

Integrales Impropias

Hasta ahora calculamos $\int_a^b f(x)dx$ con a, b números reales y f función acotada

Si quitamos estas condiciones podemos pensar en las siguientes situaciones:

i) Si a o b no sean números reales

ii) Si la función f no es acotada en el intervalo $[a, b]$

Para el primer caso $a = -\infty$ o $b = +\infty$ y tendremos Integrales impropias de primera especie, y para el segundo si f no es acotada en el intervalo, tendremos las de segunda especie

Ejemplos

1. $-\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ integral impropia de primera especie

2. $-\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$ integral impropia de segunda especie la función $\frac{1}{x-1}$ no es acotada en el intervalo $[1, 2]$

Integrales Impropias de Primera especie

Definición

Sea $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definamos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Observación

1. Si el límite existe, y tiene valor L , se dirá que la integral impropia **converge** y su valor es el número real L
2. Si el límite no existe se dice que la integral impropia **diverge**

Regla de L'hôpital

Recordemos la regla de L'hôpital, útil en algunos cálculos de integrales impropias

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{ó} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{2x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{2e^{2x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot 1}{2^n e^{2x}} = 0 \quad \text{luego} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{2x}} = 0$$

Ejemplos

1. $-\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow b} \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln x)_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - 0) \nexists \quad \text{la integral diverge}$$

2. – Analicemos la convergencia de la integral impropia: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right)_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right)$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{1-p} - 1)$$

Si $p > 1$ $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-p} = 0$

Si $p < 1$ $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-p}$ no existe

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{converge a } \frac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4/3}} dx \quad \text{converge pues } \frac{4}{3} > 1 \quad \text{su valor es } \frac{1}{\frac{4}{3}-1} = 3$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^{4/5}} dx \quad \text{diverge pues } \frac{4}{5} < 1$$

Integrales Impropias de Funciones Positivas

Aquí consideramos $f(x) > 0$

Teoremas

1. — Sea f una función positiva.

$$\text{Si } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge entonces } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Este teorema nos da una condición necesaria para la convergencia de la integral impropia, esto quiere decir:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0 \text{ entonces } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge}$$

2. — Sean f, g, h tres funciones tales que $0 < g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \geq a$

Entonces:

$$i) \text{ Si } \int_a^{+\infty} h(x) dx \text{ converge entonces } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

$$ii) \text{ Si } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ diverge entonces } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge}$$

Ejemplos

Analizar la convergencia de las integrales:

$$i) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt[3]{x^5}} dx$$

$$\frac{4}{9} < \frac{4}{5}$$

$$0 \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt[3]{x^5}} \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{es decir } \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt[3]{x^5}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge se concluye que $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt[3]{x^5}} dx$ converge

$$ii) \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} dx$$

$$\text{Para } x \geq 3 \text{ se tiene que } \sqrt{x} + 1 < x \text{ luego } \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

Como $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge se tiene que $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} dx$ diverge

Observación

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge entonces } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge } \forall a \geq 1$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge entonces } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge } \forall a \geq 1$$

Ejercicios

1. – Analizar la convergencia de la integral: $\int_1^{+\infty} \frac{|\text{sen}(3x)|}{\sqrt[4]{x^7} + 5x} dx$

$$\frac{|\text{sen}(3x)|}{\sqrt[4]{x^7} + 5x} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x^7} + 5x} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}} \quad \text{como } \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}} dx \text{ converge}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\text{sen}(3x)|}{\sqrt[4]{x^7} + 5x} dx \text{ converge}$$

Observación

Para tener en cuenta $e^{-\infty} = 0$ $e^{+\infty} = +\infty$ no existe en $\mathbb{R}$

Observación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

La integral impropia converge si ambas integrales del lado derecho de la igualdad convergen

2. – Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)_{-\infty}^0 + \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)_0^{+\infty} \\ &= \left(-\frac{1}{2} - 0\right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

Integrales Impropias de segunda especie

Definición

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a} \int_t^b f(x)dx$$

Observación

1. – Si el límite existe, y tiene valor L , se dirá que la integral impropia **converge** y su valor es el número real L

2. – Si el límite no existe se dice que la integral impropia **diverge**

Ejemplo

$$1. - \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\ln x)_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln t) = \lim_{t \rightarrow 0} (-\ln t) \nexists \quad \text{la integral diverge}$$

$$2. - \text{Analizar la convergencia de la integral } \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \quad p \neq 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right)_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{t^{1-p}}{1-p} \right) \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{t^{p-1}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Si } p > 1 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{t^{p-1}} \right) \text{ no existe luego la integral diverge}$$

$$p < 1 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{t^{p-1}} \right) = 1 \quad \text{luego la integral converge a } \frac{1}{1-p}$$

Ejemplos

$$1. - \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}} dx \quad \text{como } \frac{1}{2} < 1 \text{ la integral converge}$$

$$\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}} dx = 3 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 6$$

$$2. - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[4]{x^9}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{9/4}} dx \quad \text{como } \frac{9}{4} > 1 \text{ la integral diverge}$$

$$3.- \int_0^5 \frac{4}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{4}{x^2} dx}_{\text{Impropia}} + \underbrace{\int_1^5 \frac{4}{x^2} dx}_{\text{Propia}} \quad \text{diverge}$$

Al igual que para integrales impropias de primera especie tenemos para las de segunda especie un teorema de comparación

Teorema

Sean f, g, h tres funciones tales que $0 < g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b]$

y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ entonces:

i) Si $\int_a^b h(x) dx$ converge entonces $\int_a^b f(x) dx$ converge

ii) Si $\int_a^b g(x) dx$ diverge entonces $\int_a^b f(x) dx$ diverge

Ejemplos

1. – Analizar la convergencia de la integral $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx$

Solución

$$\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx = \int_0^{0,5} \frac{1}{x(x-1)} dx + \int_{0,5}^1 \frac{1}{x(x-1)} dx$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{x(x-1)} dx = \int_0^{0,5} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\ln \left(\frac{x-1}{x} \right) \right)_0^{0,5} \quad \nexists$$

$$\int_{0,5}^1 \frac{1}{x(x-1)} dx = \int_{0,5}^1 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\ln \left(\frac{x-1}{x} \right) \right)_{0,5}^1 \quad \nexists$$

Luego la integral diverge

2. – Analizar la convergencia de la integral: $\int_0^{+\infty} \frac{3}{x^2 + \sqrt{x}} dx$

Solución

$$\int_0^{+\infty} \frac{3}{x^2 + \sqrt{x}} dx = 3 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx \quad \text{Es una integral de las dos especies}$$

$$3 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx = 3 \left[\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx \right]$$

Observemos en primer término que la integral $\int_0^{+\infty} \frac{3}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ si ambas integrales

del lado izquierdo de la igualdad, convergen

$$i) \int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx \quad \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in]0,1] \quad \text{como } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ converge}$$

$$\text{entonces } \int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx \text{ converge}$$

$$ii) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx \quad \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in [1, +\infty[\quad \text{como } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge}$$

$$\text{entonces } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx \text{ converge}$$

$$\text{Finalmente } \int_0^{+\infty} \frac{3}{x^2 + \sqrt{x}} dx \text{ converge}$$