

MÓDULO 3: “Sistema de Ecuaciones Lineales”

Definición

Una ecuación lineal con n incógnitas y coeficientes en K es de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b_1$$

Si a_i , $\forall i=1, \dots, n$ son reales, es decir, pertenece a $\mathbb{R}$. Diremos que la ecuación dada es una ecuación lineal real.

Observaciones:

1. a_i ($\forall i=1, \dots, n$) recibe el nombre de coeficiente de la ecuación lineal.
2. x_i ($\forall i=1, \dots, n$) son las n – variables (o incógnitas) de la ecuación lineal.
3. b es el llamado término independiente.

Matricialmente cada ecuación del sistema puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (b_i)$$

Diremos que un sistema de ecuaciones lineales está formado por dos o más ecuaciones lineales, a saber:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Es un sistema de m ecuaciones lineales con n variables (o incógnitas), donde

- Cada $a_{ij} \in K$ ($K = \mathbb{R}$) $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$ recibe el nombre de coeficientes del sistema.
- Cada x_i $i = 1, \dots, n$ son las variables del sistema
- Cada b_i $i = 1, \dots, m$ son los términos o coeficientes independientes del sistema.

Luego, el sistema de ecuaciones lineales puede ser escrito matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

O bien $AX = B$

Note que

$A \in K^{m \times n}$: Matriz de los coeficientes o matriz principal

$X \in K^{n \times 1}$: Matriz incógnita

$B \in K^{m \times 1}$: Matriz del término independiente

Nota: La solución del sistema es la solución que satisface a cada una de las ecuaciones del sistema lineal. Es decir, si S_i es la solución de la ecuación i -ésima del sistema (con $i=1,\dots,m$) entonces la solución S del sistema de ecuaciones será:

$$S = \bigcap_{i=1}^m S_i$$

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en Homogéneos y No Homogéneos.

Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneos y No Homogéneos

1. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de la forma $A \cdot X = B$, (con $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times 1}$, X es incógnita) es homogéneo ssi $B = \hat{0}$, es decir, todos los coeficientes que definen B son ceros, a saber:

$$A \cdot X = \hat{0}.$$

Un sistema lineal de ecuaciones homogéneo siempre tiene solución, estas pueden ser: solución única (trivial: solución nula) o tener infinitas soluciones.

1.1 Un sistema lineal de ecuaciones homogéneo

$AX = B$, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{m \times 1}$ tiene solución única ssi

i. $m = n$ y $rg(A) = n$

ii. $m = n$ y $\det(A) \neq 0$

iii. $m = n$ y A es invertible (regular o no singular)

Ejemplo

$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ Un sistema lineal de ecuaciones homogéneo que posee 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando Operaciones Elementales Filas (O.E.F.) a la matriz se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{2(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $A \sim I_2$, además se tiene que:

$rg(A) = 2$, $\det(A) = -1$ y A es invertible.

Luego tenemos un sistema equivalente $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.2 Un sistema lineal de ecuaciones homogéneo

$AX = B$, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{m \times 1}$ tiene infinitas soluciones:

i. Si $m < n$, es decir si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas $\Leftrightarrow \text{rg}(A) \leq m$

ii. Si $m = n$ y $\text{rg}(A) < n \Leftrightarrow m = n$ y $\det(A) = 0$

$\Leftrightarrow m = n$ y A no es invertible

Nota: Supongamos que $m > n$ entonces

si $\text{rg}(A) = n$ el sistema tiene única solución

si $\text{rg}(A) < n$ el sistema tiene infinitas soluciones

Ejemplo

Hállese el espacio solución de

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando O.E.F. sobre la matriz A , tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12(-2)} \tilde{f}_{32(-3)}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{24}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{42(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{32(-4)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{3(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa $rg(A) = 3$, al igual que el número de incógnitas del sistema lineal de ecuaciones homogéneo, por lo tanto, el sistema posee solución única, a saber:

$$S = \{(0,0,0)\}$$

Ejemplo

Hállese el espacio solución de
$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando O.E.F. sobre la matriz tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego es sistema equivalente es:

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right|$$

Notemos que el sistema posee una variable libre. Sea z la variable libre ($z = k \in \mathbb{R}$), luego la solución del sistema es:

$$x = 0 \quad y = k \quad z = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$S = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = (0, k, k), k \in \mathbb{R}\}$; esto quiere decir que hay infinitas soluciones, pues $k \in \mathbb{R}$

$$S = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}\}$$

$S = \langle (0, 1, 1) \rangle$; indica que el espacio solución está generado por el vector $(0, 1, 1)$

Notas:

1. Este espacio solución define una recta de $\mathbb{R}^3$, es decir, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, contenido que veremos más adelante (Capítulo II).
2. Las soluciones de un sistema lineal homogéneo son las soluciones del kernel (o núcleo) de la matriz de los coeficientes, tema que trataremos más adelante.

2. Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos

Un sistema de la forma $A \cdot X = B$, (con $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times 1}$, X es incógnita) es no homogéneo ssi $B \neq 0$, es decir, existe al menos un b_i con $i = 1, \dots, m$, distinto de cero.

Un sistema lineal de ecuaciones no homogéneo puede no tener solución (el sistema es inconsistente), puede tener solución única o tener infinitas soluciones.

2.1 Un sistema lineal de ecuaciones $AX = B$, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{m \times 1}$ no homogéneo no tiene solución ssi

- i. $m = n$ y $rg(A) < rg(A|B)$, es decir $\det(A) = 0$
- ii. $m < n$ y $rg(A) < rg(A|B)$
- iii. $m > n$ y $rg(A) < rg(A|B) \leq n$

Notación: $rg(A|B) :=$ rango de la ampliada.

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{array}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aplicando O.E.F. a la matriz, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1|1 \\ 4 & 2|3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1|1 \\ 0 & 0|1 \end{pmatrix} \therefore \text{rg}(A)=1 \text{ y } \text{rg}(A|B)=2, \text{ es decir, } \text{rg}(A) < \text{rg}(A|B).$$

Luego se tiene el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{array}{r|l} 2x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{array} \quad \text{¡Contradicción!}$$

$\therefore$ El sistema es incompatible, no tiene solución.

2.2 Un sistema lineal de ecuaciones $AX = B$, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{m \times 1}$ no homogéneo tiene solución única ssi

i. $m = n$ y $\text{rg}(A) = n$

ii. $m > n$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$

Ejemplo

$$\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{array}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aplicando O.E.F. a la matriz, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 3 \\ 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \therefore \text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2, \text{ es decir, es de}$$

rango completo, luego el sistema tiene única solución.

Notamos que podemos seguir aplicando O.E.F. y de ese modo obtener inmediatamente el resultado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{2(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

De este modo obtenemos la solución general, a saber:

$$S_G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

2.3 Un sistema lineal de ecuaciones $AX = B$, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{m \times 1}$ no homogéneo tiene infinitas soluciones ssi

i. $m = n$ y $rg(A) = rg(A|B) < m$, aquí $\det(A) = 0$

ii. $m < n$ y $rg(A) = rg(A|B) \leq m$

iii. $m > n$ y $rg(A) = rg(A|B) < n$

Ejemplo

$$\begin{array}{l|l} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aplicando O.E.F. a la matriz, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 4 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \therefore rg(A) = rg(A|B) = 1, \text{ es decir, menor a } m = 2.$$

$\therefore$ El sistema posee infinitas soluciones, luego el sistema equivalente a resolver es:

$$2x + y = 1$$

Notamos que el sistema posee una variable libre, a considerar x libre, se tiene:

$$y = 1 - 2x$$

Entonces la solución general está determinada por:

$$S_G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x, 1 - 2x)\}$$
$$S_G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}$$

O bien

$$S_G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ es llamada recta afín.}$$

Núcleo o Kernel de una Matriz

Definición

Sea $A \in K^{m \times n}$ se define el kernel de A (o núcleo), que anotaremos $\text{Ker } A$, como:

$$\text{Ker } A = \{x \in K^{n \times 1} : Ax = \hat{0}\}$$

Ejemplo

Dado $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : Ax = 0_2\}$

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{f}_{21(-2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 0; y \text{ variable libre en } \mathbb{R} \Rightarrow x = -2y$$

Luego,

$$\text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Ker } A = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Teorema

Sea $S_G = \{X \in K^{n \times 1} : AX = B\}$ el conjunto solución del sistema $AX = B$

donde $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{m \times 1}$, entonces $S_G = \{X \in K^{n \times 1} : X = X_p + X_H\}$, con X_p solución particular y $X_H \in \text{Ker } A$

Demostración

Sea $S = \{X \in K^{n \times 1} : X = X_p + X_H\}$. Por demostrar $S_G = S$, esto es, por demostrar:

$$\text{i) } S \subseteq S_G \quad \text{ii) } S_G \subseteq S$$

$$\text{i) } \text{Sea } y \in S \Rightarrow y = X_p + X_H$$

Luego

$$Ay = A(X_p + X_H)$$

$$Ay = AX_p + AX_H$$

Pero $AX_p = B$, pues X_p es solución particular de $AX = B$ y $AX_H = \hat{0}$ pues

$$X_H \in \text{Ker } A. \text{ Luego } Ay = B + \hat{0} = B$$

$$\therefore y \in S_G$$

En consecuencia $S \subseteq S_G$.

ii) Sea $X \in S_G$, y consideremos X_p solución particular del sistema $AX = B$, entonces afirmamos que $X - X_p$ es solución del sistema homogéneo, en efecto:

$$A(X - X_p) = AX - AX_p = B - B = \hat{0}$$

Lo que implica, $X - X_p \in \text{ker } A$.

Luego $X = X_p + (X - X_p) = X_p + X_H$. Por lo tanto $X \in S$.

Notar que X_H representa la solución general del SEL homogéneo, de lo contrario no podríamos asegurar o garantizar de que $X - X_p$ está en X_H para cualquier solución particular del sistema dado.

Método de Cramer

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones no homogéneas donde $A \in K^{n \times n}$, $X \in K^{n \times 1}$ y $B \in K^{n \times 1}$ tal que $|A| \neq 0$.

Sea

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1i} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2i} \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{ii} \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{ni} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_i \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & b_1 \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & b_2 \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} \dots & b_i \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & b_n \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad |A| \neq 0$$



Gabriel Cramer (1704 - 1752)

Fue un matemático suizo nacido en Ginebra. Mostró gran precocidad en matemática y ya a los 18 años recibe su doctorado y a los 20 ya era profesor de matemática de la Universidad de Ginebra.

En 1731 presentó ante la Academia de las Ciencias de París, una memoria sobre las múltiples causas de la inclinación de las órbitas de los planetas.

Ejemplo

Hallar la solución de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

$\therefore$ Tiene única solución.

Luego

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

$\therefore S_G = \{(1, -1)\}$ única solución

Guía de ejercicios

1. Hallar una matriz $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ invertible, tal que $PA = R$ donde R es la ERF de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{13}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\tilde{f}_{21(3)} \\ 31(2)}]{\substack{\tilde{f}_{13} \\ 21(3)}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\tilde{f}_{1(-1)} \\ 2\left(\frac{1}{5}\right)}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\tilde{f}_{32(-5)} \\ 12(2)}]{\substack{\tilde{f}_{13(-1)} \\ 23(-1)}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\tilde{f}_{13(-1)} \\ 23(-1)}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & -1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 & -1 & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Luego la ERF de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} \\ -1 & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Así $PA = R$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} \\ -1 & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcula el determinante de A, por método de Laplace

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ -7 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Elijo columna 2

$$\begin{aligned} |A| &= a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} + a_{42}\alpha_{42} \\ &= 2\alpha_{12} + 0 + 1\alpha_{32} + 0 \end{aligned}$$

Busco α_{12}, α_{32}

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -[a_{31}\alpha_{31} + a_{32}\alpha_{32} + a_{33}\alpha_{33}] \\ &= - \left[2 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \right] \\ &= -[2 \cdot 12 + (-1) \cdot (-5) + (-1) \cdot 37] \\ &= -(24 - 5 - 37) \\ &= -(-18) \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -[a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}] \\
 &= - \left[2 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \right] \\
 &= -[2 \cdot -4 + -3 \cdot 1] \\
 &= -(-8-3) \\
 &= -(-11) \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos

$$\begin{aligned}
 |A| &= 2\alpha_{12} + 1\alpha_{32} \\
 &= 2 \cdot 18 + 1 \cdot 11 \\
 &= 36 + 11 \\
 &= 47
 \end{aligned}$$

3. Hallar el espacio solución de:

$$\begin{cases} x + 5y - z = 0 \\ -2x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{0}}$$

Solución:

Aplicaremos OEF (Gauss-Jordan) la matriz de los coeficientes, calculando el $rg(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}, \text{ hasta aquí el } rg(A) = 2$$

$\therefore$ hay infinitas soluciones

Ahora

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{2(\frac{1}{9})}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{12(-5)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}, \text{ es la ERF de } A$$

Luego el sistema equivalente es

$$\begin{cases} x - \frac{4}{9}z = 0 \\ y - \frac{1}{9}z = 0 \end{cases}$$

Es un sistema con una variable libre, en este caso z , de aquí se tiene:

$$x = \frac{4}{9}z, y = \frac{1}{9}z \quad ; \quad z = k \in \mathbb{R}$$

$$S_G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = \frac{4}{9}z, y = \frac{1}{9}z \quad ; \quad z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \frac{1}{9}z (4, 1, 9) \quad ; \quad z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = k (4, 1, 9) \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\therefore S_G = \langle (4, 1, 9) \rangle$$

$\langle (4, 1, 9) \rangle$ Es el espacio solución generado por $(4, 1, 9)$.

Es un espacio de $\dim = 1$ (subespacio de $\mathbb{R}^3$), entonces es una recta de $\mathbb{R}^3$

Nota: todas las $(x, y, z) \in \langle (4, 1, 9) \rangle$ son múltiplos de $k (4, 1, 9)$

4. Hallar el espacio solución de

$$\begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x - y + z = 6 \\ 2x - z = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Buscamos el $rg(A)$ y $rg(A|B)$ mediante OEF

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 6 \\ 2 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 6 \\ 2 & -1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\tilde{f}_{21(-2)} \\ \tilde{f}_{31(-2)}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & -1 & | & -11 \\ 0 & 2 & -3 & | & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}_{32(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & -1 & | & -11 \\ 0 & 0 & -1 & | & 10 \end{pmatrix}$$

Luego el $rg(A) = 3 = rg(A|B)$, por lo tanto el sistema tiene única solución

Continuamos aplicando OEF para obtener la ERF y tener la solución de inmediato

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{\tilde{f}_{13(1)} \\ 23(-1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{\tilde{f}_{12(1)} \\ 3(-1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array} \right)$$

El sistema equivalente es:

$$\left. \begin{array}{l} x = -5 \\ y = -21 \\ z = -10 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -21 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$S_G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -5, y = -21, z = -10\}$$

$$S_G = \{(-5, -21, -10)\}$$

5. Determine las condiciones sobre a y b para que A tenga $\text{rg}(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

El $\det(A) = 0$, por método de Sarrus tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= ab + 1 - a^2 + b = 0$$

$$= b + ab + 1 - a^2 = 0$$

$$= b(1+a) + (1-a^2) = 0$$

$$= b(1+a) + (1-a)(1+a) = 0$$

$$= (b + (1-a))(1+a) = 0$$

$$= b + 1 - a = 0 \quad \wedge \quad 1 + a = 0$$

$$= b + 1 = a \quad \wedge \quad a = -1$$

$$\Rightarrow b + 1 = -1$$

$$b = -2 \quad \wedge \quad a = -1$$

Luego para que el $\text{rg}(A) = 2$, los valores de a y b deben ser:

$$a = -1 \quad \wedge \quad b = -2$$

6. Determine los valores de α y $\beta \in \mathbb{R}$, en el sistema

$$\left. \begin{array}{l} (1+\alpha)x + 2y - z = 0 \\ x + (2+\alpha)y + z = \beta - \alpha - 1 \\ 2x - 2y - 2z = \beta + 1 \end{array} \right\}, \text{ tal que:}$$

(a) No tenga solución

(b) Tenga única solución

Solución:

La matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 2 & -1 \\ 1 & 2+\alpha & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\alpha & 2 & -1 \\ 1 & 2+\alpha & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\alpha & 2 \\ 1 & 2+\alpha \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+\alpha)(2+\alpha)(-2) + 4 + 2 + 2(2+\alpha) + 2(1+\alpha) + 4$$

$$= -4 - 6\alpha - 2\alpha^2 + 10 + 4 + 2\alpha + 2 + 2\alpha$$

$$= 12 - 2\alpha - 2\alpha^2$$

$$= -2(\alpha^2 + \alpha - 6)$$

(a) Por ver que el sistema no tenga solución:

$$|A| = 0, \text{ entonces } -2(\alpha^2 + \alpha - 6) = 0$$

$$-2(\alpha + 3)(\alpha - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -3 \vee \alpha = 2$$

Luego aplicamos OEF a la ampliada con $\alpha = 2$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \beta-3 \\ 2 & -2 & -2 & \beta+1 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & \beta-3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & \beta+1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\tilde{f}_{21}(-3) \\ 31(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & \beta-3 \\ 0 & -10 & -4 & 9-3\beta \\ 0 & -10 & -4 & 7-\beta \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & \beta-3 \\ 0 & -10 & -4 & 9-3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta-2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A|B)$$

Por lo tanto el sistema no tiene solución si:

$$\alpha = 2 \quad \wedge \quad \beta \neq 1$$

(b) Por ver que el sistema tenga única solución

Para esto el $|A| \neq 0$, entonces $-2(\alpha^2 + \alpha - 6) \neq 0$

$$-2(\alpha + 3)(\alpha - 2) \neq 0$$

$$\Rightarrow -2 \neq 0 \quad \vee \quad \alpha \neq -3 \quad \vee \quad \alpha \neq 2$$

Luego tomamos un valor arbitrario para α , en este caso $\alpha = 1$.

Ahora aplicamos OEF a la ampliada, para $\alpha = 1$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \beta - 2 \\ 2 & -2 & -2 & \beta + 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \beta - 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & \beta + 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\tilde{f}_{21}(-2) \\ 31(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \beta - 2 \\ 0 & -4 & -3 & 4 - 2\beta \\ 0 & -8 & -4 & 5 - \beta \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{32}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \beta - 2 \\ 0 & -4 & -3 & 4 - 2\beta \\ 0 & 0 & 2 & 3\beta - 3 \end{array} \right)$$

Hasta aquí $rg(A) = rg(A|B)$, por lo tanto hay única solución

Continuando con O.E.F., tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \beta - 2 \\ 0 & -4 & -3 & 4 - 2\beta \\ 0 & 0 & 2 & 3\beta - 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\tilde{f}_{13}\left(\frac{-1}{2}\right) \\ 23\left(\frac{1}{3}\right)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \frac{-1 - \beta}{2} \\ 0 & -4 & 0 & \frac{5\beta - 1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3\beta - 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\tilde{f}_{3\left(\frac{1}{2}\right)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \frac{-1 - \beta}{2} \\ 0 & -4 & 0 & \frac{5\beta - 1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3\beta - 3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{2\left(\frac{-1}{4}\right)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \frac{-1 - \beta}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1 - 5\beta}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3\beta - 3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\tilde{f}_{12}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11\beta - 7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1 - 5\beta}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3\beta - 3}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Luego } x = \frac{11\beta - 7}{8} ; \quad y = \frac{1 - 5\beta}{8} ; \quad z = \frac{3\beta - 3}{2}$$

$\therefore \beta$ puede tomar cualquier valor cuando $\alpha = 1$

Autoevaluación nº 1

(Prueba año 2004)

1. Pruebe o refute.

a) El producto de matrices simétricas es simétrico.

b) $\forall A \in K^{n \times n}; A^n = \hat{0} \Rightarrow A = \hat{0}$ c) $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica $\forall A$ d) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \quad \forall A, B$ e) Si $A, B \in K^{n \times n}$ y $A \bullet B = \hat{0} \Rightarrow A = \hat{0} \text{ o } B = \hat{0}$ 2. Hallar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, si existe, por adjunta.3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Hallar P, Q invertibles tales que $PAQ = B$, donde B es la E.R.F de A .4. Sabiendo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y que $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule B .

Soluciones:

1.

- a) Falso
- b) Verdadero
- c) Verdadero
- d) Falso
- e) Verdadero

$$2. A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-5}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$3. P = \begin{pmatrix} \frac{-3}{17} & \frac{5}{17} & 0 \\ \frac{4}{17} & \frac{-1}{17} & 0 \\ \frac{9}{17} & \frac{-15}{17} & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

$$4. B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Se recomienda resolver los siguientes ejercicios:

Morris R., Johnson R. (1984). "Álgebra Lineal"

Pág. 20, Lista de Ejercicios N° 1, pág. 45, Lista de Ejercicios N° 2, pág. 56, Lista de Ejercicios N° 3, pág. 80, Lista de Ejercicios N° 4.