Espacios Vectoriales

Para constituir un espacio vectorial requerimos de dos conjuntos, no vacíos, uno que anotaremos por V, cuyos elementos llamaremos *vectores*, y otro que anotaremos por K, donde sus elementos los llamaremos *escalares*. En V se define una ley de composición interna "$+$" (suma de vectores) **tal que $(V,+)$ es una estructura de *grupo abeliano*, y en K se definen dos operaciones $+$ y $\cdot$** (suma y producto de escalares) **tal que $(K,+,\cdot)$ es una estructura de *campo*.**

Definición

$((V,+),\bullet)$ **es un espacio vectorial sobre el campo K, o bien, V es un $K-\text{espacio vectorial}$ si y sólo si:**

(i) $(V,+)$ **es un grupo abeliano**

(ii) $\bullet : K \times V \to V$ **es ley de composición externa (ponderación), tal que** $\forall (k,v) \in K \times V$, $k \bullet v \in V$ **, verifica:**

E.1 $(k+\lambda)\bullet v = (k \bullet v) + (\lambda \bullet v)$ **;** $\forall k,\lambda \in K, v \in V$

E.2 $k \bullet (v + w) = (k \bullet v) + (k \bullet w)$ **;** $\forall k \in K; v,w \in V$

E.3 $k \cdot (\lambda \bullet v) = (k \cdot \lambda) \bullet v$ **;** $\forall k,\lambda \in K, v \in V$

E.4 $1 \bullet v = v$ **;** $\forall v \in V$, $1\, \textit{identidad en } K$

Ejemplos

1. $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$ -e.v.
2. $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$ -e.v.

$(\mathbb{R}^2,+)$ es un grupo abeliano, donde $\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$, se define $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

Se define una l.c.e. $\bullet$, como sigue

$$\bullet:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$(\lambda,(a,b))\mapsto\lambda\bullet(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$$

que verifica los axiomas E.1 a E.4

En efecto,

Demostración E.1

$\forall\lambda,k\in\mathbb{R},\forall\, v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(\lambda+k)\bullet(a,b) &=((\lambda+k)a,(\lambda+k)b) && \text{/ distributividad en } \mathbb{R}\\ &=(\lambda a+ka,\lambda b+kb)\\ &=(\lambda a,\lambda b)+(ka,kb)\\ &=\lambda\bullet(a,b)+k\bullet(a,b)\end{aligned}$$

Demostración E.2

$\forall\, k\in\mathbb{R},\forall\, v=(a,b),\ w=(c,d)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}k\bullet((a,b)+(c,d)) &=k\bullet(a+c,b+d)\\ &=(k(a+c),\,k(b+d))\\ &=(ka+kc\ ,\ kb+kd)\\ &=(ka\ ,\ kb)+(kc\ ,\ kd)\\ &=k\bullet(a,b)+k\bullet(c,d)\end{aligned}$$

Demostración E.3

$\forall \lambda, k \in \mathbb{R}, \forall\, v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} k(\lambda \bullet (a,b)) &= k(\lambda a, \lambda b) \\ &= (k(\lambda a), k(\lambda b)) \\ &= ((k\lambda)a, (k\lambda)b) \\ &= (k\lambda) \bullet (a,b) \end{aligned}$$

Demostración E.4

$\forall\, v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 1 \bullet (a,b) &= (1a, 1b) \\ &= (a,b) \end{aligned}$$

Generalizando, $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-e.v.

3. Sea A un conjunto no vacío, K un campo, $K^A := \{ f : A \to K \,/\, f$ es función $\}$ es un K-e.v.

3.1 Se define una l.c.i. $+$ en K^A

$+ : K^A \times K^A \to K^A$, tal que

$\forall f, g \in K^A, f + g \in K^A$, donde

$\forall x \in A, (f+g)(x) := f(x) + g(x)$

Esquemáticamente:

$$\begin{aligned} + : K^A \times K^A &\to K^A \\ (f,g) &\mapsto f + g : A \to K \\ & \qquad\qquad x \mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Así $(K^A, +)$ es un grupo abeliano, es decir verifica las siguientes propiedades:

Eduardo Cabrera de Arrizabalaga (profesor guía), Karla González, Verónica León & Lissette Venegas (tesistas 2009)

3.1.1 $+$ está bien definida

Si $(f,g)=(h,\delta)\Rightarrow f+g=h+\delta$

3.1.2 $+$ es asociativa en K^A

$\forall f,g,h\in K^A,\ (f+g)+h=f+(g+h)$

En efecto,

$$\begin{aligned}\forall x\in A:((f+g)+h)(x) &=((f+g)(x)+h(x))\\ &=((f(x)+g(x))+h(x)) \quad ;\ \text{asociatividad en } K\\ &=(f(x)+(g(x)+h(x)))\\ &=(f(x)+(g+h)(x))\\ &=(f+(g+h))(x)\end{aligned}$$

3.1.3 Existencia de elemento neutro

Debe existir $\mu\in K^A$, $\forall f\in K^A$ tal que $f+\mu=\mu+f=f$

Supongamos

$$f+\mu=f$$

$$\forall x\in A,\ (f+\mu)(x)=f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)+\mu(x)=f(x)\ ;\text{ en } K \text{ cuerpo}$$

$$\mu(x)=0_K\ ;\ 0_K \text{ neutro en } K$$

En una función constante de valor "0", μ es la función nula que anotamos por $\hat{\vartheta}$.

$$\forall x\in A,\ \hat{\vartheta}(x)=0_K$$

$\therefore$ El neutro en K^A es la función nula $\hat{\vartheta}$.

3.1.4 Cada elemento de K^A posea inverso aditivo.

$\forall\ f\in K^A$, debe existir $h\in K^A$ tal que $f+h=h+f=\hat{\vartheta}$

Supongamos

$$f+h=\hat{\vartheta}$$

$$\forall x \in A,\ \left(f+h\right)(x)=\hat{\vartheta}(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)+h(x)=0_K \ / + - f(x) \text{ en } K$$

$$h(x)=-f(x)$$

$\therefore$ El opuesto de f es $-f$ en K^A.

Hasta aquí $\left(K^A,+\right)$ es Grupo.

3.1.5. $+$ es conmutativa en K^A

De manera fácil se verifica que, $\forall\ f,g\in K^A,\ f+g=g+f$

$\therefore$ $\left(K^A,+\right)$ es Grupo Abeliano.

3.2 Ahora definamos una ley de composición externa (ponderación).

$\bullet : K\times K^A \to K^A$

$$(k,f)\mapsto k\bullet f : A\to K$$

$$x\mapsto \left(k\bullet f\right)(x)=hf(x)$$

Que verifique axiomas de E.1 a E.4

En efecto, E.1:

$\forall\ k,\lambda\in K, \forall\ f\in K^A$ se cumple que $\left(k+\lambda\right)\bullet f=(k\bullet f)+(\lambda\bullet f)$

$\forall x\in A,\ \left(\left(k+\lambda\right)\bullet f\right)(x)=\left(k+\lambda\right)f(x)$; distributividad en K

$$=kf(x)+\lambda f(x)$$

$$=\left(k\bullet f\right)(x)+\left(\lambda\bullet f\right)(x)$$

$$=\left(kf+\lambda f\right)(x)$$

$\therefore$ Se cumple la igualdad

Queda para el lector demostrar E2, E3, E4.

Luego de 3.1 y 3.2 se tiene que K^A es un K - e.v.

Proposiciones

En todo espacio vectorial V, sobre un cuerpo K, se verifica:

1. $0_K \bullet v = 0_v$; $\forall v \in V$
2. $h \bullet 0_v = 0_v$; $\forall k \in K$
3. $k \bullet v = 0_v \Leftrightarrow k = 0_k$ ó $v = 0_v$
4. $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$; $\forall \lambda \in K, \forall v \in V$

Demostración 1.

Sabemos que $0_K + 0_K = 0_K$

Luego $0_K \bullet v = (0_K + 0_K) \bullet v$ /E.1

$$0_K \bullet v = 0_K \bullet v + 0_K \bullet v \quad /+ \ -0_K \bullet v$$

$$\underbrace{0_K \bullet v - 0_K \bullet v} = 0_K \bullet v + \underbrace{0_K \bullet v - 0_K \bullet v}$$

$$0_V = 0_K \bullet v + 0_V$$

$$0_V = 0_K \bullet v \quad ; \ \forall v \in V$$

Queda para el lector demostrar 2, 3 y 4.

Subespacio Vectorial

Definición

Sea $(V,+)$ un K-e.v. y H un subconjunto no vacío de V, $\phi \neq H \subseteq V$. Diremos que H es un Subespacio Vectorial de V, anotaremos $H \leq V$, sí y sólo sí $(H,+)$ es un K-e.v.

Ejemplos de subespacios canónicos de $\mathbb{R}^3$

Plano XY: $\mathbb{R} \; x \; \mathbb{R} \; x \; \{0\} \leq \mathbb{R}^3$

Plano XZ: $\mathbb{R} \; x \; \{0\} \; x \; \mathbb{R} \leq \mathbb{R}^3$

Plano YZ: $\{0\} \; x \; \mathbb{R} \; x \; \mathbb{R} \leq \mathbb{R}^3$

Eje X: $\mathbb{R} \; x \; \{0\} \; x \; \{0\}$

Eje Y: $\{0\} \; x \; \mathbb{R} \; x \; \{0\}$

Eje Z: $\{0\} \; x \; \{0\} \; x \; \mathbb{R}$

Nota: Todo K-e.v. admite al menos dos subespacio, que son el mismo espacio vectorial, como un subespacio de sí mismo, y el subespacio vectorial que contiene sólo al neutro del espacio; a estos dos subespacios se les llama subespacios triviales. Cualquier otro subespacio de un K-e.v. se llama subespacio propio.

Criterio para Subespacios

Proposición:

Sea V un K–e.v. y $H \subseteq V, H \neq \phi$.

$H \leq V$ si y sólo sí

(i) Dados $x, y \in H \Rightarrow x + y \in H$

(ii) Dado $\lambda \in K, v \in H \Rightarrow \lambda v \in H$

Demostración

Por demostrar que $H \leq V$

$\Rightarrow]$ Como $H \leq V$ entonces H es un K–e.v., luego se verifican i). y ii).

$\Leftarrow]$Asumiendo i). y ii). basta demostrar que H es un K–e.v. con las leyes definidas en V ; para ello sólo basta ver que $0_v \in H$ y $-v \in H$ cuando $v \in H$, ya que la asociatividad y la conmutatividad se heredan de V a H ($H \subseteq V$).

En efecto,

$$0_k \in K, \forall v \in H$$

por 2. se tiene que $0_k \bullet v \in H \Rightarrow 0_v \in H$

Además: para $-1 \in K \,;\, v \in H$

se tiene que $(-1) \bullet v = -v \in H$

además se verifica E.1 a E.4 pues $H \subseteq V$

$$\therefore\ H \leq V$$

Ejemplos

1. $W = \{(x, mx) : m \in \mathbb{R}$ fijos, $x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$¿W \leq \mathbb{R}^2?$$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Notar que W es una recta que pasa por el origen $(0,0) \in W$.

Es claro que $W \in \mathbb{R}^2$, $W \neq \varphi$ pues $(0,0) \in W$.

Por ver

i) Dados $u, v \in W$, por demostrar que $u + v \in W$

Sea $u = (x, y) \in W \Rightarrow y = mx$

Sea $v = (x', y') \in W \Rightarrow y' = mx'$

Luego

$$y + y' = mx + mx'$$
$$= m(x + x')$$

Esto nos dice que

$$(x + x', y + y') \in W$$
$$\therefore u + v \in W$$

ii) Dado $\lambda \in \mathbb{R}, v \in W$ por demostrar que $\lambda v \in W$

Sea $v = (x, y) \in W \Rightarrow y = mx$

Luego con $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lambda y = \lambda(mx)$$
$$= m(\lambda x)$$
$$\therefore (\lambda x, \lambda y) \in W$$

Es decir,

$$\lambda(x, y) \in W$$
$$\therefore \lambda v \in W$$

Por lo tanto $W \leq \mathbb{R}^2$

Proposición

Dado V **un** K**–e.v., si** $U, W \leq V \Rightarrow U \cap W \leq V$

Demostración

i) Como $U, W \leq V$ se cumple que

$$0_V \in U \quad \wedge \quad 0_V \in W$$
$$\therefore 0_V \in U \cap W \quad ; \quad U \cap W \neq \phi$$

Además es claro que $U \cap W \subseteq V$

ii) Dados $x, y \in U \cap W$, por demostrar que $x + y \in U \cap W$

Si $x, y \in U \cap W$

$$\Rightarrow (x \in U \wedge x \in W) \wedge (y \in U \wedge y \in W)$$

Como $U, W \leq V$, entonces

$$x+y \in U \quad \wedge \quad x+y \in W$$

$$\Rightarrow x+y \in U \cap W$$

iii) Dados $\lambda \in K$, $x \in U \cap W$, por demostrar que $\lambda x \in U \cap W$

Si $x \in U \cap W$

$$\Rightarrow x \in U \wedge x \in W$$

Como $U, W \leq V$, $\lambda \in K$, entonces

$$\lambda x \in U \wedge \lambda x \in W$$

$$\Rightarrow \lambda x \in U \cap W$$

Luego de i, ii, iii se tiene que $U \cap W \leq V$, siempre que $U, W \leq V$ y V un K–e.v.

Generalizando:

Dado V un K–e.v. y $\{W_i : i \in I\}$ una familia de subespacios de V, es decir $W_i \leq V \quad \forall\, i \in I$ (puede considerar $I = \{1, \ldots, r\}$),

Entonces

$$\bigcap_{i \in I} W_i \leq V$$

Ejemplo

Sea V un K–e.v. y sea $H, T \leq V \not\Rightarrow H \cup T \leq V$

Por contraejemplo

Sean

$$H = L_{(1,3)} = \{(x,y) : (x,y) = k(1,3), k \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$T = L_{(2,1)} = \{(x,y) : (x,y) = k(2,1), k \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Notemos que

$$(1,3) \in L_{(1,3)} \Rightarrow (1,3) \in L_{(1,3)} \cup L_{(2,1)}$$

$$(2,1) \in L_{(2,1)} \Rightarrow (2,1) \in L_{(1,3)} \cup L_{(2,1)}$$

Pero

$$(1,3)+(2,1)=(3,4)\notin L_{(1,3)}\cup L_{(2,1)}$$

Supongamos que

$$(3,4)\in L_{(1,3)}\Rightarrow (3,4)=k(1,3)$$

$$(3,4)=(k,3k)$$

$$\Rightarrow 3=k \quad\wedge\quad 4=3k\Rightarrow \frac{4}{3}=k$$ ¡Contradicción!

En consecuencia, si $H\,,T\leq V \not\Rightarrow H\cup T\leq V$

Suma de Subespacios

Definición

Dado V **un** K**–e.v. y** $U\,,W\leq V$**, se define la suma de subespacios** U **y** W**, que anotamos** $U+W$, como

$$U+W=\{v\in V:v=u+w\,,u\in U\,,w\in W\}$$

Proposición:

Sea V un K–e.v y $\{W_i\}_{i\in I=\{1,\ldots,k\}}$ una familia de subespacios de V, entonces $\sum_{i=1}^{k}W_i\leq V$.

Notar que:

$$\sum_{i=1}^{k}W_i=W_1+W_2+\ldots\ldots+W_k=\{w_1+w_2+\ldots+w_k\,/\,w_i\in W_i,\forall i\in I=1,\ldots,k\}$$

Demostración

i) Es claro que $\sum_{i\in I}W_i\subseteq V$ pues cada $W_i\subseteq V$ con $i=1,\ldots,k$ además $W_i\leq V$ y $\sum_{i\in I}W_i\neq\phi$ pues $0_V\in\sum_{i\in I}W_i$ ya que $0_V=0_{w_1}+0_{w_2}+\ldots\ldots+0_{w_k}$

ii) Dados $x\,,\,y \in \sum_{i\in I}^{k} W_i$ por demostrar que $x + y \in \sum_{i=1}^{k} W_i$

si $x\,,\,y \in \sum_{i\in I}^{k} W_i \Rightarrow x = \sum_{i\in I} u_i$ donde $u_i \in W_i, \forall i$ u

$\Rightarrow y = \sum_{i\in I} v_i$ donde $v_i \in W_i, \forall i$

Entonces $x + y = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$

$= \sum_{i\in I} (u_i + v_i)$; donde $(u_i + v_i) \in W_i \ \forall i$ pues $W_i \leq V$

$\therefore x + y \in \sum_{i\in I} W_i$

iii) Dado $\lambda \in K, x \in \sum_{i\in I} W_i$ por demostrar que $\lambda x \in \sum_{i\in I} W_i$

Se tiene: $\lambda x = \lambda \sum_{i\in I} u_i$; $u_i \in W_i\,,\forall i$

$= \lambda(u_1 + u_2 + ...+ u_k)$; $u_i \in W_i, \forall i$

$= \lambda u_1 + \lambda u_2 + ...+ \lambda u_k$

$= \sum_{i\in I} \lambda u_i$; donde $\lambda u_i \in W_i\,,\forall i$ pues $W_i \leq V$

$\therefore \lambda x \in \sum_{i\in I} W_i$

En consecuencia, de i), ii), y iii) se tiene que la Suma de Subespacios es un Subespacio Vectorial.

Suma Directa de Subespacios

Definición

Sea V un K-e.v. y $\{W_i\}_{i\in I}$ **una familia de Subespacios de V. Diremos que la suma:**

$W_1 + W_2 + \ldots + W_r$ **es Suma Directa, si y solo sí**

$W_j \cap \left(W_1 + W_2 + \ldots + W_{j-1} + W_{j+1} + \ldots + W_r\right) = \{\,0_v\}$ **; para cualquier** $j = 1,\ldots,r$ **.**

Esta suma la anotaremos:

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$$

En particular,

1.- Si V es un K-e.v. y $W_1, W_2 \leq V$ **, la suma** $W_1 + W_2$ **es Suma Directa, si y solo sí**

$$W_1 \cap W_2 = \{\,0_v\}$$

2.- Dado V un K-e.v. y $W_1, W_2 \leq V$ **, diremos que V es Suma Directa de** $W_1 + W_2$ **, si y solo sí**

(i) $W_1 \cap W_2 = \{\,0_v\}$

(ii) $W_1 + W_2 = V$

Ejemplo

Sean $W_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\right\} \leq \mathbb{R}^2$

$W_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\right\} \leq \mathbb{R}^2$

¿Es $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$?

(i) Por ver que $W_1 + W_2$ es suma directa, es decir:

$$W_1 \cap W_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\};\ 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$$

Sea $(x, y) \in W_1 \cap W_2$

$$\Rightarrow (x, y) \in W_1 \quad \text{y} \quad (x, y) \in W_2$$

$$\Downarrow$$

$$x + 2y = 0 \qquad\qquad x - y = 0$$

Sistema de ecuaciones homogéneas

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \neq -3$, el sistema posee única solución, a saber:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{f_{21(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{f_{2\left(\frac{-1}{3}\right)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_{12(-2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad (x, y) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \quad W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$$

$$\therefore W_1 \oplus W_2$$

(ii) Ahora por ver que $\therefore W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$

Notar que:

Si $(x, y) \in W_1 \Rightarrow x + 2y = 0$ (hay una variable libre)

$$\Rightarrow x = 2y \quad ;\ y \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) = (-2y, y) \quad ;\ y \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) = y(-2,1) \quad ;\ y \in \mathbb{R}$$

$$W_1 = \{(x, y) = y(-2,1),\ y \in \mathbb{R}\}$$

$$W_1 = \langle(-2,1)\rangle := L_{(-2,1)}$$

Si $(x, y) \in W_2 \Rightarrow x - y = 0$

$$\Rightarrow x = y$$

luego $W_2 = \{(x,y):(x,y)=(x,x)\,,\, x\in\mathbb{R}\}$

$$W_2 = \{(x,y):(x,y)=x(1,1)\,,\, x\in\mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \langle(1,1)\rangle := L_{(1,1)}$$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\,,(x,y)=w_1+w_2$; con $w_1\in W_1$, $w_2\in W_2$ de manera única

$$(x,y)=k(-2,1)+\lambda(1,1)$$

$$(x,y)=(-2k,1k)+(\lambda,\lambda)$$

$$(x,y)=(-2k+\lambda\,,\,k+\lambda)\in\mathbb{R}^2$$

$\therefore W_1+W_2=\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 = W_1\oplus W_2$, es suma directa

Combinación Lineal

Definición

Sea V un K-e.v. y $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}\subset V$ un Sistema de Vectores de V. Un vector $v\in V$, se dice que es *combinación lineal* (*cl*) de los vectores de S si y solo si existen escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\in K$ tal que

$$v := \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r \;\; = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i$$

De lo señalado, también podemos decir que v es una *cl* de los vectores $v_1,v_2,\ldots,v_r$.

Ejemplo

(1) $(1,2)=1(1,0)+2(0,1)$ en $\mathbb{R}^2$

$(1,2)$ es combinación lineal de los vectores de $\{(1,0),(0,1)\}$

(2) ¿ $(1,2)$ es combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(0,-1)$?

Por ver que existen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, tal que:

$$(1,2)=\alpha(1,1)+\beta(0,-1)$$
$$(1,2)=(\alpha,\alpha)+(0,-\beta)$$
$$(1,2)=(\alpha,\alpha-\beta)$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha=1 \text{ y } \alpha-\beta=2$$
$$\Rightarrow \quad \beta=-1$$

Como existen $\alpha=1,\ \beta=-1$ en $\mathbb{R}$, tal que $(1,2)=1(1,1)+-1(0,-1)$, afirmamos que $(1,2)$ es combinación lineal de dichos vectores.

Sistema Generador

Definición

Sea V un K-e.v. y $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}\subseteq V$ **. Diremos que:**

$$\langle S\rangle:=\left\{v\in V : v=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i\ ,\ \alpha_i\in V\ ,\forall i=1,r\right\}$$

Proposición: Sea V un K - e.v., y S un sistema de vectores de V, entonces $\langle S\rangle\leq V$.

Nota: Al subespacio vectorial $\langle S\rangle$, se conoce como *envoltura lineal*, o bien, Subespacio generado por el Sistema de Vectores S .

Demostración:

(i) es evidente, por definición, que $\langle S\rangle \subseteq V$ y que $\langle S\rangle \neq \phi$, pues $0_v \in \langle S\rangle$, ya que $0_v := 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \ldots + 0\cdot v_r \in \langle S\rangle$

(ii) Dados $v, w \in \langle S\rangle$ por demostrar que $v+w \in \langle S\rangle$

Si $v \in \langle S\rangle \quad \Rightarrow \quad \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in K$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r$$

Si $w \in \langle S\rangle \quad \Rightarrow \exists\, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in K$ tal que

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_r v_r$$

Luego

$$v + w = (\alpha_1 + \beta_1)\, v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, v_2 + \ldots + (\alpha_r + \beta_r)\, v_r$$

$$v + w = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta_1)\, v_i \text{ , con } (\alpha_i + \beta_i) \in K \quad \forall i = 1, r$$

$$\therefore v + w \in \langle S\rangle$$

(iii) Dado $\lambda \in K, v \in \langle S\rangle$ Por demostrar que: $\lambda v \in \langle S\rangle$

Como $v \in \langle S\rangle \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \quad , \alpha_i \in K,\ \forall i = 1, r$

Luego como V es un K - e.v.

$$\lambda v = \lambda \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$$

$$\lambda v = \sum_{i=1}^{r} \lambda (\alpha_i v_i)$$

$$\lambda v = \sum_{i=1}^{r} (\lambda \alpha_i) v_i \quad ; \lambda \alpha_i \in K \text{ , } \forall i = 1, r$$

$$\therefore \lambda v \in \langle S\rangle$$

En consecuencia $\langle S\rangle \leq V$

Nota:

1. Cualquier sistema de vectores S de V genera un subespacio de V.

2. A modo de notación, y sin error a interpretación, en vez de escribir $\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}\rangle$ suele escribirse $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r\rangle$.

3. Si $W \leq V$ donde $W = \langle S\rangle$, decimos que S es un sistema generador de W.

4. Un espacio vectorial V sobre un cuerpo K (K-e.v.), se dice que es de tipo finito, o bien, que es finitamente generado, si admite un sistema generador con un número finito de vectores.

Propiedades

Sea v un k-e.v.

1. Si $S \subseteq V$ **entonces** $S \subseteq \langle S\rangle$

2. Si $A \subseteq B(\subseteq V)$ **entonces** $\langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$

3. Si $W \leq V$ **tal que** $S \subseteq W$**, entonces** $\langle S\rangle \subseteq W$ **.**

Por lo tanto, $\langle S\rangle$ **es el Subespacio más pequeño que contiene el Sistema de Vectores S.**

En particular,

si $W \leq V$ **entonces** $\langle W\rangle = W$ **.**

4. $\langle S\rangle = \bigcap_{S \subseteq W \leq V} W$

Definición

Sea V un K-e.v. y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subseteq V$

1. **Diremos que el Sistema de Vectores S es un sistema libre, o bien, que sus vectores son linealmente independientes (l.i.), si y solo sí**

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \quad \Rightarrow \alpha_i = 0 \, , \forall i = 1, \dots, r$$

2. **Diremos que el Sistema de Vectores S es un sistema ligado, o bien, que los vectores de S son Linealmente Dependientes (l.d.), si y solo sí**

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0 \text{ con } \alpha_i \neq 0 \text{, para algún } i = 1, \dots, r$$

Ejemplo

1. $S = \{(1,2),(1,1),(1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

¿Son linealmente independiente o linealmente dependiente los vectores de S?

Supongamos que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha(1,2) + \beta(1,1) + \gamma(1,0) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$2\alpha + \beta = 0$$

Es un sistema homogéneo con dos ecuaciones y tres incógnitas. Tiene infinitas soluciones. De este modo, el sistema de vectores $\{(1,2),(1,1),(1,0)\}$ es un Sistema Ligado, o los vectores son Linealmente Dependientes.

Otra forma:

Analizar el rango de la matriz que forman los vectores de S.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\underset{(13)}{\tilde{f}}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}\underset{\substack{21^{(-1)}\\31^{(-1)}}}{\tilde{f}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&2\end{pmatrix}\underset{32^{(-2)}}{\tilde{f}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

luego $rg\ A=2<3$, en consecuencia los vectores $(1,2),(1,1)$ y $(1,0)$ son l.d.

Observación:

El espacio generado por el sistema de vectores $\{(1,2),(1,1),(1,0)\}$ es el mismo que el espacio generado por el sistema $\{(1,0),(0,1)\}$, o bien $\langle(1,2),(1,1),(1,0)\rangle=\langle(1,0),(0,1)\rangle$.

2. ¿Son $(1,2),(2,1)\in\mathbb{R}^2$ Linealmente Independientes?

Supongamos existe la cl nula $\alpha(1,2)+\beta(2,1)=(0,0)$,

$$\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{l}\alpha+2\beta=0\\2\alpha+\beta=0\end{array}\right|$$

$$\Rightarrow\quad \alpha=\beta=0$$

$\therefore(1,2)$ y $(2,1)$ Son Linealmente Independiente (li).

Nota: el $rg\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=2$ (es igual al número de vectores fila de A)

Propiedad

Sea V un $K-e.v.$

- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un Sistema Libre de V y el vector $v_{r+1} \notin \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ es un Sistema Libre (l.i.)
- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un Sistema Ligado (l.d.), entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ es un Sistema Ligado, cualquiera sea el vector $v_{r+1} \in V$.
- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un Sistema Libre, entonces: $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r\}$ es un Sistema Libre.
- Si $v \in V - \{0\}$, entonces $\{v\}$ es l.i.
- Si $v = 0$, entonces $\{0\}$ es l.d.
- Si $x, y \in V - \{0\}$ y $\{x, y\}$ es l.d., entonces $x = \alpha y \quad , \alpha \in K$
- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un Sistema Generador de un espacio (subespacio) de W, y algún v_j es combinación lineal de los otros vectores, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_r\}$ es un Sistema Generador de W.

Ejercicio

Realice una prueba formal para cada caso precedente.

Base de un Espacio Vectorial

Definición

Sea V un $K-e.v.$ y $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}\subseteq V$. B es una **Base** para V, si y solo sí

(i) B es l.i , un sistema libre de vector.

(ii) $\langle B\rangle = V$

Ejemplo

$B=\{(1,0)(0,1)\}\subseteq \mathbb{R}^2$, es una base para $\mathbb{R}^2$, llamada Base Canónica.

Es claro que (1,0) y (0,1) son Linealmente Independiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

O bien, existen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(0,0)$$

$$(\alpha,0)+(0,\beta)=(0,0)$$

$$\alpha=\beta=0$$

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$(x,y)=a(1,0)+b(0,1) \quad ;a\,,b\in\mathbb{R}$$

$$(x,y)=(a,0)+(0,b)$$

$$(x,y)=(a,b)$$

$$x=a \quad \wedge \quad y=b$$

$$\therefore V\subseteq\langle B\rangle$$

Notación: La base canónica de $\mathbb{R}^n$ se anotará por C_n, con $C_n = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),(0,0,\ldots,1)\}$, donde el i-ésimo vector $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots0)$ posee un 1 en la i-ésima coordenada y en sus otras coordenadas valor cero.

Ejemplo

1. $B = \{(1,2)(2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, ¿Es una base para $\mathbb{R}^2$?

i) Es claro que B es l.i. , $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

ii) Ahora deseamos ver que todo vector de $\mathbb{R}^2$ es **cl** de los vectores dados.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, deben existir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que:

$$(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(2,1)$$

$$(x,y) = (\alpha, 2\alpha) + (2\beta, \beta)$$, lo que implica

$$\left.\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= x \qquad /-2 \\ 2\alpha + \beta &= y \end{aligned}\right\}$$

donde $\beta = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{3} \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \alpha = \dfrac{-x}{3} + \dfrac{2y}{3} \in \mathbb{R}$

Luego existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que:

$$(x,y) = \left(\frac{-x}{3} + \frac{2y}{3}\right)(1,2) + \left(\frac{2x}{3} - \frac{y}{3}\right)(2,1).$$

2. Hállese una base para el Subespacio $W \leq \mathbb{R}^3$ donde

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

De $x + y + z = 0$ se tienen dos variables libres, a saber y, z (parámetros) en $\mathbb{R}$,

Luego, $x = -y - z$

Así, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; y\,,z \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; y\,,z \in \mathbb{R}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^3$$

Donde $B_W = \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ es una base para W

Nota: $rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Hay dos vectores en la base

Dimensión de un espacio vectorial

Definición

La **Dimensión** finita de un espacio vectorial V sobre un cuerpo K es el número máximo de vectores de V que constituye una base para V.

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para V, conjunto máximo de vectores linealmente independientes para V, diremos que la dimensión de V es n, anotamos, $\dim V = n$.

Nota: En nuestro estudio consideramos a B una base finita de V, con lo cual decimos que el espacio V es de *dimensión finita* o bien que el espacio V es *finito dimensional*. No es parte de nuestro estudio los espacios infinito dimensionales.

Teorema de Completación de Base o de Base Incompleta

Teorema

Sea V un $K-e.v.$ **de** $\dim V = n$**.**

Si $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}\subseteq V$ **, es un sistema libre con** p **vectores,** $p<n$**,**

entonces existen $(n-p)$ **vectores de** V **,** $v_{p+1},v_{p+2},\ldots,v_n$ **linealmente**

Independientes tales que $B=S\cup\{v_{p+1},v_{p+2},\ldots,v_n\}=\{v_1,v_2,\ldots,v_p,v_{p+1},\ldots,v_n\}$ **es**

una base para V .

Demostración queda de ejercicio para el lector; se sigue de los conceptos de base y dimensión, y de la primera propiedades precedente aplicada en un proceso finito para obtener una base para V .

Ejemplo

Aplicando el teorema al ejemplo anterior, se tiene:

$$B_W = \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}\subseteq \mathbb{R}^3 := V$$

B_W es libre (posee dos vectores), pero $\dim \mathbb{R}^3 = 3$,

Luego debe existir $3-2=1$ vector en $\mathbb{R}^3$ que sea l.i. con los vectores de B_W

Consideremos $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

tal que

$B_W = \{(-1,1,0),(-1,0,1),(a,b,c)\}$ sea una Base para $\mathbb{R}^3 := V$

Basta ver que sean l.i., es decir, $\det(B)\neq 0$

Entonces: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (-1)(b)+(-1)(-c-a)\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad b+c+a\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad a+b+c\neq 0$

Tómese: $a=1, b=0, c=0$

Así: $B_W=\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,0,0)\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$

Coordenadas de un vector

Definición

Sea V un $K-e.v.$ **y** $B_v=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ **una Base ordenada para** V **.**

Para cualquier vector $v\in V$ **existen escalares** $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ **tales que** $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n$**.**

A estos escalares, tales que V **es c.l. de los** v_i, $\forall i=1,\ldots,r$ **, se les llama Coordenadas del Vector V, respecto de la base B.**

Notación: $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$: " coordenadas del vector v, respecto de la base B.

Ejemplo

1. $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$

Las coordenadas de cualquier vector $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ está dada por los escalares a,b,c en $\mathbb{R}$.

En efecto, $(a,b,c)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)$, luego $[v]_{C_3}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Así, por ejemplo: $[(1,2,3)]_{C_3}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Consideremos $B_{\mathbb{R}3}=\{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$ ¿ $[(1,2,3)]_B$?

Sean $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tales que

$$(1,2,3)=\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)+\gamma(1,0,1)$$
$$(1,2,3)=(\alpha,\alpha,0)+(0,0,\beta)+(\gamma,0,\gamma)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\gamma&=1 \\ \alpha&=2 \\ \beta+\gamma&=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha=2,\ \gamma=-1,\ \beta=4$$

$$\therefore\ [(1,2,3)]_B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. $v=(1,2)\in\mathbb{R}^2$

$[v]_{C_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; C_2 Base Canónica de $\mathbb{R}^2$

Cambio de Coordenadas de un Vector respecto de una Base a otra Base, y Matriz Cambio de Base

Sea V un $K-espacio\ vectorial$ de dimensión n. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ dos Bases ordenadas de V. Dado un vector $v \in V$, relacionaremos las coordenadas de dicho vector v respecto de ambas bases B_1 y B_2. Así podremos obtener las coordenadas v respecto de $B_1\ a\ B_2$ que anotaremos ${}_{B_1}[v]_{B_2}$ ó bien $[v]_{B_1}^{B_2}$; como también, obtener las coordenadas v respecto de $B_2\ a\ B_1$ que anotaremos ${}_{B_1}[v]_{B_2}$ ó bien $[v]_{B_1}^{B_2}$.

Respecto de la base B_1 , existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$,

tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \quad ^{(*)} \quad \Rightarrow \quad [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Cada $v_i \in B_1$; $\forall i = 1, \ldots, n$ se puede escribir como Combinación Lineal (c.l.) de los vectores de la base B_2.

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \ldots + a_{n1} w_n \\ v_n &= a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \ldots + a_{n2} w_n \\ &\vdots \\ v_n &= a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \ldots + a_{nn} w_n \end{aligned}$$

Reemplazando en (*)

$$v = \alpha_1 (a_{11} w_1 + \ldots + a_{n1} w_n) + \alpha_2 (a_{12} w_1 + \ldots + a_{n2} w_n) + \ldots + \alpha_n (a_{1n} w_1 + \ldots + a_{nn} w_n)$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha_1 a_{11} w_1 + \alpha_1 a_{21} w_2 + \ldots + \alpha_1 a_{n1} w_n) + (\alpha_2 a_{12} w_1 + \alpha_2 a_{22} w_2 + \ldots + \alpha_2 a_{n2} w_n) + \ldots \\ &\quad + (\alpha_n a_{1n} w_1 + \alpha_n a_{2n} w_2 + \ldots + \alpha_n a_{nn} w_n) \end{aligned}$$

$$= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + ... + \alpha_n a_{1n}) w_1 + (\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + ... + \alpha_n a_{2n}) w_2 + ...$$
$$\ldots + (\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + ... + \alpha_n a_{nn}) w_n$$

Lo que implica,

$$[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + ... + \alpha_n a_{1n} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + ... + \alpha_n a_{2n} \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + ... + \alpha_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Luego,

$$[v]_{B_2} = {}_{B_1}P_{B_2}\, [v]_{B_1}$$

Nota:

1. La matriz ${}_{B_1}P_{B_2}$ recibe el nombre de *matriz de paso* o *cambio de base* de la base $B_1 \; a \; B_2$.
2. De manera similar se puede obtener las coordenadas de $v \in V$ desde la base $B_2 \; a \; B_1$ de tal manera que $[v]_{B_1} = {}_{B_2}P_{B_1}\, [v]_{B_2}$

Pregunta: ¿qué relación existe entre ambas matrices de paso?

Guía de ejercicios

1. Demostrar que $B=\{(1,2,1),(1,2,3),(3,2,1)\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$

Solución:

(i) Por ver que los vectores sean l.i., esto es:

Sean $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha(1,2,1)+\beta(1,2,3)+\gamma(3,2,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\alpha+\ \ \beta+3\gamma=0\\ 2\alpha+2\beta+2\gamma=0\\ \alpha+3\beta+\ \ \gamma=0\end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&3\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ahora se debe buscar los valores de las variables a través de O.E.F.

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&2\\1&3&1\end{pmatrix}\tilde{f}_{21}(-2)\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&-4\\1&3&1\end{pmatrix}\tilde{f}_{31}(-1)\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&-4\\0&2&-2\end{pmatrix}\tilde{f}_{23}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&-2\\0&0&-4\end{pmatrix}\tilde{f}_{3}\left(\frac{-1}{4}\right)$$
$$\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\tilde{f}_{2}\left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\tilde{f}_{23}(1)\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\tilde{f}_{13}(-3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\tilde{f}_{12}(-1)$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Luego $\left.\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right|$

Entonces: $\alpha(1,2,1)+\beta(1,2,3)+\gamma(3,2,1)=(0,0,0)$

$\therefore$ Los vectores dados son l.i.

(ii) Por ver que $\langle B\rangle = \mathbb{R}^3$, es decir:

(1). $\langle B\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

Por definición se comprueba.

(2). $\mathbb{R}^3 \subseteq \langle B\rangle$

Dado $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ por determinar $a,b,c\in\mathbb{R}$ tales que:

$$(x,y,z)=a(1,2,1)+b(1,2,3)+c(3,2,1)$$
$$\Downarrow$$
$$\left.\begin{array}{r} a+\ \ b+3c = x \\ 2a+2b+2c = y \\ a+3b+\ \ c = z \end{array}\right|$$

Ahora, se trabaja la matriz ampliada a través de O.E.F, se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & 2 & y \\ 1 & 3 & 1 & z \end{array}\right) \underset{\substack{21(-2)\\31(-1)}}{\tilde{f}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 0 & -4 & y-2x \\ 0 & 2 & -2 & z-x \end{array}\right) \underset{\substack{23\\2\left(\frac{1}{2}\right)}}{\tilde{f}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & \frac{z-x}{2} \\ 0 & 0 & -4 & y-2x \end{array}\right)$$

$$f_{3\left(\frac{-1}{4}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & \frac{z-x}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x-y}{4} \end{array}\right) \underset{\substack{23(1)\\13(-3)}}{\tilde{f}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{3y-2x}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2z-y}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x-y}{4} \end{array}\right) \tilde{f}_{12(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-2x+4y-2z}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2z-y}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2x-y}{4} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \exists \ a = \frac{-x+2y-z}{2} \ ; \ b = \frac{2z-y}{4} \ ; \ c = \frac{2x-y}{4}$$

tal que $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\therefore \ \mathbb{R}^3 \subseteq \langle B \rangle$$

2.- Demostrar que $A = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $M_2(\mathbb{R})$.

Solución:

(i) Por ver que A es libre.

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que:

$$a\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -2a+3b+2c+4d=0 \\ a+3b-c+5d=0 \\ 2a+4b+5c+7d=0 \\ a+3b-c+5d=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se debe buscar los valores de las variables a través de O.E.F.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \tilde{f}_{21} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \tilde{f}_{\substack{21(2)\\31(-2)\\41(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{f}_{\substack{14(3)\\24\\2(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & 9 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}_{\substack{32(2)\\42(-9)\\4\left(\frac{1}{14}\right)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{\substack{14(-5)\\34(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{\substack{3\left(\frac{1}{7}\right)\\13(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \left.\begin{array}{r} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{array}\right|$, así, el sistema de vectores A es libre.

(ii) Por ver que $\langle A\rangle = \mathbb{R}^{2x2}$, esto es:

(ii.1). $\langle A\rangle \subseteq \mathbb{R}^{2x2}$

Por definición, se comprueba.

(ii.2). $\mathbb{R}^{2x2} \subseteq \langle A\rangle$

Para ello, sean $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$ y $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\tilde{f}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-32x+28y+14z-22t}{98} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3x-21t+14z-t}{98} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x-7y+9t}{14} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -2a+3b+2c+4d=x \\ a+3b-\ \ c+5d=y \\ 2a+4b+5c+7d=z \\ a+3b-\ \ c+5d=t \end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 2 & 4 & x \\ 1 & 3 & -1 & 5 & y \\ 2 & 4 & 5 & 7 & z \\ 1 & 2 & -1 & 5 & t \end{array}\right) \tilde{f}_{21} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & y \\ -2 & 3 & 2 & 4 & x \\ 2 & 4 & 5 & 7 & z \\ 1 & 2 & -1 & 5 & t \end{array}\right) \tilde{f}_{\substack{21(2)\\31(-2)\\41(-1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & y \\ 0 & 9 & 0 & 14 & x+2y \\ 0 & -2 & 7 & -3 & z-2y \\ 0 & -1 & 0 & 0 & t-2y \end{array}\right)$$

$$f_{\substack{14(3)\\24\\2(-1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 & 3t-5y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2y-t \\ 0 & -2 & 7 & -3 & z-2y \\ 0 & 9 & 0 & 14 & t-2y \end{array}\right) \tilde{f}_{\substack{32(2)\\42(-9)\\4\left(\frac{1}{14}\right)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 & 3t-5y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2y-t \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 2y-2t+z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-20y+10t}{4} \end{array}\right)$$

$$\tilde{f}_{\substack{14(-5)\\34(3)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{80y-38t}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2y-t \\ 0 & 0 & 7 & 0 & \frac{-52y+22t+4z}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-20y+10t}{4} \end{array}\right) \tilde{f}_{\substack{3\left(\frac{1}{7}\right)\\13(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{28y-16t+4z}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2y-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-52y+22t+4z}{28} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-20y+10t}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 2 & 4 & x \\ 1 & 3 & -1 & 5 & y \\ 2 & 4 & 5 & 7 & z \\ 1 & 2 & -1 & 5 & t \end{array}\right) \tilde{f} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & y \\ -2 & 3 & 2 & 4 & x \\ 2 & 4 & 5 & 7 & z \\ 1 & 2 & -1 & 5 & t \end{array}\right) \tilde{f} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & y \\ 0 & 9 & 0 & 14 & x+2y \\ 0 & -2 & 7 & -3 & z-2y \\ 0 & -1 & 0 & 0 & t-y \end{array}\right)$$

$$\tilde{f} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 & 3t-2y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y-t \\ 0 & 0 & 7 & -3 & z-2t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x-7y+9t \end{array}\right) \tilde{f} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{-5x+7y-3t}{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y-t \\ 0 & 0 & 7 & 0 & \frac{3x-21t+14z-t}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x-7y+9t}{14} \end{array}\right)$$

$$\tilde{f} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-32x+28y+14z-22t}{98} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3x-21t+14z-t}{98} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x-7y+9t}{14} \end{array}\right)$$

Luego

$$a = \frac{-32x+28y+14z-22t}{98} \quad ; \quad b = y-t \quad ; \quad c = \frac{3x-21y+14z-t}{98} \quad ;$$

$$d = \frac{x-7y+9t}{14}, \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Tal que A es una base para $\mathbb{R}^{2x2}$.

3.- Sea $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x+13z-9t=0 \,,\; y+3z-2t=0\}$

Demuestre que V es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

Solución:

(i) Primero se debe buscar el conjunto generador de V, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} x+13z-9t=0 \\ y+\ \ 3z-2t=0 \end{array}\right|$$

Es un sistema homogéneo, donde 4-2=2 es el n° de variables libres.
Así, el sistema dado posee infinitas soluciones.

En efecto, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \therefore x=-13z+9t \\ \quad y=-3z+2t \end{array}$$

Luego : $\quad (x,y,z,t)=(-13z+9t\,,-3z+2t\,,\,z\,,\,t) \quad ; \quad z\,,t\in\mathbb{R}$

$$=z(-13,-3,1,0)\ +\ t(9,2,0,1) \quad ; \quad z\,,t\in\mathbb{R}$$

$$\therefore \qquad V=\langle(-13,-3,1,0),(9,2,0,1)\rangle$$

Así el conjunto generador de V es $\{(-13,-3,1,0),(9,2,0,1)\}$

(ii) Por otro lado, sean $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ y $a,b\in\mathbb{R}$, tales que:

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=a(-13,-3,1,0)+b(9,2,0,1)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -13a+9b=\alpha \\ -3a+2b=\beta \\ a=\gamma \\ b=\delta \end{array}\right| \Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(-13a+9b\,,\,-3a+2b\,,\,a\,,\,b) \qquad \forall\, a,b\in\mathbb{R}$$

$$\therefore V\leq\mathbb{R}^4$$

4.- Sean $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y-z=0\wedge 2x+3y-t=0\}$ y

$W=\langle(1,2,-1,3),(1,1,2,-1)\rangle$

(a) Determinar una base para U y su dimensión.

(b) Encontrar una base para $U\cap W$ y su dimensión.

Solución:

(a). (i) Buscar el conjunto generador de U

$$\text{Sean }\; x+y-z=0 \qquad\wedge\qquad 2x+3y-t=0$$
$$\Rightarrow z=x+y \qquad\qquad \Rightarrow t=2x+3y$$

$$\text{Así }\;(x,y,z,t)=(x\,,\,y\,,\,x+y\,,\,2x+3y)\quad;\quad x,y\in\mathbb{R}$$
$$=x(1,0,1,2)\;+\;y(0,1,1,3)\quad;\quad x,y\in\mathbb{R}$$
$$\therefore U=\langle(1,0,1,2),(0,1,1,3)\rangle$$

(iii) Por ver que los vectores de $B_U=\{(1,0,1,2),(0,1,1,3)\}$ sean l.i.

Es decir, que existen únicos $a,b\in\mathbb{R}$ nulos, tales que:

$$a(1,0,1,2)\;+\;b(0,1,1,3)=(0,0,0,0)$$
$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a=0 \\ b=0 \\ a+\ b=0 \\ 2a+3b=0 \end{array}\right| \Rightarrow a=b=0$$

$\therefore$ Son l.i.

(iv) Por ver que $\langle B_U \rangle = U$, esto es:

(1) $\langle B_U \rangle \subseteq U$

Por definición queda demostrado

(2) $U \subseteq \langle B_U \rangle$

$\exists (x, y, z, t) \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,0,1,2) + \beta(0,1,1,3)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha\ \ = x \\ \beta\ \ = y \\ \alpha+\ \beta = z \\ 2\alpha+3\beta = t \end{array}\right| \Rightarrow (x,y,z,t) = (\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta,\ 2\alpha+3\beta) \quad ; \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$\therefore U \subseteq \langle B_U \rangle$$

Así $U = \langle B_U \rangle$

$\therefore \langle (1,0,1,2), (0,1,1,3) \rangle$ es base para U, $\dim(U) = 2$

(b) Encontrar una base para $U \cap W$ y su dimensión.

Sea $(x,y,z,t)\in U\cap W$, entonces:

$$(x,y,z,t)\in U \quad \wedge \quad (x,y,z,t)\in W$$
$$\Downarrow$$
$$a(1,0,1,2)+b(0,1,1,3)= \quad (x,y,z,t) \quad =c(1,2,-1,3)+d(1,1,2,-1)$$

Luego, mediante O.E.F. resolvemos el sistema subyacente:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&3\\1&2&-1&3\\1&1&2&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{31(-1)\\41(-1)}}{\tilde{f}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&2&-2&1\\0&1&1&-3\end{pmatrix}\underset{\substack{34(-2)\\42(-1)}}{\tilde{f}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&0&-4&-5\\0&0&0&-6\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{4\left(\frac{1}{6}\right)\\3\left(\frac{-1}{4}\right)}}{\tilde{f}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&0&1&\frac{5}{4}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{23(-1)\\13(-1)}}{f}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{4}\\0&1&0&\frac{7}{4}\\0&0&1&\frac{5}{4}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{14\left(\frac{-3}{4}\right)\\24\left(\frac{-5}{4}\right)\\34\left(\frac{-7}{4}\right)}}{\tilde{f}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}x=0\\y=0\\z=0\\t=0\end{array}$$

$$\therefore (x,y,z,t)\in U\cap W \Leftrightarrow (x,y,z,t)=(0,0,0,0)$$

Pero como $U\cap W=\{(0,0,0,0)\}$, el vector nulo no es base para $U\cap W$, en este caso decimos que $\dim(U\cap W)=0$.

5. Sean $B_1=\{(1,1,1),(2,0,3),(2,0,-1)\}$ y $B_2=\{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Hallar ${}_{B_1}P_{B_2}$ tal que ${}_{B_1}\left[(x,y,z)\right]_{B_2}={}_{B_1}P_{B_2}\left[(x,y,z)\right]_{B_1}$ $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(2,0,3) + c(2,0,-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a+2b+2c = x \\ (2) & \qquad\quad a = y \\ (3) & a+3b-\ \ c = z \end{array}\right| /\bullet 2$$

$$(1)+(3) = \ 3a+8b = x+2z$$

$$\Rightarrow \ b = \frac{x-3y+2z}{8}$$

Reemplazando en (3)

$$a+3b-c=z$$

$$\Downarrow$$

$$y \ +3\left(\frac{x-3y+2z}{8}\right)-c=z$$

$$y \ + \ \frac{3x-9y+6z}{8} \ -z \ =c$$

$$\frac{3x-y-2z}{8}=c$$

$$\therefore \left[(x,y,z)\right]_{B_1} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{x-3y+2z}{8} \\ \frac{3x-y-2z}{8} \end{pmatrix}$$

Ahora se debe escribir B_1 como combinación lineal de B_2

$$(1,1,1) = a(1,0,1) + b(1,0,-1) + c(0,1,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ c=1 \\ a-b=1 \end{array}\right| \Rightarrow \quad a=1 \quad ; \quad b=0 \quad ; \quad c=1$$

$$(2,0,3) = m(1,0,1) + n(1,0,-1) + p(0,1,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} m+n=2 \\ p=0 \\ m-n=3 \end{array}\right| \Rightarrow \quad m=\frac{5}{2} \quad ; \quad n=-\frac{1}{2} \quad ; \quad p=0$$

$$(2,0,-1) = u(1,0,1) + v(1,0,-1) + w(0,1,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} u+v=2 \\ w=0 \\ u-v=-1 \end{array}\right| \Rightarrow \quad u=\frac{1}{2} \quad ; \quad v=\frac{3}{2} \quad ; \quad w=0$$

$${}_{B_1}\left[(x,y,z)\right]_{B_2} = {}_{B_1}P_{B_2}\left[(x,y,z)\right]_{B_1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \frac{x-3y+2z}{8} \\ \frac{3x-y-2z}{8} \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$\left[(x,y,z)\right]_{B_1} = \alpha(1,0,1) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,1,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+\beta = x \\ \gamma = y \\ \alpha-\beta = z \end{array}\right| \Rightarrow \quad \alpha = \frac{x+z}{2} \quad ; \quad \beta = \frac{x-z}{2} \quad ; \quad \gamma = y$$

Así

$$\left[(x,y,z)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{x+z}{2} \\ \frac{x-z}{2} \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \frac{x-3y+2z}{8} \\ \frac{3x-y-2z}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x+z}{2} \\ \frac{x-z}{2} \\ y \end{pmatrix}$$

6. ¿Es $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$? Justifique.

Para que sea suma directa $V \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, a demás debe existir la suma $V + W = \mathbb{R}^3$

Es claro que $V + W = \mathbb{R}^3$

Luego, por ver que $V \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, es decir:

Sea $(x, y, z) \in V \cap W$, entonces

$$\begin{array}{ccc} (x,y,z)\in V & \wedge & (x,y,z)\in W \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (x,y,z)=a\left(1,0,\frac{5}{7}\right)+b\left(0,1,\frac{1}{7}\right) & \wedge & (x,y,z)=c(-13,9,8) \\ (x,y,z)=\left(a,b,\frac{5}{7}a+\frac{1}{7}b\right) & \wedge & (x,y,z)=(-13c,9c,8c) \end{array}$$

Entonces: $$\left(a,b,\frac{5}{7}a+\frac{1}{7}b\right)=(-13c,9c,8c)$$

$$\left(a+13c,\ b-9c,\ \frac{5}{7}a+\frac{1}{7}b-8c\right)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+13c=0 \\ b-9c=0 \\ \frac{5}{7}a+\frac{1}{7}b-8c=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & -9 \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\det(\ )\neq 0$ los vectores son l.i. y si eso ocurre, entonces $a=b=c=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & -9 \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -8 \end{vmatrix}=-8-\frac{65}{7}+\frac{9}{7}$$

$$=-\frac{121}{7}+\frac{9}{7}$$

$$=-16\neq 0$$

$$\therefore \text{ Se cumple que } a=b=c=0\in\mathbb{R}$$

$$\therefore V\cap W=\{0_{\mathbb{R}^3}\} \quad\Rightarrow\quad V\oplus W$$

Entonces

$$\mathbb{R}^3=V\oplus W$$

Autoevaluación nº 2

(Prueba año 2004)

1. Sea $V=\langle(1,2,1),(-19,18,-11),(3,-1,2)\rangle\leq\mathbb{R}^3$ y $W=\left\{(x,y,z)/\frac{x}{13}=\frac{y}{9}=\frac{z}{-8}\right\}\leq\mathbb{R}^3$

(a) Hállese una base para V y para W,

(b) ¿Es $\mathbb{R}^3=V\oplus W$? Justifique.

2.

(2.1) Sean $U,V\in\mathbb{R}^3$ definidos por: $U=\langle(2,-1,3)\rangle$ y $V=\{(x,y,z)/\,x+ky+z=0\}$. ¿Para qué valores de k se tiene $\mathbb{R}^3=U\oplus V$?

(2.2) Sean $B_1=\{(1,1,1),(2,0,3),(2,0,-1)\}$ y $B_2=\{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,0)\}$ dos bases para $\mathbb{R}^3$.

(a) Hallar ${}_{B_1}P_{B_2}$ tal que $[(x,y,z)]_{B_2}={}_{B_1}P_{B_2}[(x,y,z)]_{B_1}$, $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

(b) Determinar $x,y,z\in\mathbb{R}$ tal que $[(x,y,z)]_{B_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

3. Pruebe o refute. Justifique sus afirmaciones.

(3.1) $U+W\leq V$; donde $U,W\leq V$ y V es un K-e.v.

(3.2) $U\cup W\leq V$; donde $U,W\leq V$ y V es un K-e.v.

(3.3) $(-2,8,6)\in\langle(2,-1,1),(-3,5,2)\rangle$

(3.4) Si $\{u_1,u_2,u_3\}$ es $l.i.$ $\Rightarrow$ $\{u_1+u_2,u_1+u_3,u_2+u_3\}$ es $l.i.$ en V un K-e.v.

Soluciones:

1. (a) Base para $V=\left\{\left(1,0,\frac{5}{7}\right),\left(0,1,\frac{1}{7}\right)\right\}$

Base para $W=\{(-13,9,8)\}$

(b) $\mathbb{R}^3=V\oplus W$

2. (2.1) $\forall k\in\mathbb{R}-\{1\}$, se tiene que $U\oplus V$

(2.2) (a) ${}_{B_2}P_{B_1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{-3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}$

(b) $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=3 \\ z=-1 \end{array}\right\}\in\mathbb{R}$

3. (3.1) Verdadero (3.2) Falso (3.3) Verdadero (3.4) Verdadero

Se recomienda resolver los siguientes ejercicios:

Morras R., Johnson R. (1984). "Álgebra Lineal"

Página 102, Lista de Ejercicios Nº 5.

Página 130, Lista de Ejercicios Nº 6.