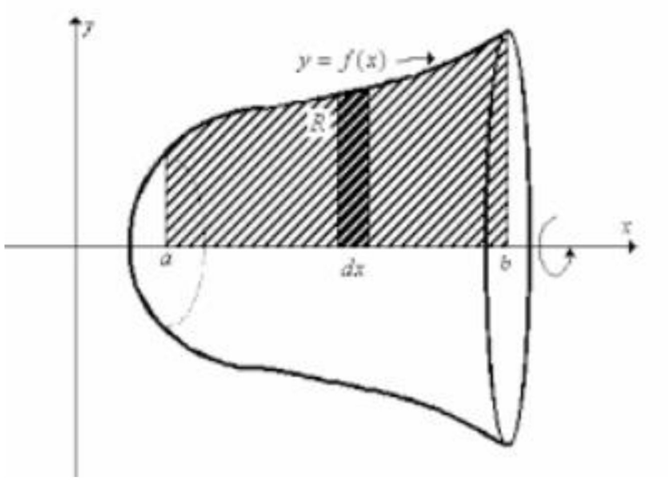
Universidad de Playa Ancha

Volumen de un Sólido de Revolución

Sea $y = f(x)$ *una función continua y acotada en un intervalo* $[a, b]$, *consideremos la región del plano limitada por la gráfica de la función, el eje* x *y el intervalo* $[a, b]$. *La idea es rotar la región descrita anteriormente en torno a un eje y obtenemos asi un sólido de revolución. Nuestro objetivo será calcular el volumen de este sólido*

Para aquello rotaremos respecto a ejes paralelos a los ejes coordenados, usaremos dos métodos para realizar este cálculo

La figura muestra un ejemplo de lo que queremos realizar

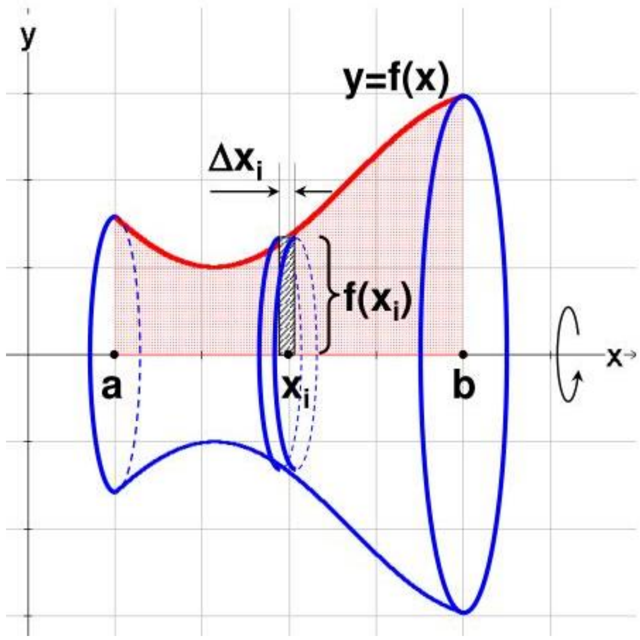


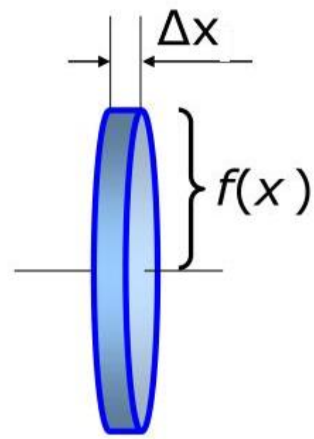
1.- Método del Cilindro o Disco

$Sea\ y = f(x)\ \ función\ continua\ y\ acotada\ en\ el\ intervalo\ [a, b]$

$Hallar\ el\ volumen\ que\ resulta\ al\ rotar\ en\ torno\ al\ eje\ x\ el\ área\ de\ la\ región\ limitada$

$por\ la\ gráfica\ que\ muestra\ la\ figura$





$En\ primer\ lugar\ calculemos\ el\ volumen\ del\ cilindro\ genérico\ hacemos\ \Delta x = dx$

$Si\ llamamos\ V_c\ \ al\ volumen\ del\ cilindro\ genérico\ se\ tiene$ $\boxed{V_c = \pi\big(f(x)\big)^2 dx}$

$Entonces\ si\ llamaos\ V\ al\ volumen\ tenemos$ $\boxed{V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx}$

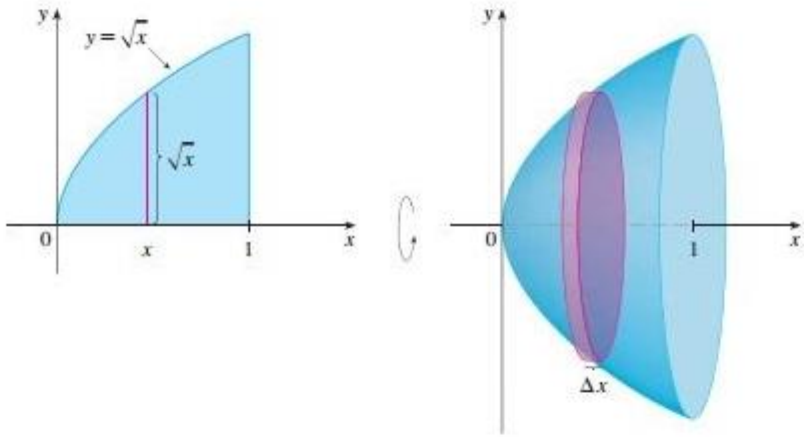
$V\ es\ el\ volumen\ que\ resulta\ al\ rotar\ en\ torno\ al\ eje\ x\ la\ región\ limitada\ por\ la$

$gráfica\ de\ la\ función\ y = f(x)\ en\ el\ intervalo\ [a, b]$

Ejemplos

$1. -\ Hallar\ el\ volumen\ del\ sólido\ que\ resulta\ al\ rotar\ en\ torno\ al\ eje\ x\ la\ región$

$limitada\ por\ la\ gráfica\ de\ la\ función\ f(x) = \sqrt{x}\ en\ el\ intervalo\ [0,1]$

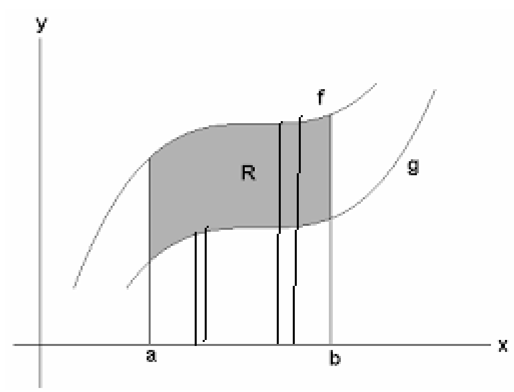


$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Observación

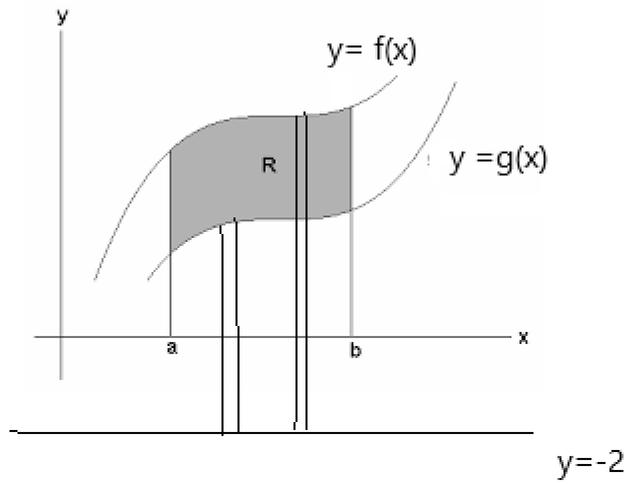
Hallar el volumen que resulta al rotar en torno a un eje paralelo al eje x la región R de la siguiente figura

1.- Rotar en torno eje x



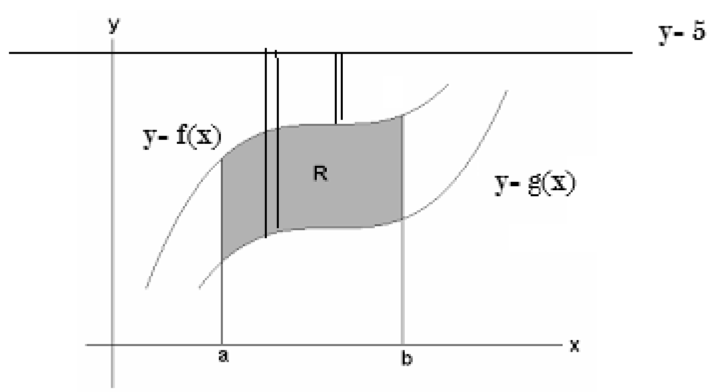
$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx - \pi \int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx = \pi \int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right] dx$$

2.- Rotar en torno al eje y = -2



$$V = \pi\int_a^b (f(x)+2)^2dx - \pi\int_a^b (g(x)+2)^2dx = \pi\int_a^b [(f(x)+2)^2 - (g(x)+2)^2]dx$$

3.- Rotar en torno al eje y = 5



$$V = \pi\int_a^b \left(5-g(x)\right)^2dx - \pi\int_a^b \left(5-f(x)\right)^2dx$$

$$= \pi\int_a^b \left[\left(5-g(x)\right)^2 - \left(5-f(x)\right)^2\right]dx$$

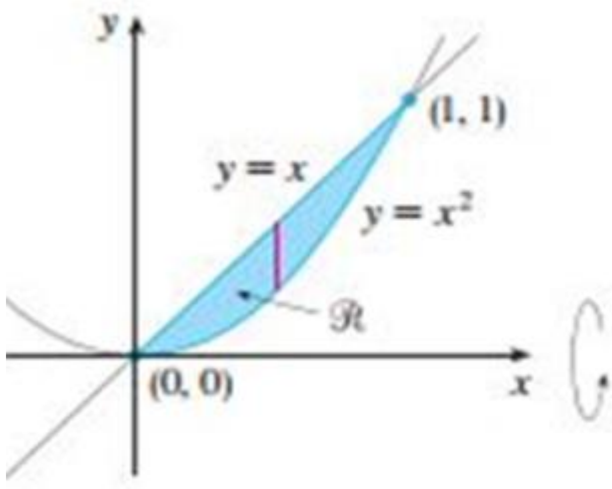
Ejemplos

$1. - Calcular\ el\ volumen\ del\ sólido\ que\ resulta\ al\ rotar\ en\ torno\ a\ un\ \ eje\ dado\ la$

$Región\ del\ plano\ limitada\ por\ las\ curvas{:}\ \ y = x\ \ \ e\ \ \ y = x^2$

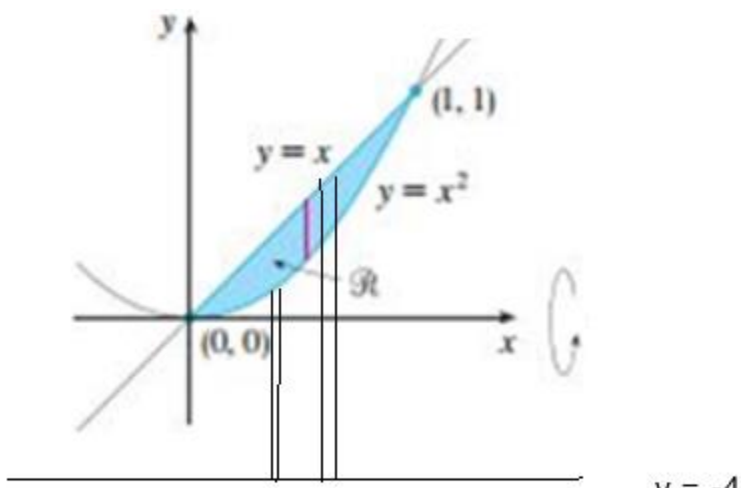
$i)\ \ El\ eje\ x\ \ \ ii)\ \ \ el\ eje\ \ y = \ -4\ \ \ \ \ iii)\ el\ eje\ y = 3$

i) Eje x



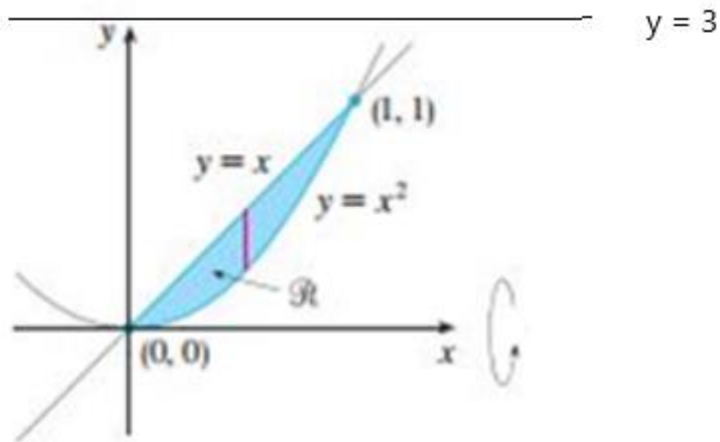
$$V = \pi\int_0^1 [(x)^2 - (x^2)^2]dx$$

ii) Eje y = -4



$$V = \pi \int_0^1 [(x+4)^2 - (x^2+4)^2]dx$$

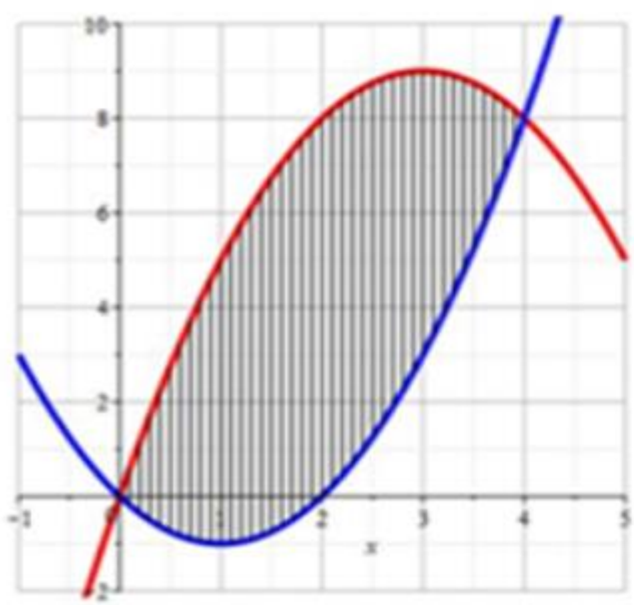
iii) Eje y = 3



$$V = \pi \int_0^1 [(3-x^2)^2 - (3-x)^2]dx$$

$2. - \mathit{Calcular\ el\ volumen\ del\ sólido\ que\ resulta\ al\ rotar\ en\ torno\ a\ un\ \ eje\ dado\ la}$

$\mathit{Región\ del\ plano\ limitada\ por\ las\ curvas}:\ y = 6x - x^2 \quad e \quad y = x^2 - 2x$



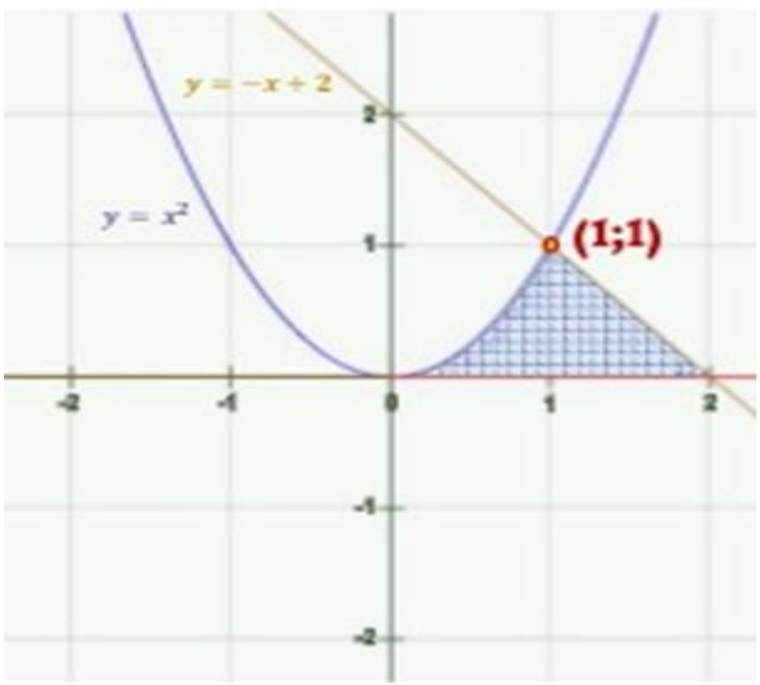
$i)$ *En torno al eje* $y = -5$

$$V = \pi \int_1^4 [(6x - x^2 + 5)^2 - (x^2 - 2x + 5)^2]dx$$

$ii)$ *En torno al eje* $y = 12$

$$V = \pi \int_1^4 \left[\left(12 - (x^2 - 2x)\right)^2 - \left(12 - (6x - x^2)\right)^2 \right] dx$$

$3. -$ *Calcular el volumen del sólido que resulta al rotar en torno a un eje dado la Región del plano limitada por las curvas:* $y = x^2$ *e* $y = -x + 2, \quad x > 0$



$i)$ *En torno al eje* x

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx + \pi \int_1^2 (-x + 2)^2 dx$$

$ii)$ *En torno al eje* $y = -2$

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 + 2)^2 dx + \pi \int_1^2 (-x + 2 + 2)^2 dx$$

$iii)$ *En torno al eje* $y = 2$

$$V = \pi \int_0^1 (2 - x^2)^2 dx + \pi \int_1^2 \big(2 - (-x + 2)\big)^2 dx$$

4.− *Calcular el volumen del sólido que resulta al rotar en torno a un eje dado, paralelo, al eje* x*, la Región del plano limitada por las curvas:*

$$y = x + 1, \qquad y = -\frac{1}{2}x + 4, \qquad y = -\frac{1}{8}x + 1$$

(*ustedes eligen los ejes de rotación*)

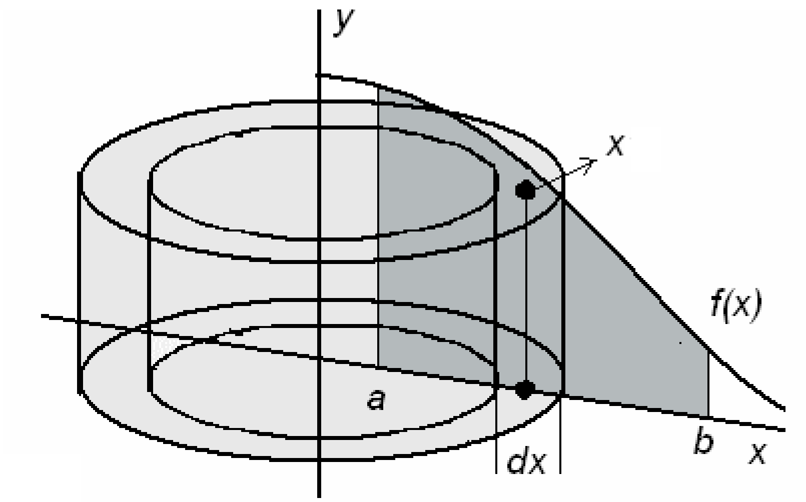
Tarea

2.- Método del anillo

$Sea\ y = f(x)\ \ función\ continua\ y\ acotada\ en\ el\ intervalo\ [a, b]$

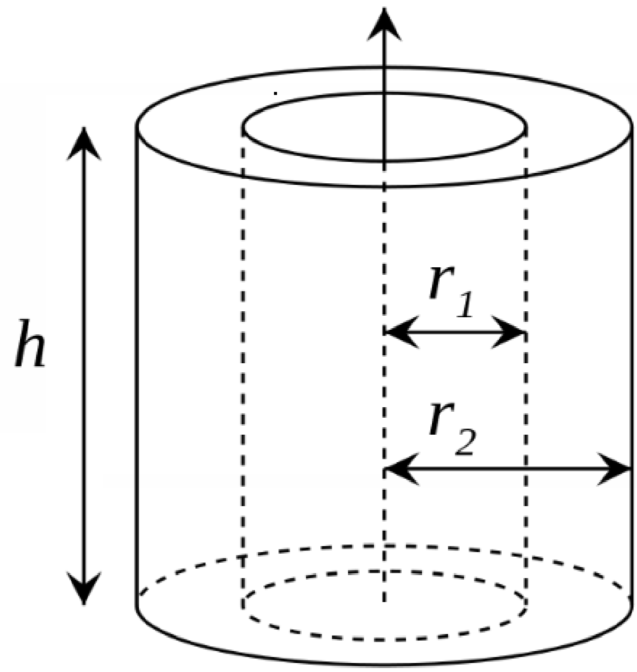
$Hallar\ el\ volumen\ que\ resulta\ al\ rotar\ en\ torno\ al\ eje\ y\ el\ área\ de\ la\ región\ limitada$

$por\ la\ gráfica\ que\ muestra\ la\ figura$



$En\ primer\ lugar\ calculemos\ el\ volumen\ del\ anillo\ genérico\ tal\ como\ lo\ hicimos\ en\ el\ método$

$del\ cilindro\ anteriormente\ llamaremos\ V_a\ a\ tal\ volumen, para\ ese\ cálculo\ veamos$



$V_a = \pi h {r_2}^2 - \pi h {r_1}^2 = \pi h({r_2}^2 - {r_1}^2)$ *de la primera figura se desprende que*

$r_2 = x \quad r_1 = x - dx \quad h = f(x)$ *luego tenemos que*

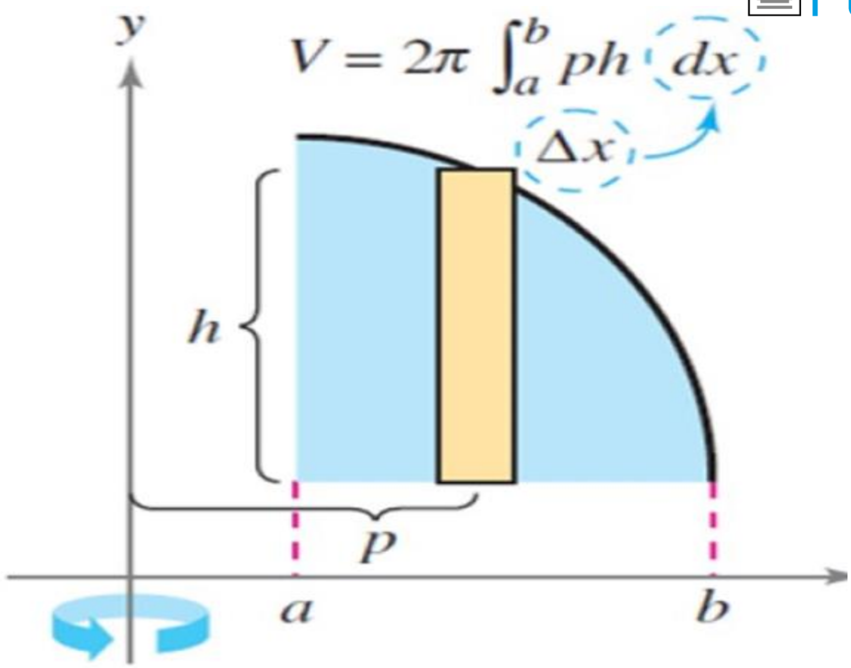
$V_a = \pi f(x)(x^2 - (x - dx)^2) = \pi f(x)(x^2 - x^2 + 2xdx + (dx)^2)$ *como* dx *es muy pequeño, podemos asumir que* $(dx)^2$ *es cero, luego se tiene*

$$\boxed{V_a = 2\pi x f(x)}$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx}$$

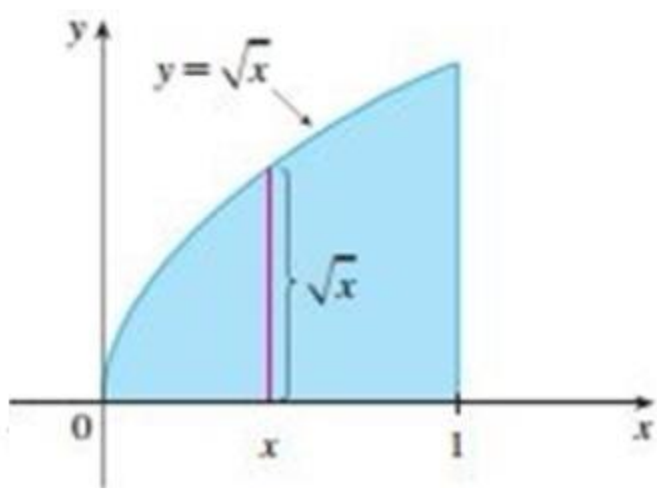
Observación

En la siguiente figura se muestra en detalle lo que se rota



Ejemplo

$1. -$ *Hallar el volumen del sólido que resulta al rotar en torno al eje y la región limitada por la gráfica de la función* $f(x) = \sqrt{x}$ *en el intervalo* $[0, 1]$



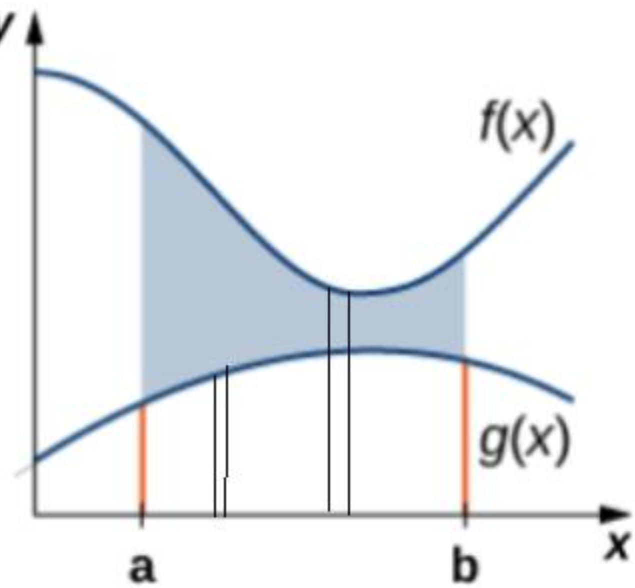
$$V = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x}\, dx$$

Observación

$Hallar\ el\ volumen\ que\ resulta\ al\ rotar\ en\ torno\ a\ un\ eje\ paralelo\ al\ eje\ y\ \ la$

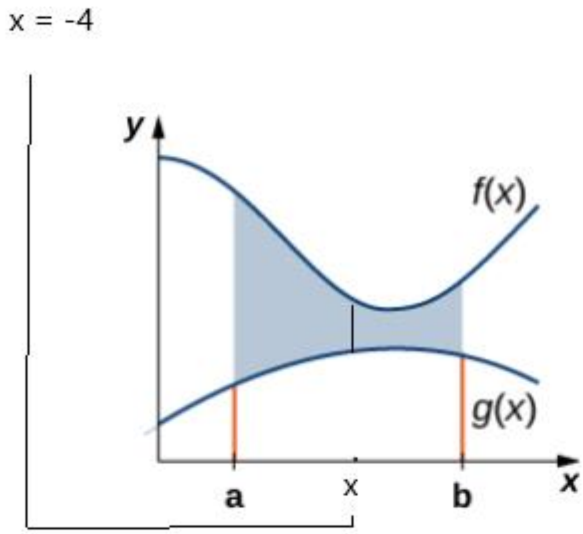
$regi\acute{o}n\ R\ de\ la\ siguiente\ figura$

i) En torno al eje y



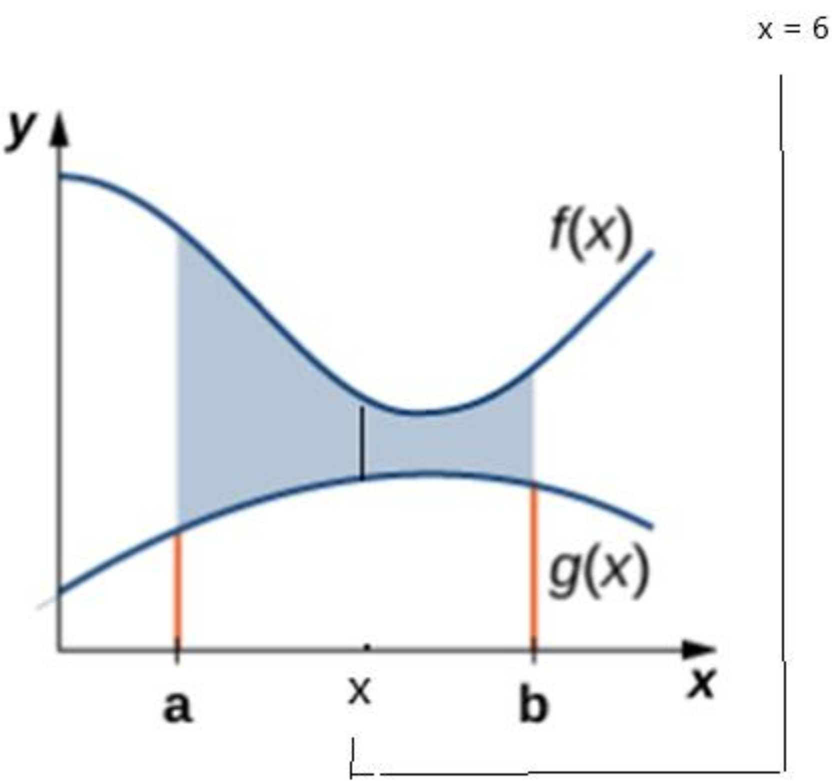
$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

ii) En torno al eje x = -4



$$V = 2\pi \int_a^b (x+4)\big(f(x) - g(x)\big)dx$$

iii) En torno al eje x = 6

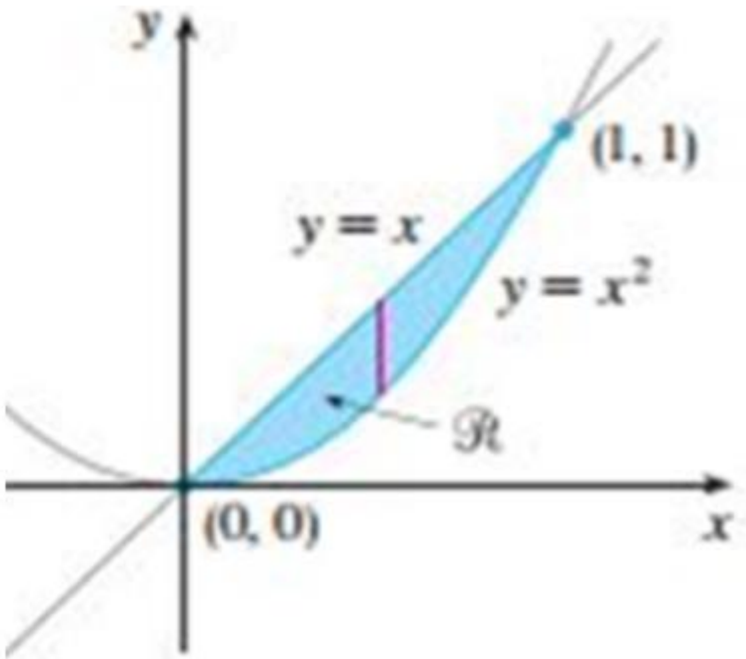


$$V = 2\pi \int_a^b (6-x)\big(f(x)-g(x)\big)dx$$

Ejemplos

$1.-$ *Calcular el volumen del sólido que resulta al rotar en torno a un eje dado la Región del plano limitada por las curvas:* $y = x \quad e \quad y = x^2$

$i)$ *El eje y* $\quad ii)$ *el eje* $x = -4 \quad iii)$ *el eje* $x = 3$



$i)$ *Eje y*

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x-x^2)dx$$

$ii)$ *Eje* $x = -4$

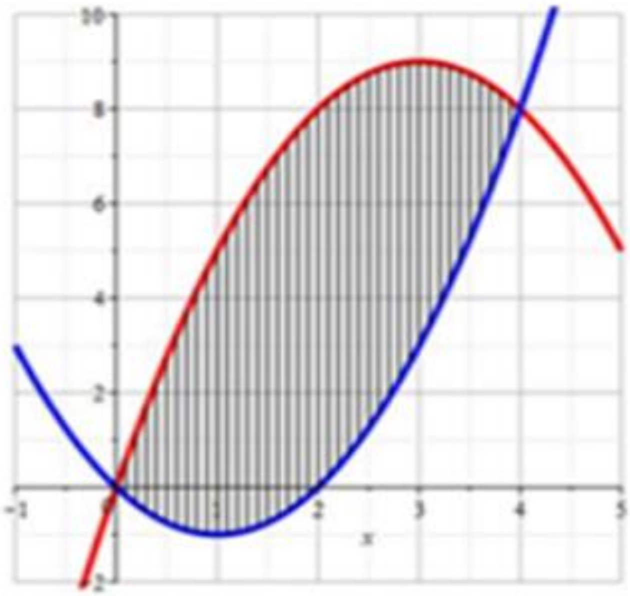
$$V = 2\pi \int_0^1 (x+4)(x-x^2)dx$$

$iii)$ *Eje* $x = 3$

$$V = 2\pi \int_0^1 (3-x)(x-x^2)dx$$

$2. -$ *Calcular el volumen del sólido que resulta al rotar en torno a un eje dado la*

Región del plano limitada por las curvas: $y = 6x - x^2$ *e* $y = x^2 - 2x$



$i)$ *El eje y* $ii)$ *el eje* $x = -2$ $iii)$ *el eje* $x = 7$

$i)$ *Eje y*

$$V = 2\pi \int_0^4 x\big(6x - x^2 - (x^2 - 2x)\big)dx$$

$ii)$ *Eje* $x = -2$

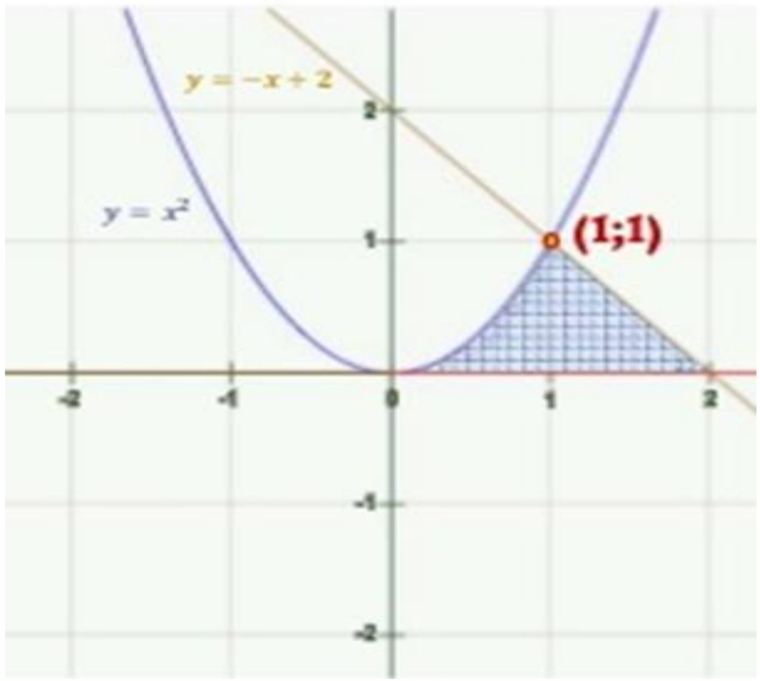
$$V = 2\pi \int_0^4 (x + 2)\big(6x - x^2 - (x^2 - 2x)\big)dx$$

$iii)$ *Eje* $x = 7$

$$V = 2\pi \int_0^4 (7 - x)\left(6x - x^2 - (x^2 - 2x)\right) dx$$

$3. - Calcular\ el\ volumen\ del\ sólido\ que\ resulta\ al\ rotar\ en\ torno\ a\ un\ \ eje\ dado\ la$

$Región\ del\ plano\ limitada\ por\ las\ curvas:\ y = x^2\ , y = \ -x + 2, y = 0 \quad x > 0$



$i) \quad El\ eje\ y \quad ii) \quad el\ eje\ x = \ -3 \quad \ iii)\ el\ eje\ x = 5$

$i)\ Eje\ y$

$$V = 2\pi \int_0^1 x x^2 dx \ + 2\pi \int_1^2 x(-x + 2) dx$$

$ii) \ Eje\ x = \ -3$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x + 3)x^2 dx \ + 2\pi \int_1^2 (x + 3)(-x + 2) dx$$

$iii) \ Eje\ x = 5$

$$V = 2\pi \int_0^1 (5 - x)x^2 dx \ + 2\pi \int_1^2 (5 - x)(-x + 2) dx$$

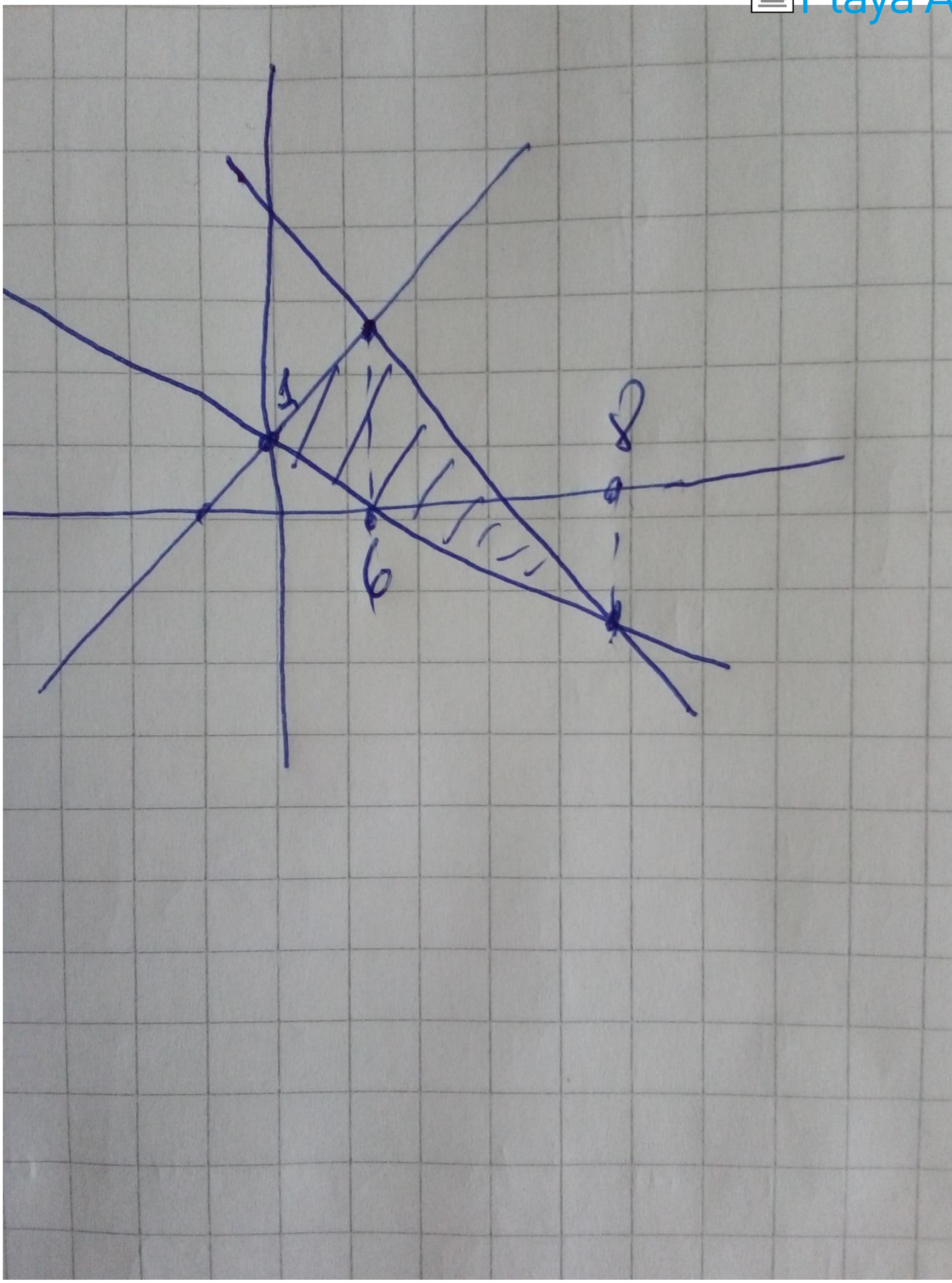
$4.-$ *Calcular el volumen del sólido que resulta al rotar en torno a un eje dado, paralelo, al eje y, la Región del plano limitada por las curvas:*

$$y = x + 1, \qquad y = -\frac{1}{2}x + 4, \qquad y = -\frac{1}{8}x + 1$$

$$(\textit{ustedes eligen los ejes de rotación})$$

Eje $x = -3$

$$V = 2\pi \int_0^6 (x+3)\left(x + 1 - \left(-\frac{1}{8}x + 1\right)\right)dx$$
$$+ 2\pi \int_6^8 (x+3)\left(-\frac{1}{2}x + 4 - \left(-\frac{1}{8}x + 1\right)\right)dx$$


1
8
6