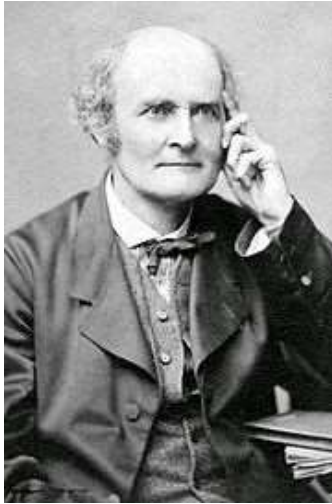


## Datos Históricos



**Arthur Cayley**  
(1821 - 1895)

Los primeros indicios de matrices nacen en la antigua China por cuadrados mágicos 3 por 3, como atestigua el Lo Shu, y el término "matriz" nació en 1848 por J. J. Sylvester.

La notación matricial que nosotros conocemos actualmente, como forma abreviada de escribir un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas, la introdujo Cayley en 1858.

Las matrices ahora se utilizan para múltiples aplicaciones y sirven, en particular, para representar los coeficientes de los sistemas de ecuaciones lineales o para representar las aplicaciones lineales.

## Teoría de Matrices

### “Matrices”

#### Definición

Sean  $I, J$  conjuntos de índices (subconjunto de  $\mathbb{Z}^+$ ) tales que  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  y  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  y sea  $K$  un cuerpo, se define una función

$$f : I \times J \rightarrow K \text{ tal que } \forall (i, j) \in I \times J, f(i, j) = a_{ij}$$

Llamaremos matriz de orden  $m \times n$  al bloque ordenado formado por los valores de la función tal como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

#### Observaciones:

1. Los términos  $a_{ij}$  con  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$  son llamados coeficientes de la matriz.
2. El término  $a_{ij}$  es un coeficiente de posición  $(i, j)$ , es decir, ubicados en la fila  $i$  y la columna  $j$  de  $A$
3. La matriz  $A$  de orden  $m \times n$  tiene  $m$  filas y  $n$  columnas.

4. Podemos representar la matriz  $A$  como  $[a_{ij}]_{(i,j) \in I \times J} \in K^{m \times n}$  o bien  $[a_{ij}]_{m \times n} \in K^{m \times n}$ , es una matriz de orden  $m \times n$  con coeficientes en el campo  $K$ , que puede ser real o complejo.

5. Si  $m = n$ , decimos que  $[a_{ij}]_{m \times n}$  es una matriz cuadrada de orden de  $n \times n$ . En caso contrario se dice rectangular.

$K^{m \times n} = \{[a_{ij}] / a_{ij} \in K, i = \{1, 2, \dots, m\}; j = \{1, 2, \dots, n\}\}$  es el conjunto de todas las matrices de orden  $m \times n$  con coeficientes en  $K$ .

**Notación:**  $K^{m \times n}$ ,  $M(K, m \times n)$ ,  $M(m \times n, K)$

## Matrices Especiales

### 1. Matriz Triangular

#### 1.1 Matriz Triangular Superior

Una matriz  $[a_{ij}] \in K^{n \times n}$  es triangular superior, ssi  $a_{ij} = 0$  si  $i > j$

Se define el conjunto de las Matrices Triangulares Superiores como:

$$T_n(K) = \{[a_{ij}] \in K^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$$

Gráficamente,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & \ddots a_{nn} \end{pmatrix}$$

## 1.2 Matriz Estrictamente Triangular Superior

Una matriz  $[a_{ij}] \in K^{n \times n}$  es estrictamente triangular superior ssi  $a_{ij} = 0$  si  $i \geq j$

Se define el conjunto de las Matrices Estrictamente Triangulares Superiores

como:  $T_n(K) = \{[a_{ij}] \in K^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j\}$

Gráficamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \ddots 0 \end{pmatrix}$$

## 1.3 Matriz Triangular Inferior

Una matriz  $[a_{ij}] \in K^{n \times n}$  es triangular inferior ssi  $a_{ij} = 0$  si  $i < j$

Se define el conjunto de las Matrices Triangulares Inferiores como:

$T_n(K) = \{[a_{ij}] \in K^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$

Gráficamente,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ * & a_{22} & 0 \\ * & * & \ddots a_{nn} \end{pmatrix}$$

## 1.4 Matriz Estrictamente Triangular Inferior

Una matriz  $[a_{ij}] \in K^{n \times n}$  es estrictamente triangular inferior ssi  $a_{ij} = 0$  si  $i \leq j$

Se define el conjunto de Matrices Estrictamente Triangulares Inferiores como:

$T_n(K) = \{[a_{ij}] \in K^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\}$

Gráficamente,

$$\begin{pmatrix} 0_{11} & 0 & 0 \\ * & 0_{22} & 0 \\ * & * & \ddots 0_{nn} \end{pmatrix}$$

**Observación:** La matriz estrictamente triangular superior y la matriz estrictamente triangular inferior, son matrices Nilpotentes. Es decir, una matriz  $A$  cualquiera es Nilpotente, si existe un menor entero positivo  $k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , tal que  $A^k = \hat{0}$ , donde  $\hat{0} :=$  matriz nula, es decir, todos sus coeficientes son ceros.

## 2. Matriz Diagonal

La matriz  $[a_{ij}] \in K^{n \times n}$  es diagonal ssi  $a_{ij} = 0$  si  $i \neq j$

Se define el conjunto de Matrices Diagonales como:

$$D_n(K) = \{[a_{ij}] \in K^{n \times n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$$

Gráficamente,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Los coeficientes  $a_{ii}$  de una matriz  $A = [a_{ij}] \in K^{n \times n}$  son los coeficientes de la diagonal de  $A$ .

**Notación:**  $D_n(K) = D(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

### 3. Matriz Escalar

Una matriz  $[a_{ij}] \in K^{n \times n}$  es diagonal si  $a_{ij} = 0$  si  $i \neq j \wedge (a_{ii} = 1) \in K$

Se define el conjunto de Matrices Escalares como:

$$E_n(K) = \{[a_{ij}] \in K^{n \times n} / (a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j) \wedge (a_{ii} = \lambda) \in K\}$$

Gráficamente,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}$$

#### Observaciones:

1. Si  $\lambda = 0$ , tenemos la matriz nula.
2. Si  $\lambda = 1$ , tenemos la matriz identidad.
3.  $N_n(K) \subseteq T_n(K) \subseteq K^{n \times n}$
4.  $E_n(K) \subseteq D_n(K) \subseteq K^{n \times n}$

## Leyes de Composición Interna

A continuación dotaremos a  $K^{m \times n}$  o bien  $K^{n \times n}$  de dos Leyes de Composición Interna (l.c.i.), a saber, Suma y Producto.

### 1. Suma

$$+ : K^{m \times n} \times K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n} \text{ tal que } \forall [a_{ij}]_{m \times n}, [b_{ij}]_{m \times n} \in K^{m \times n},$$
$$(a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n},$$

En particular, si  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$ ,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$$

### Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

## 1.1 Propiedad

$(K^{m \times n}, +)$  es un Grupo, es decir cumple:

- i. asociatividad
- ii. elemento neutro
- iii. elemento inverso

## Demostraciones

### i. Asociatividad

$\forall A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}, C = (c_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$  se cumple que

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + (B + C) = (a_{ij})_{n \times n} + [(b_{ij})_{n \times n} + (c_{ij})_{n \times n}]$$

$$= (a_{ij})_{n \times n} + (b_{ij} + c_{ij})$$

$$= (a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}])_{n \times n} ; \text{ asociatividad en } K$$

$$= ([a_{ij} + b_{ij}] + c_{ij})_{n \times n}$$

$$= (a_{ij} + b_{ij})_{n \times n} + (c_{ij})_{n \times n}$$

$$= [(a_{ij})_{n \times n} + (b_{ij})_{n \times n}] + (c_{ij})_{n \times n}$$

$$\therefore A + (B + C) = (A + B) + C$$

ii. Elemento neutro

$$\exists (x_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n}, \forall (a_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n} \text{ tal que}$$

$$(a_{ij})_{m \times n} + (x_{ij})_{m \times n} = (x_{ij})_{m \times n} + (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Supongamos que

$$(a_{ij})_{m \times n} + (x_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\text{Entonces, } (a_{ij} + x_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\Rightarrow a_{ij} + x_{ij} = a_{ij} ; \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n, a_{ij}, x_{ij} \in K(\text{cuerpo})$$

$$\text{Luego } x_{ij} = 0 ; \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$$

$$\therefore (x_{ij})_{m \times n} = (0)_{m \times n}, \text{ es el neutro aditivo en } K^{m \times n}$$

**Observación:**  $(0)_{m \times n}$  es llamado matriz nula.

iii. Elemento inverso aditivo (opuesto):

$$\forall (a_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n}, \exists (y_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n} \text{ tal que}$$

$$(a_{ij})_{m \times n} + (y_{ij})_{m \times n} = (y_{ij})_{m \times n} + (a_{ij})_{m \times n} = (0)_{m \times n}$$

$$\text{Supongamos que } (a_{ij})_{m \times n} + (y_{ij})_{m \times n} = (0)_{m \times n}$$

$$\text{Entonces, } (a_{ij} + y_{ij})_{m \times n} = (0)_{m \times n}$$

$$\Rightarrow a_{ij} + y_{ij} = 0 ; \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n, a_{ij}, y_{ij} \in K(\text{cuerpo})$$

$$\text{Luego } y_{ij} = -a_{ij} ; \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$$

$$\therefore (y_{ij})_{m \times n} = (-a_{ij})_{m \times n}, \text{ es el inverso aditivo en } K^{m \times n}.$$

Quedan demostrados los puntos i, ii y iii, lo que verifica la propiedad.

### Observaciones:

1. Si además de verificar asociatividad, existencia de elemento neutro y existencia de elemento inverso, se verifica conmutatividad, diremos que  $(K^{m \times n}, +)$  es un Grupo Abelian.
2. En particular, para  $m = n$  se tiene que  $(K^{n \times n}, +)$  es un Grupo Abelian.

Queda como ejercicio para el lector verificar conmutatividad.

## 2. Producto

•: Dados  $A = (a_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n} \wedge B = (b_{jl})_{n \times p} \in K^{n \times p}$ , se define:

$$AB = (c_{il})_{m \times p} \in K^{m \times p}, \text{ donde } c_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jl}$$

### Ejemplo

$$(1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$$

$$AB = (c_{ij})_{2 \times 2}, \text{ donde } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } c_{11} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{k2} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \cdot b_{k1} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \cdot b_{k2} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}$$

(2) Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , calcular  $AB$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Generalizando, si  $A \in K^{m \times n}$  y  $B \in K^{p \times q}$ , diremos que existe la matriz  $AB \in K^{m \times q}$  si y sólo si  $n = p$ .

### Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ -11 & 11 & 14 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

**Nota:** Si  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$ , se tiene:

$$AB = (c_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}, \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

## 2.1 Propiedades

### 2.1.1 El producto de matrices es asociativo

Sea  $A \in K^{m \times n}$ ,  $B \in K^{n \times p}$ ,  $C \in K^{p \times q}$ , se verifica que:  $A(BC) = (AB)C$

2.1.2 El producto de matrices es no conmutativo, es decir,  $AB \neq BA$ .

2.1.3 Las matrices son con divisores de cero, es decir, si

$$AB = \hat{0} \nRightarrow A = \hat{0} \vee B = \hat{0}.$$

2.1.4 El producto de matrices es no cancelativo, es decir, si

$$AC = BC \nRightarrow A = B.$$

2.1.5 El producto de matrices verifica distributividad, es decir, si

$A \in K^{m \times n}$ ,  $B \in K^{n \times q}$ ,  $C \in K^{n \times q}$  se cumple que:

$$A(B+C) = AB + AC \text{ distributividad por la izquierda}$$

O bien si  $A \in K^{q \times n}$ ,  $B \in K^{n \times q}$ ,  $C \in K^{n \times q}$  se cumple que:

$$(B+C)A = BA + CA \text{ distributividad por la derecha}$$

**Observación:** Si  $A, B, C \in K^{n \times n}$  entonces se verifica distributividad por la izquierda y distributividad por la derecha.

### Demostración 2.1.1

Sea  $A = (a_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n}$ ;  $B = (b_{jk})_{n \times p} \in K^{n \times p}$ ;  $C = (c_{kl})_{p \times q} \in K^{p \times q}$ , entonces:

$$(AB)C = ((a_{ij})(b_{jk}))(c_{kl})$$

$$= \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) (c_{kl})$$

$$= (d_{ik})((c_{kl}))$$

$$= (h_{il})$$

$$= \sum_{k=1}^p d_{ik} c_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jk} c_{kl})$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl}$$

$$= A(BC)$$

**Ejemplo propiedad 2.1.2**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } C = AB$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ donde } D = BA$$

Como se observa  $C \neq D$ .

**Ejemplo propiedad 2.1.3**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } C = AB$$

Como se observa  $A \neq \hat{0} \wedge B \neq \hat{0}$ , sin embargo,  $C = \hat{0}$

### Ejemplo propiedad 2.1.4

Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AC \stackrel{?}{=} BC$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AC = BC \nRightarrow A = B$$

## Ley de Composición Externa

Ya hemos visto que  $(K^{m \times n}, +)$  es un Grupo Abeliano. Ahora definiremos una Ley de Composición Externa (l.c.e.) en  $K^{m \times n}$  tal como:

$$\bullet: K \times K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n} \text{ tal que } k \bullet \left( a_{ij} \right)_{m \times n} := \left( k a_{ij} \right)_{m \times n}$$

### 3. Propiedades

$$3.1 \quad (k + \lambda) \bullet A = k \bullet A + \lambda \bullet A; \quad \forall \quad k, \lambda \in K, \forall \quad k, \lambda \in K, \forall$$

$$3.2 \quad k \bullet (A + B) = k \bullet A + k \bullet B; \quad \forall \quad k \in K, \forall \quad A, B \in K^{m \times n}$$

$$3.3 \quad k \bullet (\lambda \bullet A) = (k \cdot \lambda) \bullet A; \quad \forall \quad k, \lambda \in K, \forall \quad A \in K^{m \times n}$$

$$3.4 \quad 1_k \bullet A = A; \quad \forall \quad A \in K^{m \times n}, \quad 1_k \text{ neutro multiplicativo de } K.$$

#### Demostración 3.2

Sean  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ;  $B = (b_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n}$

En la posición  $(i, j)$  de  $A + B$  se encuentra el término  $a_{ij} + b_{ij}$ .

En la posición  $(i, j)$  de  $k \bullet (A + B)$  se encuentra el término  $k \cdot (a_{ij} + b_{ij})$ .

Por otro lado, en la posición  $(i, j)$  de  $k \bullet A$  se encuentra el término  $k \cdot a_{ij}$ .

En la posición  $(i, j)$  de  $k \bullet B$  se encuentra el término  $k \cdot b_{ij}$ .

En la posición  $(i, j)$  de  $k \bullet A + k \bullet B$  se encuentra el término  $k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij}$ .

Luego, por la distributividad de  $K$ , se tiene que  $k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij} = k \cdot (a_{ij} + b_{ij})$ , que es el elemento de posición  $(i, j)$  de  $k \bullet (A + B)$ .

**Demostración 3.4**

Con las propiedades descritas en 1.1 y 3, podemos decir que  $K^{m \times n}$  es un Espacio Vectorial sobre el campo  $K$ , o bien, se dice que  $K^{m \times n}$  es un  $K$  Espacio Vectorial.

**4. Otras propiedades**

**4.1**  $\forall A \in K^{m \times n}$ , se verifica que  $0 \bullet A = \hat{0}$

**4.2**  $\forall k \in K$ , se verifica que  $k \bullet \hat{0} = \hat{0}$

**4.3** Sea  $k \in K$ ,  $A \in K^{m \times n}$ ,  $k \bullet A = \hat{0}$  ssi  $k = 0_K$  o  $A = \hat{0}$

## Tipos de Matrices

### 1. Matriz Traspuesta

Dado  $A = (a_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n}$ , diremos que  $A^t := (a_{ji})_{n \times m} \in K^{n \times m}$  es la matriz traspuesta de  $A$ .

### Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \xrightarrow{t} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

### 1. Propiedades

$$\mathbf{1.1} \quad (A^t)^t = A; \quad \forall \quad A \in K^{m \times n}$$

$$\mathbf{1.2} \quad (A + B)^t = A^t + B^t; \quad \forall \quad A, B \in K^{m \times n}$$

$$\mathbf{1.3} \quad (AB)^t = B^t A^t; \quad \forall \quad A \in K^{m \times n}, \quad \forall \quad B \in K^{n \times q}$$

$$\mathbf{1.4} \quad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t; \quad \forall \quad A \in K^{n \times n}$$

**Observación (a la propiedad 1.4):** Una matriz  $A \in K^{n \times n}$  es invertible si y sólo si existe una matriz  $A^{-1} \in K^{n \times n}$ , llamada inversa de  $A$ , tal que:  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

**Nota:**  $I_n^t = I_n$ , donde  $I_n \in K^{n \times n}$

### Demostración 1.2

Sean  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ;  $B = (b_{ij})_{m \times n}$

En la posición  $(i, j)$  de  $A + B$  se encuentra el término  $a_{ij} + b_{ij}$

En la posición  $(j, i)$  de  $(A + B)^t$  se encuentra el término  $a_{ij} + b_{ij}$

Por otro lado, en la posición  $(i, j)$  de  $A$  se encuentra el término  $a_{ij}$ , que es el mismo elemento que se encuentra en la posición  $(j, i)$  de  $A^t$ .

En la posición  $(i, j)$  de  $B$  se encuentra el término  $b_{ij}$ , que es el mismo elemento que se encuentra en la posición  $(j, i)$  de  $B^t$ .

Luego, en la posición  $(j, i)$  de  $A^t + B^t$ , se encuentra el término  $a_{ij} + b_{ij}$ , que es el mismo coeficiente que se encuentra en la posición  $(j, i)$  de  $(A + B)^t$ .

$$\therefore (A + B)^t = A^t + B^t$$

#### Demostración 1.4

Sabemos que, sea  $A \in K^{n \times n}$  invertible  $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in K^{n \times n}$  tal que  
 $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

Supongamos que  $A \cdot A^{-1} = I_n$  / aplicando traspuesta

$$(A \cdot A^{-1})^t = I_n^t \text{ / aplicando propiedad 1.3}$$

$$(a) (A^{-1})^t \cdot A^t = I_n$$

Por otro lado, si  $A^{-1} \cdot A = I_n$  / aplicando traspuesta

$$(A^{-1} \cdot A)^t = I_n^t \text{ / aplicando propiedad 1.3}$$

$$(b) A^t \cdot (A^{-1})^t = I_n$$

Luego de (a) y (b), podemos concluir que la inversa de  $A^t$  es  $(A^{-1})^t$ .

$$\therefore (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

## 2. Matriz Simétrica

Una matriz  $A \in K^{n \times n}$  es simétrica si y sólo si  $A = A^t$ .

### Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = A^t$$

## 2. Propiedades

**2.1 Si  $A \in K^{n \times n}$  es simétrica y  $k \in K$  entonces  $k \cdot A$  es simétrica.**

**2.2 Dado  $A \in K^{n \times n}$  entonces  $A + A^t$  es simétrica.**

### Demostración 2.1

Sabemos que si  $k \cdot A$  es simétrica entonces  $k \cdot A = (k \cdot A)^t$

Por propiedad 1.3 de traspuesta se tiene  $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

$\therefore A^t = A$ , pues  $A$  es simétrica

$$\Rightarrow (k \cdot A)^t = k \cdot A$$

$\therefore k \cdot A$  es simétrica

## Demostración 2.2

Sabemos que si  $A + A^t$  es simétrica entonces  $A + A^t = (A + A^t)^t$

Por propiedad 1.2 de traspuesta se tiene  $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t$

$$\Rightarrow (A + A^t)^t = A^t + A$$

$$\Rightarrow (A + A^t)^t = A + A^t$$

$\therefore A + A^t$  es simétrica

## 3. Matriz Antisimétrica

Dado  $A \in K^{m \times n}$ , diremos que A es Antisimétrica, sí y sólo sí:

$$A = -A^t$$

### Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-1) \xrightarrow{-} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -A^t$$

**Observación:** Los coeficientes de la diagonal de la matriz antisimétrica son ceros, o bien, es nula.

### 3. Propiedades

**3.1 Si  $A \in K^{m \times n}$  es antisimétrica, entonces  $kA$  es antisimétrica con**

$$k \in K - \{0\}.$$

**3.2 Dado  $A \in K^{m \times n}$  se verifica que  $A - A^t$  es antisimétrica.**

#### Demostración 3.1

Por demostrar que  $kA$  es antisimétrica cuando  $A$  es antisimétrica, esto es:

En efecto:

$$\begin{aligned} -(kA)^t &= -(k \cdot (A^t)) \\ &= (-k) \cdot (-A) = k \cdot A \end{aligned}$$

#### Demostración 3.2

Por demostrar que  $A - A^t$  es antisimétrica, es decir:

$$(A - A^t)^t = -(A - A^t)$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} -(A - A^t)^t &= -A^t + (A^t)^t \\ &= -A^t + A \\ &= A - A^t \end{aligned} \quad ; \text{ Conmutatividad de la suma}$$

### 4. Matriz Conjugada

Sea  $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , diremos que  $\bar{A} := [\bar{a}_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  es la Matriz Conjugada de  $A$ , donde  $\bar{a}_{ij}$  es el conjugado de  $a_{ij}$  (en  $\mathbb{C}$ ).

#### Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & i & 1-i \\ 2 & 3 & i \\ 0 & -i & 1+i \end{pmatrix}_{3 \times 3} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 2-i & -i & 1+i \\ 2 & 3 & -i \\ 0 & i & 1-i \end{pmatrix}_{3 \times 3} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

## 5. Matriz Hermítica

Dado  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , diremos que  $A$  es hermítica sí y sólo si,  $A = (\bar{A})^t$ .

### Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2-i \\ i & 3 & 1-i \\ 2+i & 1+i & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & i & 2+i \\ -i & 3 & 1+i \\ 2-i & 1-i & 4 \end{pmatrix}^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 2-i \\ i & 3 & 1-i \\ 2+i & 1+i & 4 \end{pmatrix}$$

**Observación:** En toda matriz hermítica los coeficientes de la diagonal son reales.

## 6. Matriz Involutiva

$A \in K^{n \times n}$  regular (invertible) es *involutiva* ssi  $A^{-1} = A$  ssi  $A^2 = I_n$

## 7. Matriz Ortogonal

$A \in K^{n \times n}$  regular (invertible) es *ortogonal* ssi  $A^{-1} = A^t$  ssi  $AA^t = I_n$ .

## 8. Matriz Unitaria

$A \in K^{n \times n}$  regular (invertible) es *unitaria* ssi  $A^{-1} = A^*$  donde  $A^* = (\bar{A})^t$

## 9. Matriz Antihermítica

La matriz  $A \in K^{n \times n}$  es *antihermítica* ssi  $A = -A^*$

Note que  $(\bar{A})^t = (\bar{A}^t)$ , con  $A \in K^{m \times n}$

**Ejercicio.** Par cada una de las matrices definidas en 6, 7, 8 y 9 construya un ejemplo.

## Operaciones Elementales Sobre una Matriz

Existen sólo tres operaciones elementales (filas o columnas) permitidas sobre una matriz; a saber:

### Operaciones Elementales Filas (O. E. F.)

- 1.- Intercambiar filas: Intercambiar la fila  $i$  por la fila  $j$ .

$$f_i \leftrightarrow f_j, \text{ o bien, } f_{ij}$$

- 2.- Cambiar la fila  $i$  por  $k$  veces la fila  $i$ ; con  $k \neq 0$

$$f_i \leftrightarrow kf_i, \text{ o bien, } f_i(k)$$

- 3.- Cambiar la fila  $i$  por  $k$  veces la fila  $j$  más la fila  $i$ , con  $k \neq 0$

$$f_i \leftrightarrow f_i + kf_j, \text{ o bien, } f_{ij}(k)$$

**Observación:** De manera similar se definen las Operaciones Elementales Columnas, esto es:

- 1.-  $c_i \leftrightarrow c_j; c_{ij}$

- 2.-  $c_i \leftrightarrow kc_i; c_i(k)$

3.-  $c_i \leftrightarrow c_i + k(c_j); c_{ij}(k)$

### Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tilde{f}_{12} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tilde{f}_{2(-6)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tilde{f}_{2(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -18 & -24 \end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tilde{f}_{12(-3)} \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

### Ejemplo

Transformar, si es posible, mediante O.E.F., la matriz dada en la matriz  $I_2$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Luego,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tilde{f}_{21(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tilde{f}_{12(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tilde{f}_{2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera similar podemos transformar la misma matriz vía O.E.C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tilde{c}_{21(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \tilde{c}_{2(\frac{-1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \tilde{c}_{12(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 6. Matriz Equivalente

Matriz equivalente por filas:

Dos matrices  $A, B$  son equivalentes por filas las que anotamos:  $A \stackrel{\sim}{f} B$ , si existe una frecuencia de matrices elementales:

$$F_1, F_2, \dots, F_k \text{ tales que } F_k * \dots * F_2 * F_1 * A = B$$

**Nota:** Si  $A, B \in K^{m \times n}$  son matrices elementales, entonces

$F_i$  ( $i = 1 \dots k$ ) son de orden  $m \times n$

$$(F_i \in K^{m \times n}, \forall i = 1 \dots k)$$

### Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\sim}{f}_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\sim}{f}_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 7. Matriz Elemental

Diremos que una matriz es elemental (M.E.) si proviene de la Identidad al efectuar a ésta una y sólo una operación elemental fila (columna).

### Ejemplo

1.-  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , es Matriz Elemental que proviene de  $I_2$  al efectuar la OEF  $\tilde{f}_{12}$

2.-  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{12(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  es M.E.

3.- ¿Es M.E.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ? . No, porque proviene de  $I_3$  con más de una operación.

#### Nota:

- 1.- El producto de matrices elementales no necesariamente es Matriz Elemental.
- 2.- Las matrices elementales son invertibles.
- 3.- El producto de matrices invertibles es invertible.
- 4.- El producto de matrices elementales es invertible.

Ahora por lo observado podemos dar la siguiente definición de Matrices Equivalentes por Filas (MEF)

#### Definición

**Dados  $A, B \in K^{m \times n}$ , diremos que  $A \tilde{f} B$  sí y sólo sí  $\exists P \in K^{m \times n}$  regular (invertible), tal que  $PA = B$ , donde  $P$  es un producto de M. E. F.**

$$P = F_k * F_{k-1} * \dots * F_2 * F_1$$

## 8. Matriz Inversa

Diremos que  $A \in K^{n \times n}$  es invertible si existe  $B \in K^{n \times n}$  tal que:

$$AB = BA = I_n$$

### Teorema

Diremos que una matriz  $A \in K^{n \times n}$  es invertible si es posible trasformarla mediante O.E.F. o bien mediante O.E.C. en la matriz identidad ( $I_n$ ).

**Notación:**  $B = A^{-1}$

### Ejemplo

Cálculo de la inversa de una matriz mediante O. E. F.

Calcular  $A^{-1}$  si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Consideremos la matriz ampliada  $(A/I_n)$  y aplicamos O. E. F.

$$\begin{aligned} (A/I_2) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{21(-3)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{2(-\frac{1}{2})}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\tilde{f}_{12(-2)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) = (I_2 / A^{-1}) \end{aligned}$$

De las O.E.F. aplicadas se tienen las siguientes M.E.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} := F_{21(-3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{2(-\frac{1}{2})}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} := F_{2(-\frac{1}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := F_{12(-2)}$$

$$F_{12(-2)} * F_{2\left(\frac{-1}{2}\right)} * F_{21(-3)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Del ejercicio,  $PA = I_n$  donde  $P = A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

### Ejemplo

Hallar la inversa de la siguiente matriz mediante O.E.F. si es posible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|I_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{21}(2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\tilde{f}_{32}(1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{2\left(\frac{1}{2}\right)}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\tilde{f}_{13}(-1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/8 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{12}\left(\frac{-3}{2}\right)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -3/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/8 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right)$$

↓

$$P = A^{-1}$$

### 9. Matriz Escalonada

Consideremos una matriz  $A \in K^{m \times n}$ . El proceso de escalar (fila) la matriz  $A$  es la siguiente:

- 1.- Elegir una fila de la matriz cuyo primer elemento es “no nulo” (se sugiere tomar una fila cuyo primer elemento sea “uno”).

- 2.- Cambiar la fila elegida a primera fila.
- 3.- Hacer el primer elemento de la fila "1".
- 4.- Hacer "ceros" todos los coeficientes bajo el "1" del paso (3).

Estos cuatro procesos descritos se repiten sucesivamente hasta definir el último escalón.

La matriz obtenida es una matriz escalonada: escalonada fila E.F., o bien, escalonada columna E.C.

## 10. Matriz Escalonada Reducida

Una matriz escalonada reducida, es una matriz escalonada tal que la columna que define el escalón es una columna de la matriz identidad  $I_m$  cuando la matriz considerada es  $m \times n$  o cuando  $A \in K^{m \times n}$ .

### Ejemplo

1. Hallar la escalonada reducida fila de A, donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{1\left(\frac{1}{2}\right)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21(-4)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\tilde{f}_{2\left(\frac{1}{3}\right)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} := B = \text{E.R.F. de } A.$$

2. Hállese una matriz  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  invertible (regular) tal que  $A \sim B$  donde B es E.R.F. de A y A del ejemplo anterior.

De lo calculado en el ejercicio anterior se tiene que  $A \sim B$  (E.R.F. de A).

$\Rightarrow \exists P$  invertible tal que

$$PA = B$$

**Notación:**  $A = TB$        $(PA = B)$

$$A \sim B$$

$$\downarrow \exists P \text{ invertible}$$

$$PA = B$$

$$A = P^{-1}B$$

$$A = TB$$

Donde  $P = F(1/3) F_{21}(-4) F_1(-1/2) F_{12}$

Directamente se realiza de la siguiente manera: considere la ampliada  $(A|I_2)$  y transforme  $A$  en su E.R.F.

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{12}} \left( \begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_1\left(\frac{-1}{2}\right)} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{21}(-4)}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_2\left(\frac{1}{3}\right)} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1/3 & 2/3 \end{array} \right)$$

$\downarrow$

$B := \text{E.R.F.}$

de  $A$

$\downarrow$

$P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

invertible

De este modo  $PA = B$

$P$

$A$

$B$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

### Definición

Dados  $A, B \in K^{m \times n}$  diremos que  $A$  es equivalente con  $B$  por columna, anotamos  $A \tilde{\sim} B$  sí y sólo sí:

1.- Existe una secuencia de matrices elementales  $C_1, C_2, \dots, C_k$  de orden  $n \times n$  tales que  $A \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_k = B$

2.- Existe una matriz  $Q \in K^{n \times n}$  regular (invertible, no singular) tal que  $AQ = B$

### Definición

Dados  $A, B \in K^{m \times n}$  diremos que  $A$  es equivalente con  $B$ , anotamos  $A \sim B$ , si existen matrices  $P \in K^{m \times m}$  y  $Q \in K^{n \times n}$  regulares tal que  $PAQ = B$

### Ejemplo

Hallar matrices  $P$  y  $Q$  no triviales tales que  $PAQ = B$ , donde  $B$  es E.R.F. de

$A$ , donde  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ . Como  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  transformar la matriz ampliada

$$\left( \begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_3 & \end{array} \right) \text{ vía O.E.F. y O.E.C. para obtener } \left( \begin{array}{c|c} B & P \\ \hline Q & \end{array} \right)$$

### Solución

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline I_3 & \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} -2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{12}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{c}_{12}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{21(-3)}} \\ &\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 7 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{c}_{2(-1/11)}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -3/11 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \\ \hline 0 & -1/11 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{c}_{21(3/11)}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \\ \hline 0 & -1/11 & 0 & & \\ 1 & 3/11 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{P} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -3 \\ \hline 0 & -1/11 & 0 & & \\ 1 & 3/11 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{c}_{32(-7)}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & -1/11 & 7/11 & & \\ 1 & 3/11 & -10/11 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

↓  
Q

Luego

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \underbrace{F_{21}(-3) F_{12}}$$

Producto de matrices elementales.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1/11 & 7/11 \\ 1 & 3/11 & -10/11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C_{12} C_{2(-1/11)} C_{21(3/11)} C_{31(1)} C_{32(-7)}$$

Tal que

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

¿Quién es  $P^{-1}$ ,  $Q^{-1}$ ?

**Notar que:**

$$1. (F_{ij})^{-1} = F_{ij} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{F_{12}} \tilde{f}_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(F_{12})^{-1}}$$

$$2. F_i^{-1}(k) = F_i(1/k) \quad , k \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{2(-1/11)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/11 \end{pmatrix} \tilde{f}_{2(-11)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. (F_{ij}(k))^{-1} = F_{ij}(-k) \quad , k \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{21(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{21(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,  $P^{-1} = (F_{21}(-3)F_{12})^{-1} = F_{12}^{-1}F_{21}(-3)^{-1} = ???$

$$Q^{-1} = (C_{12}C_{2(-\frac{1}{11})}C_{21(\frac{3}{11})}C_{31(1)}C_{32(-7)})^{-1} = ???$$

## Rango o Característica de una Matriz

Diremos que el número de filas no nulas (independientes) al escalonar una matriz es el rango o característica de la matriz, anotamos rango de  $A$  por  $rg(A)$  o bien  $ran(A)$ .

**Nota:** Si  $A \in K^{m \times n}$  con  $m \leq n$  entonces el  $rg(A) \leq m$ . Si  $m \geq n$  se tiene que  $rg(A) \leq n$ . Si  $m = n$  se tiene que  $rg(A) \leq n$ , aquí si el  $rg(A) = n$  decimos que  $A$  es de rango completo (una matriz de rango completo es invertible).

### Ejemplo

Determine el rango de  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{31(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{41(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 1 \end{pmatrix} & \tilde{f}_{24} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} & \tilde{f}_{32(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ & \tilde{f}_{43(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\therefore$  Es de rango completo, con  $rg(B) = 4$