ la\ función\ \ f\ y\ los\ puntos\ en\ la\ abscisa\ a\ y\ b$



$$\int_a^b f(x)dx \quad se\ llama\ la\ integral\ definida\ de\ f\ en\ el\ intervalo\ [a,b]$$

Observación

$1.-\ \ Si\ \int_a^b f(x)dx\ \ existe, entonces\ \ es\ un\ número\ real$

$2.-De\ existir\ \int_a^b f(x)dx \quad se\ dirá\ que\ la\ función\ f\ es\ \boldsymbol{integrable}\ en\ [a,b]$

Propiedades funciones integrables

$$Sean\ f\ \ y\ \ g\ funciones\ integrables\ en\ [a,b]\ \ \ y\ \ \ k \in \mathbb{R}$$

$$1.- \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$2.- \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$3.- \ Si\ a<c<b \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$4.- \int_a^b |f(x)|dx \geq 0$$

Esto significa que la integral definida de una función positiva es un número positivo

$$5.- \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Teorema

Si una función f *es acotada y continua en* $[a,b]$ *entonces* f *es integrable en* $[a,b]$

Observación

Este teorema nos permite tener un conjunto muy grande de funciones integrable

$senx, cosx, e^x$ *y los polinomios son funciones integrables en cualquier intervalo cerrado*

$\sqrt{x}$, lnx *son integrables en cualquier intervalo cerrado dentro de los números positivos*

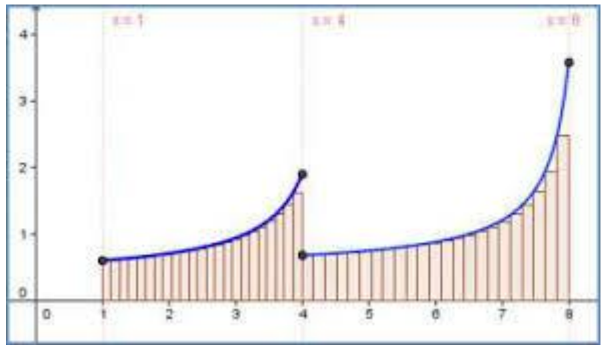
Observación

Un conjunto es contable si es finito o infinito numerable, esto es, que se puede establecer una biyección entre el conjunto y los números naturales

Teorema

Sea A el conjunto de las discontinuidades de f $A \subseteq [a,b]$

$$Si\ f\ es\ acotada\ en\ [a,b]\ y\ A\ es\ contable\ entonces\ f\ es\ integrable\ en\ [a,b]$$



$$Podemos\ observar\ en\ la\ gráfica\ de\ la\ función, existe\ una\ discontinuidad\ en\ 4$$

$$aun\ así\ el\ teorema\ nos\ dice\ que\ f\ es\ integrable, usando\ la\ propiedad\ (3)\ tenemos.$$

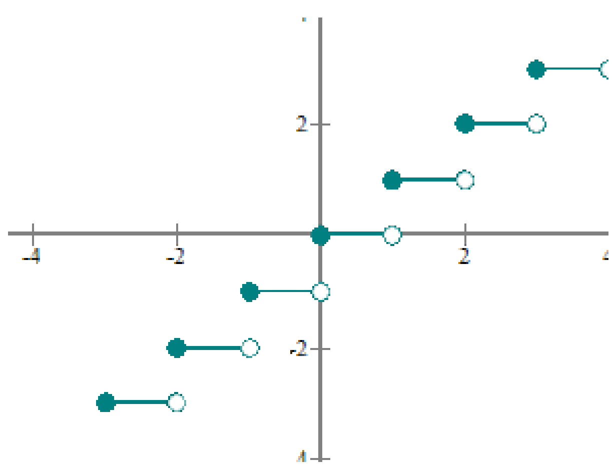
$$\int_1^8 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx$$

Ejemplo

$$Consideremos\ la\ función\ parte\ entera\ \ de\ x\ como\ f(x) = [x]$$

$$[x]: el\ mayor\ entero\ menor\ o\ igual\ a\ x\quad su\ gráfica\ es:$$

$$[3{,}4] = 3 \quad \left[\sqrt[3]{10}\right] = 2 \quad [0{,}002] = 0 \quad [-3{,}001] = -4$$



f *no es continua en todos los números enteros* $\quad$ *pero* f *es aotada luego es integrable*

en cualquier untervalo cerrado $[a,b]$

Calcular: $\quad \displaystyle\int_1^3 f(x)dx$

Esto consiste en calcular simplemente las áreas de los rectángulos

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 3$$

Teorema Fundamental del cálculo

Antes de enunciar el teorema fundamental del cálculo veamos previamente lo siguiente

Teorema

$$Sea\ f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\ \ continua\ y\ aotada\ \ \ y\ \ a < x < b\ \ entonces\ la\ función:$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\ \ es\ continua\ y\ diferenciable\ en\ ]a,b[\ \ y\ además$$

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Ejemplo

$$Sea\ F(x) = \int_1^x e^{t^2}dt \quad para\ \ 1 < x < 4 (puede\ ser\ un\ número\ real\ cualquiera)$$

Como se cumplen todas las condiciones del teorema anterior se tiene $F'(x) = e^{x^2}$

Universidad de Playa Ancha

Teorema Fundamental del cálculo

$$Sea\ g\ una\ función\ continua\ en\ [a,b]\ \ g\ una\ primitiva\ de\ f\ (g' = f)\ entonces$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)}$$

Ejemplo

$$Calcular\ \int_2^5 (3x^2 - 2x + 5)\, dx$$

$$\int (3x^2 - 2x + 5)dx = (x^3 - x^2 + 5x) \qquad Luego:$$

$$\int_2^5 (3x^2 - 2x + 5)dx = (125 - 25 + 25) - (8 - 4 + 10) = 125 - 14 = 111$$

$$\int_2^5 (3x^2 - 2x + 5)\, dx = [x^3 - x^2 + 5x]_2^5$$

Observación

Recordemos un teorema anterior $f\ diferenciable\ \Longrightarrow f\ continua$

Nos podemos preguntar ¿Existe una relación entre derivable e integrable?

¿Entre continua e integrable? Veamos ejemplos que nos aclaren estas situaciones

Ejemplo 1 función continua

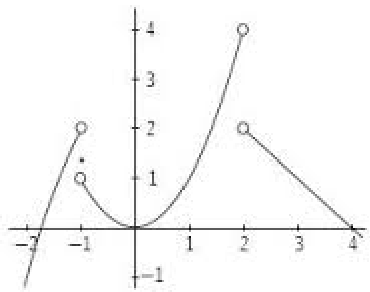
$$Calcular: \int_0^3 e^{2x} dx$$

$$\int_0^3 e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)_0^3 = \frac{1}{2}e^6 - \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2 Ahora consideremos una función no continua

$$Sea\ f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & si\ \ x < -1 \\ 1{,}36 & si\ \ \ x = 1 \\ x^2 & si\ \ -1 < x < 2 \\ -x + 4 & si\ \ x\ > 2 \end{cases}$$

$$Cuya\ gráfica\ se\ muestra\ a\ continuación$$



$$Calcular\ \int_1^3 f(x)dx$$

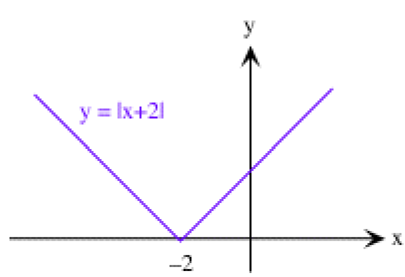
$$Notemos\ que\ la\ función\ no\ es\ continua\ en\ x = -1 \quad y \quad x = 2\ y\ \ 2\ está\ en\ [1,3]$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_1^2 (x^2)dx + \int_2^3 (-x+4)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right)_1^2 + \left(-\frac{x^2}{2} + 4x\right)_2^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \left[\left(-\frac{9}{2} + 12\right) - \left(-\frac{4}{2} + 8\right)\right] = \frac{7}{3} - \frac{5}{2} + 4$$

Ejemplo 3 Función continua y no diferenciable

$$Consideremos\ la\ función\ f(x) = \ |x + 2|$$



$$Calcular \int_{-3}^{0} f(x)dx$$

$$En\ primer\ lugar\ notemos\ que\ f\ es\ continua\ en\ \mathbb{R}\ pero\ no\ es\ diferenciable\ en -2$$

$$Además\ la\ función\ puede\ ser\ escrita\ como\ f(x) = \begin{cases} -(x+2) & si\ x < -2 \\ x+2 & si\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{0} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{0} f(x)dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - 2x\right)_{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)_{-2}^{0}$$

$$= \left[\left(-\frac{4}{2} - 2\cdot(-2)\right) - \left(-\frac{9}{2} - 2\cdot(-3)\right)\right] + \left[0 - \left(\frac{4}{2} + 2\cdot(-2)\right)\right]$$

$$= \left[(-2+4) - \left(-\frac{9}{2} + 6\right)\right] - 2 + 4 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Como vemos a partir de estos ejemplos no es necesario que la función sea continua para que sea integrable y tampoco que sea diferenciable para que sea integrable lo que se necesita es que sea **acotada y el conjunto de las discontinuidades contable**