

Transformaciones Lineales (T. L.)

Definición

Dados V, W dos K -espacios vectoriales. Una aplicación $f : V \rightarrow W$ tal que verifica:

$$(i) \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V \text{ y}$$

$$(ii) \quad f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall \lambda \in K, \forall v \in V$$

Recibe el nombre de Transformación Lineal (T.L.)

Notación: $L(V^{(n)}, W^{(m)}) = \{f : V \rightarrow W / f \text{ es transformación lineal}\}$

$V^{(n)} : V$ es un K -espacio vectorial de $\dim V = n$

Definiciones

Sea $f : V \rightarrow W$ una Transformación Lineal:

(1) Si $V = W$, diremos que f es un Endomorfismo de espacios vectoriales.

$$\text{End}(V, W) = \{f : V \rightarrow W / f \text{ es transformación lineal}\}$$

(2) Si además f es inyectiva, diremos que f es un Monomorfismo.

$$\text{Mon}(V, W) = \{f : V \rightarrow W / f \text{ es transformación lineal inyectiva}\}$$

(3) Si además f es epiyectiva, diremos que f es un Epimorfismo.

$$\text{Epi}(V, W) = \{f : V \rightarrow W / f \text{ es transformación lineal epiyectiva}\}$$

(4) Si f es biyectiva, diremos que f es un Isomorfismo.

$$\text{Iso}(V, W) = \{f : V \rightarrow W / f \text{ es transformación lineal biyectiva}\}$$

(5) Si $V = W$ y f es biyectiva, diremos que f es un Automorfismo.

$$\text{Aut}(V, W) = \{f : V \rightarrow V / f \text{ es transformación lineal biyectivo}\}$$

Ejemplo

Pruebe que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

1. Por ver que f es transformación lineal

(i) Dados $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f((x, y) + (u, v)) &= f(x + u, y + v) \\ &= ((x + u) + (y + v), (x + u) - (y + v)) \\ &= (x + y + u + v, x - y + u - v) \\ &= (x + y, x - y) + (u + v, u - v) \\ &= f(x, y) + f(u, v) \end{aligned}$$

(ii) Dados $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) \\ &= (\lambda(x + y), \lambda(x - y)) \\ &= \lambda(x + y, x - y) \\ &= \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

$\therefore$ De (i) y (ii), f es transformación lineal.

2. Por ver que f es inyectiva

Dados $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Si $f(x, y) = f(u, v)$ entonces $(x + y, x - y) = (u + v, u - v)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = u + v \\ x - y = u - v \end{cases}$$

Sumando y restando: $2x = 2u \quad \wedge \quad 2y = 2v$

$$\therefore x = u \quad \wedge \quad y = v$$

$\therefore (x, y) = (u, v)$, f es inyectiva.

Hasta aquí, f es inyectiva

3. Por ver que f es epiyectiva

$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, debe existir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y) = (u, v)$$

$$\Rightarrow (x + y, x - y) = (u, v)$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases}$$

$$2x = u + v$$

$$2y = u - v$$

$$x = \frac{u + v}{2} \in \mathbb{R}$$

$\wedge$

$$y = \frac{u - v}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \exists \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2} \right) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f\left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2} \right) = (u, v)$$

$\therefore f$ es Epimorfismo

Luego de 1, 2 y 3 se tiene que f es un Isomorfismo (es un Automorfismo).

Nota: Como f es Isomorfismo, f es invertible donde

$$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } (x, y) \mapsto \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2} \right)$$

Propiedades

Sea $f \in L(V, W)$ donde V, W son K -espacios vectoriales entonces se verifica en toda transformación lineal:

1. $f(0_V) = 0_W$
2. $\text{Ker } f := \{v \in V : f(v) = 0_W\} \leq V$
3. $\text{Im } f := \{w \in W : \exists v \in V \text{ tal que } f(v) = w\} \leq W$ o bien $\text{Im } f := \{f(v) : v \in V\}$
4. f es monomorfismo ssi $\text{Ker } f = \{0_V\}$
5. Si $H \leq W$ entonces $f^{-1}(H) \leq V$
6. $f \in L(V, W)$ entonces si $L \leq W \Rightarrow f(L) \leq W$

Demostración propiedad 1.

Sabemos que $0_V + 0_V = 0_V$, aplicando f se tiene

$$f(0_V + 0_V) = f(0_V); \text{ pero } f \text{ es transformación lineal, entonces}$$

$$f(0_V) + f(0_V) = f(0_V); \text{ sumamos en inverso aditivo de } f(0_V)$$

$$f(0_V) + f(0_V) - f(0_V) = f(0_V) - f(0_V); -f(0_V) \in W$$

Además sabemos que:

$$f(0_V) - f(0_V) = 0_W, \text{ reemplazando}$$

$$f(0_V) + 0_W = 0_W$$

$$\therefore f(0_V) = 0_W$$

Demostración propiedad 2.

i. Es claro que $\text{Ker } f \leq V$ (por definición),

además $\text{Ker } f \neq \Phi$ pues $0_V \in \text{Ker } f$, ya que $f(0_V) = 0_W$

ii. Dados $x, y \in \text{Ker } f$, p.d. que $x + y \in \text{Ker } f$

Se tiene que:

$$f(x + y) = f(x) + f(y); f \text{ es T.L.}$$

$$f(x + y) = 0_w + 0_w$$

$$f(x + y) = 0_w$$

$$\therefore x + y \in \text{Ker } f$$

iii. Dado $\lambda \in K, v \in V$, p.d. que $\lambda v \in \text{Ker } f$

Se tiene que:

$$f(\lambda v) = \lambda f(v); f \text{ es T.L., } v \in \text{Ker } f$$

$$f(\lambda v) = \lambda 0_w$$

$$f(\lambda v) = 0_w$$

$$\therefore \lambda v \in \text{Ker } f$$

Luego de i, ii y iii se demuestra que $\text{Ker } f \leq V$

Demostración propiedad 4.

i. f es Monomorfismo $\Rightarrow \text{Ker } f = \{0_v\}$

Como $\{0_v\} \subseteq \text{Ker } f$ basta demostrar que $\text{Ker } f \subseteq \{0_v\}$

Dado $x \in \text{Ker } f$, p.d. que $x = 0_v$, entonces $f(x) = 0_w$

Por otro lado, $0_w = f(0_v)$

Luego,

$$f(x) = f(0_v), \text{ pero } f \text{ es Monomorfismo (inyectiva)}$$

$$x = 0_v, \text{ Ker } f \subseteq \{0_v\}$$

$$\therefore \text{Ker } f = \{0_v\}, \text{ cuando } f \text{ es Monomorfismo.}$$

ii. $\text{Ker } f = \{0_V\} \Rightarrow$ es Monomorfismo f

Como $f \in L(V, W)$ basta demostrar que f es inyectiva

Dados $x, y \in V$

Si $f(x) = f(y)$ entonces

$$f(x) - f(y) = 0_W; \quad f \text{ es T.L.}$$

$$f(x) + f(-y) = 0_W$$

$$f(x - y) = 0_W$$

$$\Downarrow$$

$$x - y \in \text{Ker } f, \text{ pero } \text{Ker } f = \{0_V\}$$

$$x - y \in \{0_V\}$$

$$\Downarrow$$

$$x - y = 0_V \text{ en } V$$

$$\therefore \quad x = y$$

Luego de i y ii se demuestra que f es Monomorfismo ssi $\text{Ker } f = \{0_V\}$

Demostración propiedad 5.

i. Es claro que $f^{-1}(H) \neq \emptyset$ pues $0_V \in f^{-1}(H)$ ya que $\exists 0_V \in V$

$$\text{Tal que } f(0_V) = 0_W,$$

Como $H \subset W \Rightarrow 0_W \in H$; por definición de subconjunto

$$f^{-1}(H) := \{v \in V : \exists h \in H, f(v) = h\}; \text{ conjunto imagen recíproca o inversa}$$

ii. Dados $v_1, v_2 \in f^{-1}(H)$, p.d. que $v_1 + v_2 \in f^{-1}(H)$

Si $v_1, v_2 \in f^{-1}(H)$ entonces $\exists h_1, h_2 \in H$

Tal que $f(v_1) = h_1 \wedge f(v_2) = h_2$

Se tiene: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = h_1 + h_2$ (pues f es T.L.)

Donde: $h_1 + h_2 = h \in H \leq W$

Luego para $v_1 + v_2 \in V$ existe $h := h_1 + h_2 \in H$ tal que $f(v_1 + v_2) = h$

$\therefore v_1 + v_2 \in f^{-1}(H)$

iii. Dado $\lambda \in K, v \in f^{-1}(H)$, p.d. que $\lambda v \in f^{-1}(H)$

Como $v \in f^{-1}(H)$ entonces $\exists h \in H$ tal que $f(v) = h$

Luego, para $\lambda \in K$, ($H \leq W$)

se tiene $\lambda f(v) = f(\lambda v) = \lambda h \in H$

$\therefore \lambda h \in f^{-1}(H)$

De i, ii y iii se demuestra que $f^{-1}(H) \leq V$

Proposición

Sea $f \in \text{Mon}(V, W)$ si $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \leq V$ es linealmente independiente, entonces

$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_r)\} \leq W$ es linealmente independiente.

Demostración

Supongamos que existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in K$

Tales que

$$\alpha_1 \cdot f(v_1) + \alpha_2 \cdot f(v_2) + \dots + \alpha_r \cdot f(v_r) = 0_w, \text{ p.d. } \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, r$$

Si $\sum_{i=1}^r \alpha_i f(v_i) = 0$ entonces por ser f una T.L.

$$\text{Se tiene } \sum_{i=1}^r f(\alpha_i v_i) = 0$$

$$\text{Además podemos decir } f\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \in \text{Ker } f$$

Previo

$$\text{Dado } f \in L(V, W), f \text{ es Monomorfismo} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_v\}$$

Como f es Monomorfismo tenemos $\text{Ker } f = \{0_v\}$ (lema previo),

Entonces: $\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = 0_v$, como $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ son l.i., por hipótesis,

Entonces: $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, r$

$\therefore \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_r)\}$ es l.i.

Demostración

Previo

$$\text{Dado } f \in L(V, W), f \text{ es Monomorfismo} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_v\}$$

$\Rightarrow$] Como $\{0_v\} \leq \text{Ker } f$, pues $0_v \in \{0_v\} \Rightarrow 0_v \in \text{Ker } f$, ya que $f(0_v) = 0_w$,

Basta demostrar $\text{Ker } f \leq \{0_v\}$

Dado $x \in \text{Ker } f$, se tiene que $f(x) = 0_w$

Por otro lado:

$$f(0_v) = 0_w, f \text{ es T.L.}$$

Así

$$f(x) = f(0_V)$$

Como f es inyectiva (f es Monomorfismo)

Se tiene:

$\alpha = 0_V$, en consecuencia $\text{Ker } f = \{0_V\}$ cuando f es Homomorfismo.

$\Leftarrow$] Basta demostrar que f es inyectiva, esto es:

Si $f(x_1) = f(x_2)$, por demostrar que $x_1 = x_2$.

Se tiene, $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $f(x_1) - f(x_2) = 0$

pero f es T.L., luego $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = 0$

lo que implica $x_1 - x_2 \in \text{Ker } f$

Por hipótesis

$$\text{Ker } f = \{0_V\}$$

$$\text{luego } x_1 - x_2 = 0$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

Definición

Sea V un K -espacio vectorial y $H \leq V$, se define la **clase lateral izquierda de H en V determinada por v** como

$$v + H = \{v + h : h \in H\},$$

También llamada, **coclase izquierda**.

Proposición

Sea V un K -espacio vectorial y $H \leq V$ entonces

1. $v + H = H$ ssi $v \in H$
2. $v_1 + H = v_2 + H$ ssi $v_1 - v_2 \in H$

Demostración 1.

$\Rightarrow$] Dado $x \in v + H \Rightarrow x = v + h$, $h \in H$, pero $v + H = H$

Luego $v + h$ también $\in H$

Luego $v + h \in H \Rightarrow \exists h' \in H$ tal que $v + h = h'$ único $H \leq V$

$$v = h' - h \in H$$

$$\therefore v \in H$$

$\Leftarrow$] Si $v \in H$ p.d. $v + H \subseteq H \wedge H \subseteq v + H$

i. Dado $x \in v + H \Rightarrow \exists h \in H$ tal que $x = v + h$ pero por hipótesis $v \in H$,

Luego

$$\therefore x \in H$$

$$\therefore v + H \subseteq H$$

ii. Sea $y \in H, v \in H$ por hipótesis

Como $H \leq V \Rightarrow V + y \in H$ además $v \in V$ entonces $\exists h \in H$

Tal que

$$v + y = h \Rightarrow y = -v + h,$$

$$\therefore y \in V + H$$

$$\therefore H \subseteq v + H$$

Nota: En la proposición 2. se define una Relación de Equivalencia.

Definición

Dado V un K -espacio vectorial y $H \leq V$ se define:

$V/H = \{v + H : v \in V\}$, se define en V/H una l.c.i.

$+$: $V/H \times V/H \rightarrow V/H$ tal que $\forall v_1 + H, v_2 + H \in V/H$,

$$(v_1 + H) + (v_2 + H) := (v_1 + v_2) + H$$

por ver que está bien definida:

Si $(v_1 + H, v_2 + H) = (x + H, y + H)$

$$\Rightarrow v_1 + H = x + H \wedge v_2 + H = y + H$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$v_1 - x \in H \quad \wedge \quad v_2 - y \in H$$

$$\Downarrow$$

$$(v_1 - x) + (v_2 - y) \in H, \quad H \leq V$$

$$(v_1 + v_2) - (x + y) \in H$$

$$\Downarrow$$

$$(v_1 + v_2) + H = (x + y) + H$$

$$\therefore (v_1 + H) + (v_2 + H) = (x + H) + (y + H)$$

Teorema

Dados V un K -espacio vectorial y $H \leq V$, entonces $(V/H, +)$ es un

K -espacio vectorial

Demostración

i. $(V/H, +)$ es un grupo abeliano

i.1 $+$ está bien definida

i.2 $+$ es asociativa

i.3 $+$ es conmutativa

i.4 Debe existir neutro

$\exists x + H \in V/H$ tal que:

$$(v + H) + (x + H) = (x + H) + (v + H) = v + H, \forall v + H \in V/H$$

Supongamos

$$(v + H) + (x + H) = (v + H)$$

$$\Rightarrow (v + x) + H = v + H$$

$\Downarrow$ de Clases Laterales

$$(v + x) - v \in H$$

$$\Rightarrow x \in H$$

Luego $x + H = H$ (propiedad 1)

$\therefore$ El neutro en V/H es H

i.5 Debe existir opuesto

$\forall v+H \in V/H$, debe existir $w+H \in V/H$ tal que

$$(v+H) + (w+H) = (w+H) + (v+H) = H$$

Supongamos que: $(v+H) + (w+H) = H$

$\Downarrow$

$$(v+w)+H = H$$

$$\Rightarrow v+w \in H$$

$$\Rightarrow \exists h \in H \text{ tal que } v+w = h$$

$$\Rightarrow w = -v + h, -v \in V, h \in H$$

$$\Rightarrow w \in -V + H$$

Luego $W + H = -v + H$

$\therefore$ El opuesto de $v+H$ en V/H es $-v+H \in V/H$

Hasta aquí $(V/H, +)$ es un grupo abeliano.

Nota: Dos elementos cualesquiera de una clase definen una misma clase.

Ahora definiremos una Ley de Composición Externa:

$$\text{ii) } \bullet: K \times V/H \rightarrow V/H$$

$$\begin{aligned} (k, v+H) &\mapsto k \bullet (v+H) \\ &= kv + H \end{aligned}$$

(Que verifica desde E1 – E4)

E.1: $\forall k, \lambda \in K; \forall v+H \in V/H$ se verifica lo siguiente:

$$(k + \lambda) \bullet (v + H) = k(v + H) + \lambda(v + H)$$

Por definición: $(k + \lambda) \bullet (v + H) = (k + \lambda)v + H$

$$= (kv + \lambda v) + H$$

$$= (kv + H) + (\lambda v + H)$$

$$= k(v + H) + \lambda(v + H)$$

Idem E2 E3 E4

En consecuencia, de (i) y (ii) V/H es un K -e.v.

Ejemplo

Consideremos $K = \mathbb{Z}_2 := \{\bar{0}, \bar{1}\}$ clase residual modulo 2 y $V = \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}. \text{ Calcular } V/H$$

$$V := \mathbb{Z}_2^{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Donde, $\alpha = 0, \beta = 0; \alpha = 1, \beta = 0; \alpha = 0, \beta = 1; \alpha = 1, \beta = 1$ respectivamente.

$$V/H := \{v + H : v \in V\}$$

Es claro que $x + H = H$ ssi $x \in H$.

Luego $\forall v \in H, v + H = H$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + H = H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

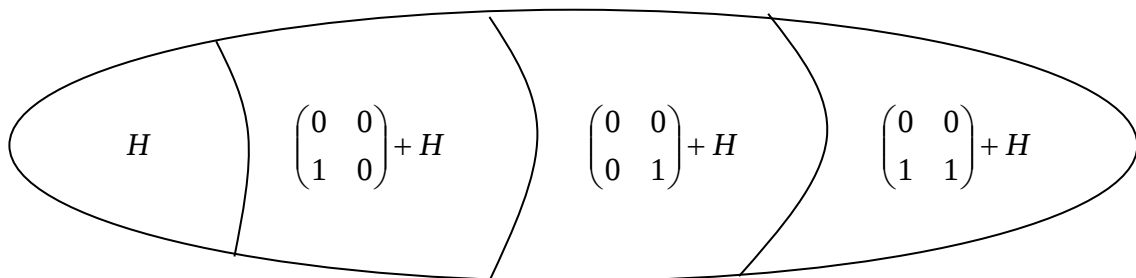
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V/H = \left\{ H, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + H, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + H, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + H \right\}$$



¡Partición!

El neutro de V/H es H

El opuesto de $v + H$ es $-v + H$

Teorema Fundamental de Homomorfismo de Espacios Vectoriales (T.F.H.)

Proposición

Sea V un K -espacio vectorial, $H \leq V$

Para cualquier

$$f: V \rightarrow W \text{ T. L. y } H \subseteq \ker f$$

entonces existe una única

$$\phi: V/H \rightarrow W \text{ T. L.}$$

Tal que

$$\phi \circ \pi = f \text{ donde } \pi: V \rightarrow V/H \text{ es Epimorfismo.}$$

En un diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow[\text{T.L.}]{f} & W \\
 \pi \downarrow & \nearrow \exists! \phi \text{ T.L.} & \\
 \text{epi} & & \\
 V/H & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 H \subseteq \ker f \\
 \exists! \phi \text{ tal que } \phi \circ \pi = f
 \end{array}$$

Definamos

$$\phi: V/H \rightarrow W \text{ tal que } \forall (v+H) \in V/H, \phi(v+H) := f(v)$$

Por demostrar

(i) ϕ claramente está bien definida

$$\text{Si } v_1 + H = v_2 + H$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 \in H$$

Pero $H \subseteq \ker f$, entonces

$$f(v_1 - v_2) = 0_w, \quad f \text{ es T.L.}$$

$$f(v_1) - f(v_2) = 0, \quad w \text{ es } K\text{-e.v. (tiene opuesto)}$$

$$f(v_1) = f(v_2)$$

$\therefore f$ está bien definida.

(ii)

(1) Por ver que ϕ es T.L.

$\forall v_1 + H, v_2 + H \in V/H$, se tiene:

$$\begin{aligned} \phi((v_1 + H) + (v_2 + H)) &= \phi((v_1 + v_2) + H) \\ &= f(v_1 + v_2), \quad f \text{ es T.L.} \\ &= f(v_1) + f(v_2) \\ &= \phi(v_1 + H) + \phi(v_2 + H) \end{aligned}$$

$\therefore \phi$ es Transformación Lineal

(2) Por ver que $\phi(\lambda(v + H)) = \lambda\phi(v + H)$;

$$\begin{aligned} \phi(\lambda(v + H)) &= \phi(\lambda v + H); \quad f \text{ es T.L.} \\ &= f(\lambda v) \\ &= \lambda f(v) \\ &\Rightarrow \lambda\phi(v + H) \end{aligned}$$

(iii) Por ver que $\phi \circ \pi = f$

$$\begin{aligned}\forall v \in V, \phi \circ \pi(v) &= \phi(v + H) \\ &= f(v) \\ \therefore \phi \circ \pi &= f\end{aligned}$$

(iv) Unicidad:

Supongamos que existe $\phi: V/H \rightarrow W$ tal que:

$$\forall v \notin H \in V/H, \phi(v + H) = f(v)$$

Tal que:

$$\phi \circ \pi = f; \quad \forall v \in V$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}(\phi \circ \pi)(v) &= \phi(\pi(v)) = f(v) = \phi(\pi(v)) \\ &= \phi(v + H) = \phi(v + H); \forall v + H \in V/H \\ \therefore \phi &= \phi\end{aligned}$$

Corolario

1. En el T.F.L., si $H = \ker f$ entonces ϕ es Monomorfismo (T.L. Inyectiva)
2. Se verifica $V/\ker f \cong \text{Im } f$ (primer teorema de Isomorfismo)
- 2.1. Si se verifica corolario 1 y f es Epimorfismo, entonces: $V/\ker f \cong W$

Proposición

Sean V, W dos K -espacio vectorial, $\dim V = n$, $B_V = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base para V , entonces:

Si $x_1, x_2, \dots, x_n \in W \Rightarrow \exists! f: V \rightarrow W$ T.L.

$$e_i \mapsto x_i; \forall i = 1, \dots, n$$

Notar que $\forall v \in V$ se tiene $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \alpha_i \in K$

Definimos $f: V \rightarrow W$ tal que

$$v \mapsto f(v) := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{que es T.L.}$$

En efecto:

(i) $\forall v_1, v_2 \in V$, por demostrar que $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

Si $v_1, v_2 \in V \Rightarrow \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ y $\exists b_1, b_2, \dots, b_n \in K$

Tales que

$$v_1 = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad v_2 = \sum_{i=1}^n b_i e_i$$

Luego

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{i=1}^n b_i e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i \end{aligned}$$

$$= f(v_1) + f(v_2)$$

(ii) Dado $\lambda \in K, v \in V$.

Por demostrar $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ con $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$,

Luego:

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f\left(\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right); \quad V \text{ es } K\text{-e.v.} \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda(\alpha_i e_i)\right); \quad V \text{ es } K\text{-e.v.} \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i) e_i\right); \quad \lambda \alpha_i \in K (i=1, \dots, n) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda(\alpha_i x_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \\ &= \lambda f(v) \\ \therefore \text{ de (i) y (ii), } f \text{ es T.L.} \end{aligned}$$

(iii) Por ver que f verifique:

$$\forall i=1, \dots, n; f(e_i) = x_i$$

Notar que $\forall e_i \in B_v = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$$e_i = \underbrace{0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_{i-1}}_0 + 1 \cdot e_i + \underbrace{0 \cdot e_{i+1} + \dots + 0 \cdot e_n}_0$$

Luego

$$f(e_i) = 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_{i-1} + 1 \cdot x_i + 0 \cdot x_{i+1} + \dots + 0 \cdot x_n = x_i$$

$$\therefore f(e_i) = x_i$$

(iv) Unicidad

Supongamos que existe $g: V \rightarrow W$ T.L.

Tal que

$$g(e_i) = x_i$$

Luego

$$g(e_i) = x_i = f(e_i)$$

$\therefore$ es única.

Corolario

1.- Si $\dim W < \dim V$ con $m < n$

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 & e_1 \mapsto x_1 & \\
 & e_2 \mapsto x_2 & \\
 & \vdots & \\
 \text{base para } V. & e_m \mapsto x_m & \text{base para } W \\
 & e_{m+1} \nearrow & \\
 & \vdots & \\
 & e_n \nearrow &
 \end{array}$$

Entonces f no es inyectiva.

2.- Si $\dim V < \dim W$ con $n < m$

$$\begin{array}{c}
 f \\
 e_1 \mapsto x_1 \\
 e_2 \mapsto x_2 \\
 \vdots \\
 e_n \mapsto x_n \\
 \\
 x_{n+1} \\
 \vdots \\
 x_m
 \end{array}$$

Entonces f no es epiyectiva.

Proposición 1

Sean V, W dos K -espacios vectoriales. Si $\dim V = \dim W$ entonces $V \cong W$

Demostración

Sean $\dim V = n = \dim W$ con $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

Una base para V y W respectivamente.

Luego, según proposición anterior:

$\exists! f : V \rightarrow W$ T.L. tal que

$$v_i \mapsto w_i$$

$\exists! g : W \rightarrow V$ T.L. tal que

$$w_i \mapsto v_i$$

Luego

$$g \circ f : V \rightarrow V$$

$$v_i \mapsto v_i$$

Es decir que

$$g \circ f = id_V$$

Y

$$f \circ g : W \rightarrow W$$

$$w_i \mapsto w_i$$

Es decir que

$$f \circ g = id_W$$

En consecuencia, tanto f como g son biyectivas.

$\therefore$ Son Isomorfismo

$$\therefore V \cong W$$

Proposición 2

Sea V un K -e.v. y $H \leq V$, donde $\dim V = n < \infty$

$\dim V/H + \dim H = \dim V$ o bien $\dim V/H = \dim V - \dim H$.

Corolario

Si $f \in l(V, W)$

Entonces $\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

Nota: $\dim(\ker f) := \operatorname{nul} f$

$$\dim(\operatorname{Im} f) := \operatorname{rg} f$$

Ejemplo

Sea $f \in l(V, W)$. Entonces f es Epiyectiva $\Rightarrow \dim W \leq \dim V$

Demostración

Por hipótesis f es Epiyectiva:

Entonces

$$\dim V = \dim(\ker f) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} f)}_{\dim W}$$

Matriz Asociada a una Transformación Lineal

Sean V, W dos K -espacios vectoriales, $\dim V = n$, $\dim W = m$ y

$B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base para V y W respectivamente.

Dado $f \in l(V, W)$, entonces se puede definir:

$$\forall v_i \in B_V; i = 1, \dots, n$$

$$f(v_i) = a_{1i} \cdot w_1 + a_{2i} \cdot w_2 + \dots + a_{mi} \cdot w_m$$

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} \cdot w_k ; \quad a_{ki} \in K, k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$$

Es decir:

$$V_1 \mapsto f(v_1) = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + \dots + a_{m1} \cdot w_m$$

$$V_2 \mapsto f(v_2) = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 + \dots + a_{m2} \cdot w_m$$

$\vdots$

$$V_n \mapsto f(v_n) = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + \dots + a_{mn} \cdot w_m$$

Luego

$$[f] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Es la matriz asociada a la Transformación Lineal f respecto de la B_V a B_W .

Notación: $[f] := {}_{B_V} [f]_{B_W} \Rightarrow [f]_{B_V}^{B_W}$

Ejemplo

1. Determinar ${}_{C_2} [f]_{C_3} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ donde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x, x - y, 3y) \text{ es T.L.}$$

Se tiene:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

$$(1, 0) \mapsto (2, 1, 0)$$

$$(0, 1) \mapsto (0, -1, 3)$$

$$(2, 1, 0) = 2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 0)$$

$$(0, -1, 3) = 0(1, 0, 0) + -1(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

$$\therefore {}_{C_2} [f]_{C_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

2. Hallar ${}_{B_1} [f]_{B_2}$ donde

$$B_1 = \{(1,1), (1,0)\} \text{ base de } \mathbb{R}^2 \text{ y } B_2 = \{(1,0,1), (-1,0,0), (0,1,1)\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y) = (2x, x - y, 3y)$$

Se tiene:

$$(1) (1,1) \mapsto (2,0,3) = \{a(1,0,1) + b(-1,0,0) + c(0,1,1)\}$$

$$(2) (1,0) \mapsto (2,1,0) = \{a'(1,0,1) + b'(-1,0,0) + c'(0,1,1)\}$$

$${}_{B_1}[f]_{B_2} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

$$(1) \begin{array}{l|l} a-b=2 & a=3 \\ c=0 & b=1 \\ \hline a+c=3 & c=0 \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{l|l} a'-b'=2 & a'=-1 \\ c'=1 & b'=-3 \\ \hline a'+c'=0 & c'=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

Por ver si $\ker f = \{(0,0)\}$

$$\text{Sea } (x, y) \in \ker f \Rightarrow f(x, y) = \underset{\Downarrow}{(0,0,0)}$$

$$(2x, x-y, 3y) = \underset{\Downarrow}{(0,0,0)}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x=0 & \\ x-y=0 & \Rightarrow x=y=0 \\ \hline 3y=0 & \end{array}$$

$$\therefore \ker f = \{(0,0)\}$$

$\therefore f$ es Monomorfismo (T.L. Inyectiva)

Ejemplo

$$1. \frac{d}{dx} : R_n[x] \rightarrow R_n[x]$$

$$f \rightarrow \frac{df}{dx}$$

Base canónica para $R_n[x]$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, entonces:

$$1 \rightarrow 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$$

$$x \rightarrow 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n$$

$$x^2 \rightarrow 2x = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n$$

$$x^3 \rightarrow 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots + 0 \cdot x^n$$

$\vdots$

$$x^{n-1} \rightarrow (n-1)x^{n-2} = 0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot x^{n-3} + (n-1)x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n$$

$$x^n \rightarrow nx^{n-1} = 0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + nx^{n-1} + 0 \cdot x^n$$

Luego

$$\left[\frac{d}{dx} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dado $A \in K^{m \times n}$ determinar la T.L., $f : K^n \rightarrow K^m$, asociada a A.

$$2. \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Determine } f \text{ la T.L. asociada a A:}$$

- i. Respecto de la base canónica
- ii. Respecto de la base $B_1 = \{(1,1), (-1,0)\}$, $B_2 = \{(1,2), (0,1)\}$

- i. $A := [f]_{C_2}^{C_2}$, $C_2 = \{(1,0), (0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que}$$

$$\therefore (x, y) \rightarrow f(x, y) = ?$$

Se tiene:

$$(1,0) \rightarrow f(1,0) = 1(1,0) + 2(0,1) = (1,2)$$

$$(0,1) \rightarrow f(0,1) = -1(1,0) + 3(0,1) = (-1,3)$$

Por otro lado, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) \quad / \text{ aplicamos } f_{T.L.}$$

$$f(x, y) = f(x(1,0)) + f(y(0,1))$$

$$f(x, y) = xf(1,0) + yf(0,1)$$

$$f(x, y) = x(1,2) + y(-1,3)$$

$$f(x, y) = (x, 2x) + (-y, 3y)$$

$$f(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$$

$$\therefore f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$$

Nota:

Cuando tenemos la base canónica, el resultado lo obtenemos de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y, 5x + 6y)$$

ii. Considero $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =: [f]_{B_2 \leftarrow B_1}^{B_2 = \{(1,2), (0,1)\}, B_1 = \{(1,1), (-1,0)\}}$, definir f T.L. asociada a A

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\therefore (x, y) \rightarrow f(x, y) = ?$$

Tal que

$$(1,1) \rightarrow f(1,1) = 1(1,2) + 2(0,1) = (1,4)$$

$$(-1,0) \rightarrow f(-1,0) = -1(1,2) + 3(0,1) = (-1,1)$$

Por otro lado, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) = \alpha(1,1) + \beta(-1,0)$$

$$\alpha - \beta = x \Rightarrow \beta = y - x$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = y$$

Luego:

$$(x, y) = y(1,1) + (y-x)(-1,0) \quad / \text{aplico } f_{T.L.}$$

$$f(x, y) = yf(1,1) + (y-x)f(-1,0)$$

$$f(x, y) = y(1,4) + (y-x)(-1,1)$$

$$f(x, y) = (y, 4y) + (-y + x, y - x)$$

$$f(x, y) = (x, -x + 5y)$$

$$\therefore f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, -x + 5y)$$

Otra forma menos óptima

$$f(x, y) = (a_1x + b_1y, a_1x + b_2y)$$

$$\text{ii. } -(1, 1) \rightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (1, 4)$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 + b_1 = 1 \quad \wedge \quad a_2 + b_2 = 4$$

$$\text{ii. } -(-1, 0) \rightarrow (-a_1, -a_2) = (-1, 1)$$

$$\Downarrow$$

$$-a_1 = -1 \quad \wedge \quad -a_2 = 1$$

De 1 y 2, se tiene:

$$a_1 + b_1 = 1 \quad \wedge \quad a_2 + b_2 = 4$$

$$a_1 = 1 \quad \wedge \quad a_2 = -1$$

$$\Rightarrow b_1 = 0 \quad \Rightarrow b_2 = 4$$

$$\therefore f(x, y) = (x, -x + 5y)$$

Teorema

Sean V, W dos K -espacios vectoriales, $\dim V = n$, $\dim W = m$; entonces:

$$L(V^{(n)}, W^{(m)}) \cong K^{m \times n}$$

$$\varphi: L(V^{(n)}, W^{(m)}) \rightarrow K^{m \times n}$$

$$f \mapsto [f]_{B_1}^{B_2} \quad \begin{array}{l} B_2 = \text{base para } W \\ B_1 = \text{base para } V \end{array}$$

Propiedades

1. Sean $V_{B_1}^{(n)}, W_{B_2}^{(m)}, U_{B_3}^{(p)}$ tres K -espacios vectoriales de dimensiones n, m, p y con bases B_1, B_2, B_3 respectivamente. Si $f; g \in L(V, W)$ y $h \in L(W, U)$, entonces:

- 1. $[f + g]_{B_1}^{B_2} = [f]_{B_1}^{B_2} + [g]_{B_1}^{B_2}$**
- 2. $[\lambda f]_{B_1}^{B_2} = \lambda [f]_{B_1}^{B_2} \quad ; \lambda \in K$**
- 3. $[hf]_{B_1}^{B_3} = [h]_{B_2}^{B_3} \cdot [f]_{B_1}^{B_2}$**

2. Sea $f \in L(V^{(n)}, W^{(m)})$ con matriz asociada $[f]_{B_1}^{B_2}$, entonces:

- 1. f es un isomorfismo, solo si $[f]_{B_1}^{B_2}$ es cuadrada regular (invertible), con $n=m$.**
- 2. f es un Isomorfismo, entonces:**

$f^{-1} : W \rightarrow V$ tiene por matriz asociada a $[f^{-1}]_{B_2}^{B_1} = ([f]_{B_1}^{B_2})^{-1}$

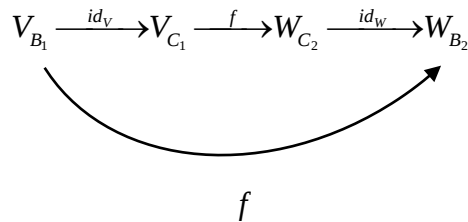
Las demostraciones se dejan como ejercicio para el lector.

Proposición

Sea $f \in L(V^{(n)}, W^{(m)})$ con C_1 y B_1 bases para V y B_2 y C_2 bases para W .

Entonces:

$$[f]_{B_1}^{B_2} = [id_W]_{C_2}^{B_2} [f]_{C_1}^{C_2} [id_V]_{B_1}^{C_1}$$



Ejemplo

Sean $B_1 = \{(1, -3), (2, -5)\}$ una base para $\mathbb{R}^2$ y $B_2 = \{(3, 7, -1), (-1, 0.5), (0, 0, 1)\}$

una base para $\mathbb{R}^3$. Tenemos $A := [f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para cierto $f \in L(V^{(n)}, W^{(m)})$

1. Hallar $\ker f$, $\text{Im } f$, $\dim \ker f$, $\dim \text{Im } f$. Sin hallar $f(x, y)$ en base canónica.
2. Hallar $f(x, y)$ en base canónica.
3. Halle lo mismo de 1, pero usando 2.

Solución

1. Sea $A := [f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Luego

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = 0, y = 0 \right\}$$

$$\ker A = \{(0,0)\} := \langle (0,0) \rangle$$

$$\dim(\ker A) = 0$$

Por lema:

$$\ker f = \left\langle 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(Es un vector asociado a los vectores de la base B_1)

$$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(0,0)\}$$

Notar que el sub-espacio columna de A , $SC(A)$, es:

$$SC(A) = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$

Luego:

$$\text{Im } f = \left\langle 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Im } f = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 + 0, 0 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \right\rangle$$

$$\text{Im } f = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim(\text{Im } A) = 2$$

2. Consideremos C_2 base canónica de $\mathbb{R}^2$ y C_3 base canónica de $\mathbb{R}^3$

Según proposición precedente, tenemos que:

$$[f]_{B_1}^{B_2} = [id]_{C_3}^{B_2} [f]_{C_2}^{C_3} [id_V]_{B_1}^{C_2}, \text{ o bien, } [f]_{C_2}^{C_3} = [id_{\mathbb{R}^3}]_{B_2}^{C_3} [f]_{B_1}^{B_2} [id_{\mathbb{R}^2}]_{C_2}^{B_1}$$

$$id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}_{C_2}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{B_1}^2$$

Se tiene:

$$id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}_{B_2}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{C_3}^3$$

$$(3, 7, -1) \rightarrow f(3, 7, -1) = 3(1, 0, 0) + 7(0, 1, 0) + (-1)(0, 0, 1)$$

$$(-1,0,5) \rightarrow f(-1,0,5) = -1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 5(0,0,1)$$

$$(0,0,1) \rightarrow f(0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$\therefore [id_{\mathbb{R}^3}]_{B_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que:

$$([id]_{B_1}^{C_2})^{-1} = [id^{-1}]_{C_2}^{B_1} = [id]_{C_2}^{B_1}$$

$$id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}_{B_1}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{C_2}^2$$

$$(1,-3) \rightarrow f(1,-3) = 1(1,0) + (-3)(0,1)$$

$$(2,-5) \rightarrow f(2,-5) = 2(1,0) + (-5)(0,1)$$

$$\therefore [id_{\mathbb{R}^2}]_{B_1}^{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculando su inversa} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia:

$$[f]_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} -18 & -7 \\ -35 & -14 \\ 20 & 7 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\forall (x, y) \rightarrow f(x, y) := (-18x - 7y, -35x - 14y, 20x + 7y)$$

2. Hallar $\ker f$ (se deja de ejercicio para el lector)

$$\text{Im } f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (a, b, c)\}$$

Si $f(x, y) = (a, b, c)$, entonces:

$$(-18x - 7y, -35x - 14y, 20x + 7y) = (a, b, c)$$

$$\Rightarrow -18x - 7y = a$$

$$-35x - 14y = b$$

$$20x + 7y = c$$

$$\text{Lo que implica: } \begin{pmatrix} -18 & -35 & 20 \\ -7 & -14 & 7 \end{pmatrix} \therefore \text{el } \text{rg}(f) = 2$$

Entonces el conjunto imagen no es todo $\mathbb{R}^3$, solo un espacio generado por los vectores, en este caso:

$$\langle (-18, -35, 20), (-7, -14, 7) \rangle \leq \mathbb{R}^3$$

$$\dim(\text{Im } f) = 2$$

Diagonalización de Endomorfismos

Diagonalización de Matrices Cuadradas

Definición

Sea $T \in \text{End}(V)$, donde V es un K -espacio vectorial, $\dim V < \infty$. Un Subespacio $V_0 \subset V$ es llamado invariante bajo T , o bien, T -invariante, si para cada $x \in V_0$, $T(x) \in V_0$; es decir, $T(x) \in V_0$, $\forall x \in V_0$. (*)

En otras palabras, si V_0 es T -invariante, entonces todo elemento $x \in V_0$ es transformado por T en un elemento del mismo Subespacio de V_0 .

Ejemplo

1. Si $T \in \text{End}(V)$ entonces $\ker T$ y $\text{Im } T$ son T -invariante.

En efecto, sea $x \in \ker T$, entonces $T(x) = 0$ y puesto que $0 \in \ker T$, se tiene (*)

$\therefore \ker T$ es T -invariante.

2. Mostrar que V_0 es T -invariante ssi $T(x_i) \in V_0$, $(i = 1, 2, \dots, k)$ donde

$\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es una base de V_0 .

Recuerdo:

Dado B base de V y $T \in \text{End}(V)$, tenemos: $[T]_B$, matriz asociada a T .

$$\text{Nulidad de } T = \dim \ker T$$

$$\text{Rango de } T = \dim \text{Im } T$$

Estudiaremos bajo que condiciones de T podemos encontrar bases adecuadas de tal forma de representar a T mediante una matriz “simple” (diagonal o triangular). Es decir, intentaremos responder las siguientes interrogantes, entre otras: ¿Se puede representar toda T. L. T por medio de una matriz diagonal con respecto a alguna base ordenada? Si no, ¿Para qué T. L. T existe una base semejante?, ¿Cómo se puede encontrar tal base si existe?, si tal base no existe, ¿Cuál es el tipo más sencillo de matriz por el cual puede representarse T ?

Valores y Vectores Propios

Definición

Dado $T \in \text{End}(V)$, $\dim V = n$, V es un K -e.v. Diremos que $\lambda \in K$ es un valor propio de T , si y solo si, existe $v \neq 0 \in V$ tal que:

$$T(v) = \lambda v \quad \text{Valor Propio o Autovalor}$$

Notar que: $T(v) = \lambda v$; I Endomorfismo (T.L) identidad $I(v) := v, \forall v \in V$

Si y solo si, $T(v) - \lambda I(v) = 0$

Si y solo si, $v \in \ker(T - \lambda I)$

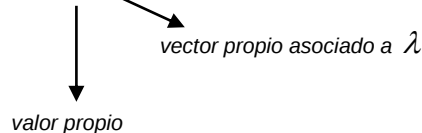
Si y solo si, $(T - \lambda I) \neq 0$ es no invertible matricialmente.

Sea $A \in K^{n \times n}$ (A matriz asociada al Endomorfismo T , $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Entonces, son equivalentes:

2. λ es un valor propio de A .
3. $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$
4. $|A - \lambda I| = 0$
5. $A - \lambda I$ es singular, no es regular y no es invertible.

Nota:

- i. $|A - \lambda I| := p_A(\lambda)$ recibe el nombre de Polinomio Característico de A .
- ii. $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ recibe el nombre de Ecuación Característica.
- iii. λ es raíz (o cero) del polinomio característico $p_A(\lambda)$
- iv. Conocido $\lambda \in K$, diremos que el vector $v \neq 0$ de V , tal que $T(v) = \lambda v$, recibe el nombre de Valor Propio asociado a λ de T , existe al menos un vector $\bar{v} \neq \bar{0}$ tal que $T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$



- v. $\ker(I - \lambda I)$ ó $\ker(A - \lambda I)$ es el Espacio propio asociado a $\lambda \in K$ (valor propio). **Notación:** $V(\lambda) := \ker(A - \lambda I)$
 $V(\lambda) = \{\bar{v} \in V : \bar{v} \text{ es vector propio asociado al valor propio } \lambda\} \cup \{\bar{0}\}$, recibe el nombre de Espacio Propio Asociado a λ .

Observación: $V(\lambda) \leq V$. La verificación se deja de ejercicio para el lector.

- vi. El conjunto de todos los valores propios de A (o bien de T), recibe el nombre de Espectro. $\forall \lambda$ raíces del polinomio.

$$Sp(A) = \{\lambda \in K : \lambda \text{ es valor propio de } A\}$$

- vii. Dado $T \in \text{End}(V)$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ (distintos), valores propios de T , con multiplicidades $d_1, d_2, \dots, d_r$ respectivamente. Entonces, diremos que T es Diagonalizable, si y solo sí, la matriz asociada es una matriz diagonal. $\dim V(\lambda_i) = d_i, i = 1, r$, donde en la diagonal aparecen los valores propios.

$$\dim V = \sum_{i=1}^r \dim(V(\lambda_i)) = d_1 + d_2 + \dots + d_r$$

$$\text{si y solo sí } V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_r),$$

Si y solo sí existe una base B (formada por la unión de las bases de cada espacio propio), tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1 \times d_1} & & & 0 \\ & \lambda_2 I_{d_2 \times d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_r I_{d_r \times d_r} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, notar que $A = [T]$, donde:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T(x, y) := (x + 2y, 3x + 2y)$$

Determinar: $S_p(A)$ vectores propios, $V(A), \forall \lambda$

Solución

i. $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6$$

$$p_A(\lambda) = 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$\therefore p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \text{ Polinomio Característico.}$$

ii. Determinar $S_p(A)$

$$p_A(\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 4; \lambda_2 = -1$$

$$S_p(A) = \{4, -1\}$$

Multiplicidad $(\lambda - 4)^2 = 4$ multiplicidad de 2

Multiplicidad: de $\lambda_1 = 4$ es 1 y de $\lambda_2 = -1$ es 1

$$V(\lambda_i), i = 1, 2$$

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow V(4) = \ker(A - 4Id)$$

$$V(4) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (A - 4Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolver:

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{21(1)}} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ el sistema es $-3x + 2y = 0$, que tiene una variable libre, a saber:

$$\Rightarrow 2y = 3x$$

$$y = \frac{3}{2}x$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore V(\lambda = 4) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim V(4) = 1$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow V(-1) = \ker(A - (-1)I)$$

$$V(-1) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (A + 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolver:

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2 \\ 3 & 2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \tilde{f}_{21^{(-1)}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{12^{(-2)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ el sistema es $x + y = 0$

$$\Rightarrow x = -y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore V(\lambda_2 = -1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim V(-1) = 1$$

Como las dimensiones de los espacios propios son iguales a las multiplicidades de los valores propios asociados, entonces A es Diagonalizable.

$$R^2 = V(4) \oplus V(-1)$$

Temáticas del Capítulo

Formalizaciones

1. Teorema: Sea $T \in \text{End}(V)$. Son equivalentes:

1.1 $\lambda \in K$; λ es Valor Propio de T .

1.2 $T - \lambda I$ no invertible.

1.3 $\ker(T - \lambda I) \neq \{\vec{0}\}$. (No es inyectivo)

1.4 $\exists \vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

1.5 $\det(T - \lambda I) = 0$

1.6 λ es raíz del polinomio p_T

Observación: p_T polinomio mónico de grado n . (i.e., coeficiente de x^n es 1).

Demostración queda de ejercicio para el lector.

2. Lema: Si $A, B \in M_n(K)$ tales que A, B son semejantes. Entonces $p_A = p_B$

Demostración

A, B semejantes $\Rightarrow \exists P \in GL_n(K)$ tal que $P^{-1}AP = B$

$$\begin{aligned}
 p_A(x) &= \det(A - xI) \\
 &= \det(P^{-1}(A - xI)P) \\
 &= \det(P^{-1}AP - xP^{-1}P) \\
 &= \det(B - xI) \\
 &= p_B(x) \\
 \therefore p_A &= p_B
 \end{aligned}$$

Ejercicio: Sea $A \in M_n(K)$. Demostrar que $p_A = p_{A^t}$.

Observaciones

1. p_T no depende de la base que se escoja.
2. Asociado a cada Valor Propio λ , $\exists V(\lambda)$ Subespacio Propio asociado al Valor Propio λ .

3. Teorema: Sea $T \in \text{End}(V)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ Valores Propios distintos de T .

Sea $W = V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + \dots + V(\lambda_k)$. Entonces $W = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)$.

Ver demostración en texto "Álgebra Lineal", Barbolla.

4. Observaciones: Dado $T \in \text{End}(V)$

4.1 T es diagonalizable $\Leftrightarrow \exists B$ base de V tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

4.2 Supongamos que T es diagonalizable y

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} (x - \lambda_2)^{d_2} \dots (x - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\therefore d_1 + d_2 + \dots + d_k = n; \quad (n = \dim V)$$

$\exists B$ base de V tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$\left. \begin{matrix} \text{---} \end{matrix} \right\} d_1$
 $\left. \begin{matrix} \text{---} \end{matrix} \right\} d_2$
 $\left. \begin{matrix} \text{---} \end{matrix} \right\} d_k$

i. e.;

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1 \times d_1} & & & 0 \\ & \lambda_2 I_{d_2 \times d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k I_{d_k \times d_k} \end{pmatrix}$$

Nota: B está constituida por vectores propios de T .

5. Teorema (de Diagonalización)

Sea V un K -e.v., $\dim V = n$, $T \in \text{End}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valores propios distintos de T .

$$V(\lambda_i) = \ker(T - \lambda_i I)$$

Entonces son equivalentes:

5.1 T es diagonalizable

$$5.2 \quad p_T(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} (x - \lambda_2)^{d_2} \dots (x - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\dim V(\lambda_i) = d_i$$

$$5.3 \quad V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)$$

Demostraciones

5.1 $\Rightarrow$ 5.2: $\exists B$ base de Vectores Propios tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$p_T(x) = \det(xI - T)$$

$$= \det \left(- \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_k & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} x - \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & x - \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & x - \lambda_k & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & x - \lambda_k \end{vmatrix}$$

$$= (x - \lambda_1)^{d_1} \dots (x - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\text{Además, } \dim V(\lambda_i) = d_i$$

$$5.2 \Rightarrow 5.3: \text{ Sea } W = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k) \leq V$$

$$\dim W = \dim V(\lambda_1) + \dots + \dim V(\lambda_k)$$

$$= d_1 + \dots + d_k$$

$$= n$$

$$\Rightarrow W = V$$

$$5.3 \Rightarrow 5.1: \text{ Sea } B_1, \text{ base de } V(\lambda_1); \dots; B_k \text{ base de } V(\lambda_k); \dots;$$

$$\text{Luego } B = \bigcup_{i=1}^k B_i \text{ base de } V \text{ y}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Calcular Valores Propios, Vectores Propios y diagonalizar:

$$\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Desarrollo

Se tiene:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$[T]_B = A \quad ; \quad B = \{e_1, e_2, e_3\}$$

(a) Polinomio Característico:

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x+9 & -4 & -4 \\ 8 & x-3 & -4 \\ 16 & -8 & x-7 \end{vmatrix}$$

$$p_A(x) = (x+1)^2 (x-3)$$

Luego

$Sp A = \{\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3\}$, λ de multiplicidad 2

(b) Vectores Propios asociados al Valor Propio $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{l} -8x + 4y + 4z = 0 \\ -8x + 4y + 4z = 0 \\ \underline{-16x + 8y + 8z = 0} \end{array}$$

$$\therefore V_{(\lambda_1=-1)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -2x + y + z = 0 \right\} \text{ y } B_1 = \{(1, 0, 2); (0, 1, -1)\} \text{ base de } V(-1)$$

(c) Vectores Propios asociados al Valor Propio $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{l} (1) \quad -12x + 4y + 4z = 0 \\ (2) \quad \quad -8x + 4y = 0 \\ (3) \quad \underline{-16x + 8y + 4z = 0} \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{l} \text{de (2)} \quad \quad \quad z = 2x \\ \text{de (1) y (3)} \quad \underline{-3x + y + z = 0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 2x \\ y = -z + 3x = x \end{array}$$

Luego

$$V(\lambda_2 = 3) = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

Así

$$B_2 = \{(1, 1, 2)\} \text{ base para } V(3)$$

Con lo cual $\bar{B} = B_1 \cup B_2 = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1), (1, 1, 2)\}$ es base de Vectores Propios
Luego $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = [T]_B$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = [T]_{\bar{B}}$$

Notar: $P^{-1}AP = P^{-1}[T]P = [T]_{\bar{B}}$, donde $P = Q_{\bar{B}}^B$, queda de ejercicio su verificación.

6. Observación: Sea $A \in M_n(K)$, ($\in K^{n \times n}$)

A es diagonalizable $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$ tal que $P^{-1}AP$ es matriz diagonal.

7. Teorema Cayley – Hamilton (C - H)

Sea $T \in \text{End}(V)$; $\dim V = n < \infty$

Entonces $p_T(T) = \hat{0}$

Aplicación del Teorema de Cayley - Hamilton al Cálculo de la Inversa de una Matriz

Ejemplo

Dado $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar A^{-1} vía C – H. Se tiene

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - 2x - 5$$

Luego

$$p_A(A) = \hat{0} \Leftrightarrow A^2 - 2A - 5I = 0$$

$$A^2 - 2A = 5I$$

$$A(A - 2I) = 5I$$

$$A \frac{(A - 2I)}{5} = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{A - 2I}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(A - 2I)$$

$$\therefore A^{-1} = ?$$

Se deja para el lector terminar de calcular A^{-1}



William Rowan Hamilton
(1805 - 1865)

Fue un matemático, físico, y astrónomo irlandés, que hizo importantes contribuciones al desarrollo de la óptica, la dinámica, y el álgebra. Su descubrimiento del cuaternión es quizá su investigación más conocida. El trabajo de Hamilton en dinámica fue después decisivo en el desarrollo de la mecánica cuántica, donde un concepto fundamental llamado hamiltoniano lleva su nombre. Hamilton demostró su inmenso talento a una edad muy temprana, cosa que hizo decir al Dr. John Brinkley, astrónomo y obispo de Cloyne, en 1823, cuando Hamilton tenía 18 años: "Este joven, no digo que será, sino que es, el primer matemático de su tiempo". Al final de su vida tuvo graves problemas de alcoholismo.

Guía de ejercicios

1. Pruebe que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$f(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Es decir:

- (i) Por ver que f es T.L.
- (ii) Por ver que f es inyectiva (1-1)
- (iii) Por ver que f sea Epiyectiva.

Solución:

- (i) Por ver que f es T.L.

Dados $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
 f((x, y) + (u, v)) &= f(x + u, y + v) \\
 &= (x + u + y + v, x + u - y - v) \\
 &= (x + y, x - y) + (u + v, u - v) \\
 &= f(x, y) + f(u, v)
 \end{aligned}$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
 f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) \\
 &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) \\
 &= (\lambda(x + y), \lambda(x - y)) \\
 &= \lambda(x + y, x - y) \\
 &= \lambda f(x, y)
 \end{aligned}$$

$\therefore f$ es T.L.

(ii) Por ver que f es inyectiva (1-1)

Dados $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ (dominio)

$$\text{Si } f(x, y) = f(u, v)$$

$$\Rightarrow (x + y, x - y) = (u + v, u - v)$$

$$\text{Luego } \begin{array}{l} x + y = u + v \\ x - y = u - v \end{array} \Big| \bullet -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x + y = u + v \\ -x + y = -u + v \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 1) & 2x = 2u \\
 & x = u
 \end{array}
 \quad \wedge \quad
 \begin{array}{ll}
 2) & 2y = 2v \\
 & y = v
 \end{array}$$

$$\therefore (x, y) = (u, v) \Rightarrow f \text{ es 1-1}$$

Hasta aquí f es Monomorfismo.

(iii) Por ver que f sea Epiyectiva.

$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ (codominio), existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (dominio), tal que:

$$f(x, y) = (u, v)$$

Supongamos que $f(x, y) = (u, v)$

Entonces: $(x + y, x - y) = (u, v)$

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \cdot -1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = u \\ -x + y = -v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad 2x &= u + v & \wedge & & 2) \quad 2y &= u - v \\ x &= \frac{u + v}{2} \in \mathbb{R} & & & y &= \frac{u - v}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego $f\left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$f\left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right) = (u, v)$$

$\therefore f$ es Epiyectiva

$\therefore$ de (i), (ii), (iii) se sostiene que f es isomorfismo (Automorfismo)

2. Dado $A \in K^{m \times n}$ determinar la T.L. $f : K^n \rightarrow K^m$ asociada a A .

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Determine f T.L. asociada a A :

- (i) Respecto de la base canónica
- (ii) Respecto de las bases $B_1 = \{(1,1), (-1,0)\}$; $B_2 = \{(1,2), (0,1)\}$

Solución:

(i) $A := [f]_{C_2}^{C_2}$ donde $C_2 = \{(1,0), (0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = ? \text{ T.L.}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} (1,0) &\mapsto f(1,0) = 1(1,0) + 2(0,1) = (1,2) \\ (0,1) &\mapsto f(0,1) = -1(1,0) + 3(0,1) = (-1,3) \end{aligned}$$

Por otro lado: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) / f \text{ T.L.}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= f(x(1,0)) + f(y(0,1)) \\ &= x f(1,0) + y f(0,1) \\ &= x(1,2) + y(-1,3) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$$

(ii) Determine f T.L. asociada a A respecto de las bases:

$$B_1 = \{(1,1), (-1,0)\}; B_2 = \{(1,2), (0,1)\}$$

Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} := [f]_{B_1}^{B_2}$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = ? \text{ T.L.}$$

$$\begin{aligned} (1,1) &\mapsto f(1,1) = 1(1,2) + 2(0,1) = (1,4) \\ (-1,0) &\mapsto f(-1,0) = -1(1,2) + 3(0,1) = (-1,1) \end{aligned}$$

Por otro lado, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (x, y) &= \alpha(1,1) + \beta(-1,0) \\ &\Downarrow \\ \left. \begin{array}{l} \alpha - \beta = x \\ \alpha = y \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = y \\ \beta = -x + y \end{array} \end{aligned}$$

Luego: $(x, y) = y(1,1) + (-x+y)(-1,0) / f$ T.L.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(y(1,1) + (-x+y)(-1,0)) \\ &= f(y(1,1)) + f((-x+y)(-1,0)) \\ &= y f(1,1) + (-x+y) f(-1,0) \\ &= y(1,4) + (-x+y)(-1,1) \\ &= (y+x-y, 4y-x+y) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x, y) = (x, -x + 5y)$$

$$\begin{aligned} \therefore f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = (x, -x + 5y) \end{aligned}$$

Respecto de las bases B_1 y B_2 .

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, notar que $A = [T]$ donde

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) := (x + 2y, 3x + 2y) \end{aligned}$$

Determinar, para todo λ , que:

- (i) $Sp(A)$
- (ii) Vectores propios
- (iii) $V(\lambda)$

Solución:

$$(i) \ p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \\ &= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

$$\therefore p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \} \text{ Polinomio Característico.}$$

Luego, como ya se tiene el Polinomio Característico, ahora se debe calcular $Sp(A)$, para esto, se debe igualar el **Polinomio Característico** a cero para obtener la **Ecuación Característica**.

$$p_A(\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = -4 \quad \wedge \quad \lambda = 1$$

$$\therefore Sp(A) = \{4, -1\}$$

(ii) Multiplicidad de $\lambda_1 = -4$ es 1

$\lambda_2 = 1$ es 1

$V(\lambda_i); \quad i = 1, 2$

- $\lambda_1 = 4 \Rightarrow V(4) = \ker(A - 4Id)$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (A - 4Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces: $(A - \lambda Id) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (A - 4Id) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \tilde{f}_{21}(1) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ El sistema es $-3x + 2y = 0$, que tiene una variable libre, a saber, x .

$$\begin{aligned} \Rightarrow -3x + 2y &= 0 \\ 2y &= 3x \\ y &= \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore V(\lambda_1 = 4) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \dim V(4) = 1.$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es el vector propio asociado al valor propio 4.

$$\bullet \lambda_2 = -1 \Rightarrow V(-1) = \ker(A + Id)$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (A + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Entonces: } (A - \lambda Id) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A + Id) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \tilde{f}_{21}(-1) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_{12}(-2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ El sistema es $x + y = 0$

$$\Rightarrow x + y = 0$$

$$x = -y$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore V(\lambda_2 = -1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \dim V(-1) = 1.$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es el **vector propio** asociado al valor propio -1

4. Sea $g \in l(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ T.L.

$$[f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\}$$

$$B_2 = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$$

(i) Defina explícitamente $g(x, y)$

(ii) Hallar $\ker(g)$

Solución:

(i) Defina explícitamente $g(x, y)$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que}$$

$$(x, y) \mapsto g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) = \alpha(1, 2) + \beta(-2, 1)$$

$\Downarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{array} \right| \cdot 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = x \\ 4\alpha + 2\beta = 2y \end{array} \right|$$

$$5\alpha = x + 2y \Rightarrow \alpha = \frac{x + 2y}{5}$$

Reemplazando α resulta lo siguiente:

$$\frac{x + 2y}{5} - 2\beta = x$$

$$\frac{x + 2y}{5} - x = 2\beta$$

$$\frac{-4x + 2y}{5} = 2\beta$$

$$\frac{-2x + y}{5} = \beta$$

Ahora, se debe buscar la T.L. reemplazando los valores de α, β en la c.l.

$$(x, y) = \frac{x + 2y}{5}(1, 2) + \frac{y - 2x}{5}(-2, 1) \quad / g \text{ T.L.}$$

$$g(x, y) = \frac{x + 2y}{5} \underbrace{g(1, 2)}_{(1)} + \frac{y - 2x}{5} \underbrace{g(-2, 1)}_{(2)}$$

Ahora anotamos $g(1,2)$ igual a la combinación lineal de los vectores del recorrido (B_2) y los números que multipliquen a cada vector son los de la matriz que nos dan.

$$(1) \quad g(1,2) = 1(1,1,0) + 2(-1,1,0) + -1(0,0,2)$$

$$g(1,2) = (-1,3,-2)$$

$$(2) \quad g(-2,1) = 0(1,1,0) + 1(-1,1,0) + 1(0,0,2)$$

$$g(-2,1) = (-1,1,2)$$

Ahora se reemplazan estos valores en $g(x,y)$

$$g(x,y) = \frac{x+2y}{5}(-1,3,-2) + \frac{y-2x}{5}(-1,1,2)$$

$$= \left(\frac{-x-2y}{5} + \frac{2x-y}{5}, \frac{3x+6y}{5} + \frac{y-2x}{5}, \frac{-2x-4y}{5} + \frac{2y-4x}{5} \right)$$

$$= \left(\frac{x-3y}{5}, \frac{x+7y}{5}, \frac{-6x-2y}{5} \right) \text{ es la Transformación Lineal pedida.}$$

(ii) Hallar el $\ker(g)$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-3y}{5} = 0 \\ \frac{x+7y}{5} = 0 \\ \frac{-6x-2y}{5} = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\tilde{f}_{21}(-1) \\ 31(6)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\tilde{f}_{2\left(\frac{1}{10}\right)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\tilde{f}_{12(3)} \\ 32(20)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=0, y=0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ker(g) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \dim(\ker(g)) = 1$$

5. Sean $f \in l(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que: $f(x, y) = (x + 2y, 3x - 2y)$

$g \in l(\mathbb{R}^2)$ tal que ${}_{{C}_2}[g]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, donde C_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y

$$B = \{(2, 1), (1, 2)\}$$

Probar que f es T.L.

Solución:

Dados $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
 f((x, y) + (u, v)) &= f(x + u, y + v) \\
 &= (x + u + 2y + 2v, 3x + 3u - 2y - 2v) \\
 &= (x + 2y + u + 2v, 3x - 2y + 3u - 2v) \\
 &= (x + 2y, 3x - 2y) + (u + 2v, 3u - 2v) \\
 &= f(x, y) + f(u, v)
 \end{aligned}$$

Dados $\lambda \in K, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
 f(\lambda(x, y)) &= f(\lambda x, \lambda y) \\
 &= (\lambda x + 2\lambda y, 3\lambda x - 2\lambda y) \\
 &= (\lambda(x + 2y), \lambda(3x - 2y)) \\
 &= \lambda(x + 2y, 3x - 2y) \\
 &= \lambda f(x, y)
 \end{aligned}$$

$\therefore f$ es Transformación Lineal.

6. Respecto del ejercicio precedente, defina $f \circ g$

Solución:

Recuerda que: $g \in l(\mathbb{R}^2)$ tal que $_{C_2}[g]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, donde C_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{(2, 1), (1, 2)\}$,

Entonces $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto g(x, y)$

$$(x, y) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \quad / g \text{ T.L.}$$

$$g(x, y) = x \underbrace{g(1, 0)}_{(1)} + y \underbrace{g(0, 1)}_{(2)}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad g(1, 0) &= 2(2, 1) + 3(1, 2) \\ &= (4, 2) + (3, 6) \\ &= (7, 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad g(0, 1) &= 1(2, 1) + 0(1, 2) \\ &= (2, 1) + (0, 0) \\ &= (2, 1) \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x(7, 8) + y(2, 1) \\ &= (7x, 8x) + (2y, y) \\ &= (7x + 2y, 8x + y) \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(f \circ g)_{(x,y)} &= f(g(x,y)) \\ &= f(7x+2y, 8x+y) \\ &= (7x+2y+16x+2y, 21x+6y-16x-2y) \\ &= (23x+4y, 5x+4y)\end{aligned}$$

Autoevaluación nº 3

(Prueba año 2007)

1. Sea $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que: $T(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$,
determine

- (i) $Sp(T)$
- (ii) Espacios propios asociados
- (iii) ¿Es T diagonalizable?

2. Sea $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que:

$$f(1,1,1) = (1, 2, 3)$$

$$f(1,1,0) = (3, 2, 1)$$

$$f(1,0,0) = (0, 1, 0)$$

- (i) Hallar $f(x, y, z)$ T.L.
- (ii) Determine $\ker f$
- (iii) $\text{Im } f$

3. $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que:

$$f(x, y) = (x + 2y, 3x - 2y), \quad g \in \text{End } \mathbb{R}^2, \text{ tal que: } [g]_{C_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

$$C_2 = \text{base canónica}, \quad B = \{(2,1), (1,2)\} \text{ base de } \mathbb{R}^2$$

- (i) Defina $g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- (ii) Defina $f \circ g \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- (iii) ¿Es $f \circ g$ un isomorfismo?, justifique

Soluciones:

1.

- (i) $Sp(T) = \{-2, 4\}$

$$(ii) \quad V(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(iii) \quad \text{Si es diagonalizable, pues } \mathbb{R}^3 = 3$$

2.

$$(i) \quad f(x, y, z) = (3y - 2z, x + y, y + 2z)$$

$$(ii) \quad \ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(iii) \quad \text{Im } f = \mathbb{R}^3$$

3.

$$(i) \quad g(x, y) = (7x + 2y, 8x + y)$$

$$(ii) \quad f \circ g_{(x,y)} = (23x + 4y, 5x + 4y)$$

$$(iii) \quad f \circ g \text{ es isomorfismo}$$

Se recomienda resolver los siguientes ejercicios:

Morras R., Johnson R. (1984). "Álgebra Lineal"

Página 155, Lista de Ejercicios N° 7

Página 184, Lista de Ejercicios N° 8

Página 202, Lista de Ejercicios N° 9