

MÓDULO 2: “Determinantes”

Definición 1

El determinante es una función con dominio en $K^{n \times n}$ y valores en K , así:

$$\det : K^{n \times n} \rightarrow K \text{ talque } \forall A \in K^{n \times n},$$
$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_{\sigma} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

Donde, $S_n = \{\sigma : X \rightarrow X / \sigma \text{ es biyectiva}\}$, es el conjunto de todas las permutaciones definidas sobre un conjunto de n elementos.

Note que $\det(A)$ es un coeficiente del cuerpo K . ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$).

Observaciones:

1. ε_{σ} es el signo de σ , que puede ser +1 o -1, según sea σ par o σ impar respectivamente.
2. $\sigma(i)$ es la imagen de i según σ , donde $i = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo

Sea $X = \{1, 2\}$, donde $\text{Biy } X = \{f : x \rightarrow x / f \text{ es biyectiva}\}$

Considerando S_n como el conjunto $\text{Biy } X$ y *Sin pérdida de generalidad* ya que $(S_n, \cdot)$ es isomorfo a $(\text{Biy } X, \circ)$

$$\sigma_1$$

$$1 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow 2$$

$$\sigma_2$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 1$$

En notación de permutación:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En notación de ciclos:

$$\sigma_1 = (1)(2) := (1)$$

$$\sigma_2 = (1 \ 2)$$

Así:

$$S_n = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$

$$S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$

Nota: Toda permutación se puede escribir como un ciclo, o bien, como un producto de ciclos. Un ciclo de longitud par, es impar. Un ciclo de longitud impar, es par. El producto de permutaciones de igual signo (o igual paridad), es par (+1). El producto de permutaciones de distinto signo (o distinta paridad), es impar (-1).

Ejemplo

Considerando el ejercicio anterior

$$\varepsilon_{\sigma_1} = +1, \text{ pues } \sigma_1 \text{ es par}$$

Ahora calculemos el determinante de A, donde $A \in K^{2 \times 2}$, con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

Luego

$$\begin{aligned} \det(A) &:= \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon_{\sigma} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \\ \det(A) &= \varepsilon_{\sigma_1} \cdot a_{1\sigma_1(1)} \cdot a_{2\sigma_1(2)} + \varepsilon_{\sigma_2} \cdot a_{1\sigma_2(1)} \cdot a_{2\sigma_2(2)} \\ &= (+1) \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{12} \cdot a_{21} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

Notación: $\det(A) = |A|$

1. Menor asociado

Sea $A = (a_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$, llamaremos **menor asociado** al elemento a_{ij} ,

lo anotaremos M_{ij} , al sub-determinante que se obtiene de eliminar la fila i y la columna j de A.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular M_{12} , M_{32} , M_{22}

$$\text{a) } M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$$

$$\text{b) } M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -8$$

$$\text{c) } M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$$

2. Cofactor asociado

Sea $A = (a_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$, el **cofactor asociado**, es un menor asociado con signo, lo anotaremos α_{ij} , donde:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}; \forall i, j = 1, \dots, n$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$

$$a) \alpha_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$b) \alpha_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \alpha_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Definición 2

1. Cálculo de Determinantes vía Método Expansión de Laplace

Dado $A = (a_{ij})_{n \times n} \in K^{n \times n}$, se define:

$$\det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_{ij}$$

O bien,

$$\det(A) = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \dots + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}\alpha_{ij}$$



Pierre Simon Laplace (1749 - 1827)

Astrónomo, físico y matemático francés que inventó y desarrolló la

Transformada de Laplace y la ecuación de Laplace.

A la edad de 18 años obtuvo el puesto de profesor en la Escuela Militar de París, gracias a la recomendación de d'Alembert quien estaba impresionado por su habilidad matemática. Laplace durante su carrera de docente tuvo entre sus discípulos entre otros a Napoleón.

Ejemplo

Calcular el determinante de A , donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{41}\alpha_{41} + a_{42}\alpha_{42} + a_{43}\alpha_{43} + a_{44}\alpha_{44}$$

$$\det(A) = -2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} + 0$$

$$\det(A) = (-2) \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\} - \left\{ 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\det(A) = (-2) \{ 2 + 2 \cdot 6 \} - \{ 2(-1) \}$$

$$\det(A) = -28 + 2$$

$$\det(A) = -26$$

2. Método de Sarrus (exclusivamente para matrices de orden 3x3)

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Método:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



Pierre Frédéric Sarrus (1798 - 1861)

Matemático francés, a la edad de 17 años le tocó escoger la continuación de sus estudios los que se inclinaban entre medicina y matemática. Sus trabajos tratan sobre los métodos de resolución de ecuaciones numéricas y sobre el cálculo de variaciones

Adjunta de una Matriz

Sea $A \in K^{n \times m}$, se define la adjunta de A, se anotará $\text{Adj}(A)$, como la traspuesta de los cofactores de A, esto es:

$$\text{Adj}(A) = [\alpha_{ij}]^t$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, por definición sabemos que:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}^t$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa de una Matriz

Dado $A \in K^{n \times n}$, tal que $|A| \neq 0$ (el rango de la matriz es completa $rg(A) = n$), se define

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$

Ejemplo

Calcular A^{-1} , donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, si es posible.

Primero: $|A| = 4 - 6 = -2$, luego A es invertible, así

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \text{Adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Propiedades de los Determinantes

3. Propiedades de los Determinantes

3.1 $|A^t| = |A|$, $A \in K^{n \times n}$

3.2 Si la matriz $A \in K^{n \times n}$ tiene una de sus filas o columnas nula, el determinante de A es 0, es decir $|A| = 0$

3.3 Si la matriz $A \in K^{n \times n}$ tiene una de sus filas o columnas múltiplo de otra, el determinante de A es 0, es decir $|A| = 0$

3.4 Sea $k \in K$, $A \in K^{n \times n}$ entonces $|kA| = k^n |A|$

3.5 Si en una matriz $A \in K^{n \times n}$ se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante de la matriz cambia de signo

3.6 Si una matriz $A \in K^{n \times n}$ posee dos filas (columnas) proporcionales o iguales, entonces $|A| = 0$

3.7 Si una matriz $A \in K^{n \times n}$ se cambia una fila i (columna i) por la suma de la fila i, más k veces otra fila j (por la suma de la columna i, más k veces otra columna j), el determinante de A no cambia.

3.8 $|AB| = |A||B|$, con $A, B \in K^{n \times n}$

$$3.9 \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, \text{ con } \text{rg}(A)=n, |A| \neq 0 \text{ y } A \in K^{n \times n}$$

$$3.10 \quad |I_n| = 1$$

$$3.11 \quad |dig(a_1, a_2, \dots, a_n)| = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$3.12 \quad |E_{ij}| = -1, |E_i(k)| = k, |E_{ij}(k)| = 1$$

$$3.13 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, A \in K^{n \times n}, |A^k| = |A|^k$$

$$3.14$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 + a_{12} \\ a_{21} & b_2 + a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 + a_{11} & b_2 + a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ejemplo (propiedad 3.5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \text{ si intercambiamos la fila uno por la dos, obtenemos: } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Ejemplo

Usando propiedades de determinante, calcule: $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$ conocido como

determinante de Vandermonde.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} & \stackrel{\substack{f_{21}(-1) \\ f_{31}(-1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \\
 & = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{f_{32}(-1)}{=} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{vmatrix} \\
 & = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 & = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) = \prod_{j < i} (x_i - x_j)
 \end{aligned}$$